

лазером, то напряженности \mathbf{E} и \mathbf{B} настолько малы, что максимальная скорость $|\mathbf{v}|$, которую может приобрести электрон в установившемся движении, значительно меньше c . Поэтому во многих физических ситуациях можно пренебречь силой, связанной с \mathbf{B} .

Возможны случаи, когда влияние поля \mathbf{B} будет преобладать. Если поля \mathbf{E} и \mathbf{B} созданы не излучением (бегущей волны), а (например) статическими полями независимых зарядов или токов, то \mathbf{B} и \mathbf{E} не обязательно будут равны по величине. Например, легко представить себе случай, когда $|\mathbf{E}|=0$, а $|\mathbf{B}|=100$ кэс.

4.4. Импеданс и поток энергии

При изучении мод и стоячих волн мы узнали, что непрерывную среду можно характеризовать двумя параметрами: «возвращающей силой» и «инерцией». Для непрерывной струны возвращающая сила определяется натяжением T_0 в равновесном состоянии, а инерция определяется линейной плотностью ρ_0 . У передающей линии соответствующими параметрами являются $(C/a)^{-1}$, т. е. величина, обратная емкости на единицу длины, и L/a — индуктивность на единицу длины. Для продольных волн в струне параметр, характеризующий возвращающую силу, — это Ka , а параметр, определяющий инерцию, равен $M/a = \rho_0$. Для звуковых волн такими параметрами соответственно являются $\gamma\rho_0$ и объемная плотность ρ_0 . Во всех случаях моды стоячих волн ведут себя аналогично простому гармоническому осциллятору. (Для таких систем, как связанные маятники или широкополосный фильтр, нам необходим еще один параметр, а именно граничная частота.)

Однако для описания бегущих волн рассмотренные параметры не подходят. Бегущие волны переносят энергию и импульс, и фазовые соотношения для бегущих волн отличны от фазовых соотношений для стоячих волн. Бегущие волны в непрерывной протяженной среде не похожи на большой гармонический осциллятор, и такие характеристики гармонического осциллятора, как возвращающая сила и инерция, не годятся для описания бегущих волн. Величиной, которая может характеризовать среду, где распространяются бегущие волны, является фазовая скорость v_ϕ . Для поперечных волн в струне фазовая скорость равна

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (93)$$

Это выражение является своего рода комбинацией параметров T_0 и ρ_0 , определяющих возвращающую силу и инерцию. Возможна еще одна независимая комбинация этих параметров:

$$Z = \sqrt{\rho_0 T_0}, \quad (94)$$

которая называется *характеристическим импедансом* или просто *импедансом* для поперечных волн в непрерывной струне. Мы покажем, что импеданс характеризует скорость, с которой энергия

распространяется вдоль струны, когда на струну действует внешняя сила. Фазовая скорость и импеданс представляют собой параметры, которые характеризуют бегущие волны в непрерывной среде.

Пример 8. *Поперечные бегущие волны в непрерывной среде.* Рассмотрим непрерывную струну, левый конец которой находится в точке $z=0$. Пусть на этот конец струны действует поперечная гармоническая сила (рис. 4.8). Назовем точку приложения внешней

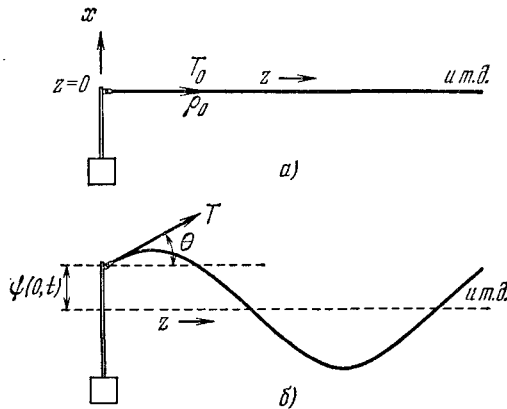


Рис. 4.8. Испускание поперечных бегущих волн. а) Равновесие; б) конфигурация в общем случае.

силы «выходным зажимом передатчика». Обозначим эту точку буквой L , а точку струны, находящуюся в контакте с выходным зажимом, буквой R . В состоянии равновесия (рис. 4.8, а) поперечная составляющая силы отсутствует и единственной силой, действующей на струну, является натяжение T_0 , направленное по оси z . В общем случае, показанном на рис. 4.8, б, натяжение струны в точке ее соединения с выходным зажимом передатчика равно T и направлено по касательной к струне в этой точке. Поперечная составляющая силы, с которой струна (ее конец R) действует на выходной зажим L передатчика, равна

$$F_x(R, L) = T \sin \theta = (T \cos \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = T_0 \operatorname{tg} \theta = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (95)$$

Этот результат справедлив для идеальной «пружины», когда $T = T_0 / \cos \theta$. В случае малых θ он справедлив для любой пружины.

Характеристический импеданс. Предположим, что передатчик воздействует на открытую среду (струну) и происходит установившийся процесс распространения бегущих волн вдоль направления $+z$. В этом случае функция $\psi(z, t)$ имеет вид

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz). \quad (96)$$

Дифференцирование дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = k A \sin(\omega t - kz), \quad (97)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz). \quad (98)$$

Сравнивая выражения (97) и (98) и используя равенство $v_{\phi} = \omega/k$, мы получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{v_{\phi}} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (99)$$

Подставляя (99) в (95), получим (для бегущих волн)

$$F_x(R, L) = -\frac{T_0}{v_{\phi}} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (100)$$

Величина $\partial \psi / \partial t$ — это поперечная скорость струны в точке соединения струны с выходным зажимом передатчика. Величина T_0/v_{ϕ} является константой. Таким образом, когда передатчик излучает бегущие волны, реакция среды (т. е. сила, с которой она воздействует на выходной зажим передатчика) является *демпфирующей*, или *затормаживающей*, силой. Эта сила обратно пропорциональна фазовой скорости распространения волн вдоль струны. Величина T_0/v_{ϕ} называется *характеристическим импедансом* Z :

$$F_x(R, L) = -Z \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (101)$$

где

$$Z = \frac{T_0}{v_{\phi}}. \quad (102)$$

Для поперечных бегущих волн в непрерывной струне имеем

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \text{ см/сек.} \quad (103)$$

Тогда

$$Z = \frac{T_0}{v_{\phi}} = \sqrt{T_0 \rho_0} \text{ дин} \cdot \text{сек/см.} \quad (104)$$

Мощность на выходе передатчика. Демпфирующая сила вызывает «поглощение» или «рассеивание» энергии. Это самое важное свойство демпфирующей силы. Наш пример соответствует случаю, когда энергия *поглощается* в форме «излучения» с выхода передатчика. Энергия, отдаваемая передатчиком, не рассеивается, в том смысле, что она не переходит в тепло. Эта энергия «распространяется» вдоль струны, которая может доставить ее к приемнику, расположенному на некотором расстоянии. Излучаемая на выходе передатчика мощность равна произведению поперечной силы, с которой передатчик воздействует на струну в точке $z=0$, на поперечную скорость струны в этой точке. Имея в виду, что согласно третьему закону Ньютона сила $F_x(L, R)$ равна взятой с обратным знаком силе $F_x(R, L)$, мы можем воспользоваться уравнением (101),

изменив в нем знак. Тогда для величины мгновенной выходной мощности (в *эрг/сек*) мы получим

$$P(t) = F_x(L, R) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{общий случай}), \quad (105)$$

$$P(t) = \left(Z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{случай бегущей волны}).$$

Первое равенство (105) имеет общий смысл, второе справедливо только для бегущих волн.

В формулах (105) мы выразили выходную мощность через мгновенную поперечную скорость струны $\partial \psi / \partial t$ (в точке $z=0$). Другой важной величиной, характеризующей волну, является поперечная сила, определяемая формулой (95) (с обратным знаком). Мощность на выходе передатчика может быть выражена через эту величину с помощью уравнений (95) и (99):

$$P(t) = F_x(L, R) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{общий случай}),$$

$$P(t) = \left[-T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \left[-v_\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = \frac{v_\phi}{T_0} \left[-T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]^2 = \quad (106)$$

$$= \frac{1}{Z} \left[-T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]^2 \quad (\text{случай бегущей волны}).$$

Первое уравнение (106) справедливо в общем случае, а второе — только для бегущих волн.

Мощность $P(t)$ может быть выражена двумя различными, но эквивалентными способами [уравнения (105) и (106)]. Действительно, всегда оказывается, что существуют две величины, представляющие физический интерес при описании поведения волны. В одних системах мы можем использовать первую из этих величин, а в других системах вторую. Например, мы обнаружили, что для звуковых волн избыток давления играет роль, аналогичную поперечной возвращающей силе $-T_0 \partial \psi / \partial z$ для струны, а продольная скорость воздуха в звуковой волне играет роль, аналогичную поперечной скорости струны $\partial \psi / \partial t$. Для электромагнитного излучения (мы докажем это) роль, аналогичную поперечной скорости струны $\partial \psi / \partial t$, играет поперечное магнитное поле B_y , а поперечное электромагнитное поле E_x аналогично возвращающей силе $-T_0 \partial \psi / \partial z$ струны.

Энергия, переносимая бегущей волной. Мощность $P(t)$, испускаемая передатчиком в точке $z=0$ в виде бегущих волн, равна величине энергии, переносимой волной в направлении $+z$ в единицу времени мимо какой-либо точки z . (Мы пренебрегаем затуханием.) Действительно, вычисляя потоки энергии с выходного зажима передатчика, мы могли бы рассматривать вместо точки $z=0$ любую точку на оси z . Единственное требование к среде заключается в том, чтобы в ней могли распространяться бегущие волны. Повторив сделанные ранее вычисления для любой точки струны z , мы обнаружим, что «испущенная» мощность, переносимая бегущими волнами мимо точки z

в направлении $+z$, определяется выражениями, аналогичными (105) и (106), за исключением того, что поперечная скорость $\partial\psi/\partial t$ и возвращающая сила $-T_0 \partial\psi/\partial z$ должны быть взяты в точке z вместо точки $z=0$. Таким образом, для бегущих волн в струне получаем

$$P(z, t) = Z \left[\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t} \right]^2 \quad (107)$$

или

$$P(z, t) = \frac{1}{Z} \left[-T_0 \frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} \right]^2. \quad (108)$$

Пример 9. Бегущие продольные волны в пружине. Перейдем к рассмотрению продольных волн сжатия и растяжения в пружине. Мы попытаемся применить полученные результаты к описанию излучения звуковых волн. Для этого мы используем модель Ньютона, с теми улучшениями, которые были сделаны в п. 4.2.

Исследуемая нами система показана на рис. 4.9.

Величина Ka входит в уравнение для продольных колебаний пружины с грузами точно так же, как равновесное натяжение T_0 —

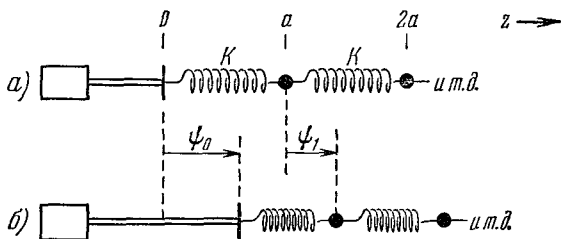


Рис. 4.9. Испускание продольных бегущих волн.
а) Равновесие; б) конфигурация в общем случае.

в уравнение движения для поперечных колебаний такой пружины [см. уравнение (2.77), п. 2.4 и последующее обсуждение]. Поэтому величина фазовой скорости получается простой заменой T_0 на Ka [см. уравнение (27), п. 4.2]. Точно так же мы найдем выражение для характеристического импеданса и потока энергии в случае продольных волн, если заменим в соответствующих выражениях для поперечных колебаний T_0 на Ka . Окончательно из выражений (103), (104), (107) и (108) получаем для продольных волн

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{Ka\rho_0}. \quad (109)$$

Для мощности, переносимой бегущей волной, имеем (в эрг/сек)

$$P(z, t) = Z \left[\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{Z} \left[-Ka \frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} \right]^2. \quad (110)$$

Величина $\psi(z, t)$ представляет собой смещение от положения равновесия точки z на струне. Она положительна, если смещение происходит в направлении $+z$. Соответствующая этому смещению скорость равна $\partial\psi(z, t)/\partial t$. Величина $-Ka \partial\psi(z, t)/\partial z$ представляет

собой силу, действующую на пружину в направлении $+z$ и приложенную справа от точки z . Если к этой силе прибавить силу F_0 , определяемую начальным натяжением, мы получим полную силу, действующую на точку z в направлении $+z$ (см. задачу 4.29):

$$F_z(L, R) = F_0 - Ka \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z}. \quad (111)$$

Сила F_0 в выражении (111) возникает из-за сжатия или растяжения пружины в положении равновесия. Она не дает вклада в волну. Действительно, в выражении (110) входит лишь избыток полной силы над F_0 , а именно $-Ka \partial \psi / \partial z$.

Пример 10. Звуковые волны. Для рассмотрения звуковых волн мы воспользуемся моделью Ньютона (см. п. 4.2). Система показана на рис. 4.10.

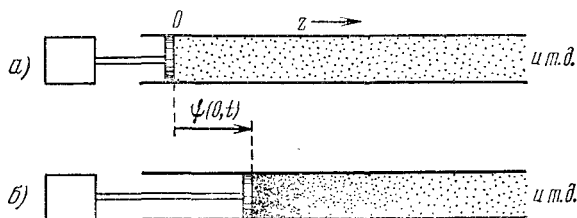


Рис. 4.10. Испускание продольных звуковых волн.
а) Равновесие; б) конфигурация в общем случае.

В п. 4.2, используя предложенную Ньютоном аналогию между звуковыми волнами и продольными волнами в струне, мы нашли фазовую скорость звука. Из модели Ньютона следует, что равновесную линейную плотность для струны следует заменить на равновесную объемную плотность воздуха, а произведение Ka для струны — на произведение равновесного давления p_0 на константу γ . Теперь нам нетрудно написать выражения для импеданса и энергии звуковых волн. Для этого нужно в соответствующих выражениях для продольных волн в пружине заменить Ka на γp_0 . Из равенств (109) и (110) мы получаем

$$v_\phi = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}. \quad (112)$$

Величина потока энергии в бегущей звуковой волне [в единицах $\text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{сек})$] равна

$$I(z, t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{Z} \left[-\gamma p_0 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right]^2. \quad (113)$$

Величина $\psi(z, t)$ представляет собой смещение «небольшого объема воздуха» (в направлении z) от равновесного положения z . Величина $\partial \psi(z, t) / \partial t$ — это соответствующая скорость рассматриваемого объема. Величина $-\gamma p_0 \partial \psi(z, t) / \partial z$ равна силе, действующей на единицу площади в направлении $+z$. Это сила, с которой воздух слева от z действует на воздух справа от z . Суперпозиция этой силы с силой p_0 , действующей в равновесном состоянии, определяет ре-

зультирующую силу в направлении $+z$ (напомним, что координата z соответствует равновесному, а не мгновенному положению):

$$\frac{F_z(L, P)}{A} = p_0 - \gamma p_0 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z}. \quad (114)$$

Это выражение следует из (111) при замене F_0 на p_0 и Ka на γp_0 . Равновесное давление p_0 никак не влияет на волну. Мы будем называть величину $-\gamma p_0 \partial \psi / \partial z$ *звуковым давлением*:

$$p_{зв} = -\gamma p_0 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z}. \quad (115)$$

Для воздуха при нормальных условиях имеем $p_0 = 1 \text{ атм} = 1,01 \times 10^6 \text{ дин/см}^2$ и $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$. Тогда из выражений (112) получаем

$$v_\psi = 3,32 \cdot 10^4 \text{ см/сек}, \quad (116)$$

$$Z = 42,8 \frac{\text{дин/см}^2}{\text{см/сек}}. \quad (117)$$

Единица интенсивности звука. Интенсивность бегущих звуковых волн определяется как энергия, переносимая через единичную площадь в единицу времени. Обычно за единицу интенсивности звука принимают величину

$$I_0 = 1 \text{ мквт/см}^2 = 10 \text{ эрг/(см}^2 \cdot \text{сек)}, \quad (118)$$

где $1 \text{ мквт} = 10^{-6} \text{ вт}$, а $1 \text{ вт} = 10^7 \text{ эрг/сек}$. Речь, ведущаяся в умеренном тоне, соответствует испусканию около 100 эрг/сек звуковой энергии. Площадь отверстия рта во время речи близка к 10 см^2 . Поэтому, если вы говорите в один конец трубы, так что вся энергия переносится в направлении z , то интенсивность звука будет близка к $(100 \text{ эрг/сек})/10 \text{ см}^2 = I_0$. Чтобы почувствовать эту величину, послушайте что-нибудь через короткую трубу. (В длинной трубе звук будет ослабляться из-за трения о стенки и из-за испускания звуковых волн боковыми поверхностями трубы.) Если кричать в трубу как можно громче, то интенсивность будет порядка $100 I_0$. При интенсивности между $100 I_0$ и $1000 I_0$ возникают болезненные ощущения в ухе.

Интенсивность самого слабого звука, который может быть услышан, зависит от частоты. При частоте 440 гц порог слышимости «среднего человека» близок к $10^{-10} I_0$. Таким образом, человеческое ухо работает в колоссальном динамическом диапазоне интенсивности, занимающем 12 порядков (от $100 I_0$ до $10^{-10} I_0$).

Терминология; децибел. Когда интенсивность звука возрастает в 10 раз, то говорят, что она возросла на 1 бел . Таким образом, динамический диапазон человеческого уха близок к 12 бел . Увеличение интенсивности в $10^{0,1}$ раз означает увеличение в $0,1 \text{ бел}$, или 1 децибел . Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ дб} — \text{изменение интенсивности в } 10^{0,1} = 1,26 \text{ раза,} \\ 1 \text{ бел} — \text{изменение интенсивности в } 10 \text{ раз.} \end{array} \right\} \quad (119)$$

Люди с нормальным слухом могут обнаружить увеличение громкости, не меньшее 1 дб.

Ниже даны задачи (а—д) на вычисления звукового импеданса и потока.

а) *Среднеквадратичное значение звукового давления при болезненных ощущениях.* Интересно получить представление о величине звукового давления (в атмосферах), вызывающего у человека болезненное ощущение, и выяснить, имеет ли оно ту же природу, что и боль в ухе, возникающая при погружении в воду на глубину около 5 м. При погружении на 10 м давление увеличивается на 1 атм, соответственно на глубине 5 м давление возрастет на $1/2$ атм. Сравним с этой величиной давление звука, вызывающего болезненные ощущения.

Решение. Будем считать, что болезненные ощущения возникают при интенсивности $I=1000 I_0$. В соответствии с уравнением (113) имеем

$$\langle p_{зв}^2 \rangle^{1/2} = (ZI)^{1/2} = (1000ZI_0)^{1/2} = [(1000)(42,8)(10)]^{1/2} = 650 \text{ дин/см}^2.$$

Эта величина в 1500 раз меньше давления в 1 атм = $1,01 \cdot 10^6$ дин/см². Из нашей оценки видно, что болезненные ощущения не являются следствием большого давления. Давление 600 дин/см² равно 6×10^{-4} атм и «соответствует» погружению на глубину около 0,5 см.

б) *Амплитуда звука при болезненных ощущениях.* Вычислим амплитуду колебаний молекул воздуха для болезненно громкого звука. Пусть $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$. Тогда производная $\partial\psi/\partial t$, возведенная в квадрат и усредненная по одному циклу (при фиксированном z), будет равна $1/2 \omega^2 A^2$. Используя уравнение (113) и предполагая, что частота равна 440 гц, имеем

$$A = \frac{(2 I/Z)^{1/2}}{\omega} = \frac{(2 \cdot 1000 \cdot 10/42,8)^{1/2}}{(6,28)(440)} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ см} = \frac{1}{4} \text{ мм}.$$

в) *Амплитуда едва слышимого звука.* Вычислим амплитуду колебаний у порога слышимости. Положим интенсивность звука равной $10^{-10} I_0$. Амплитуда пропорциональна корню квадратному из I . Для частоты 440 гц искомая амплитуда будет равна корню квадратному из 10^{-13} , умноженному на результат, полученный в предыдущем приложении, где мы считали $I=1000 I_0$. Имеем

$$A = 10^{-6,5} (2,5 \cdot 10^{-2}) = \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{10}} \approx 10^{-8} \text{ см}.$$

Это — величина порядка диаметра атома. Таким образом, наше ухо настолько чувствительно, что может воспринимать смещения барабанной перепонки, равные диаметру атома!

г) *Мощность на выходе высококачественного громкоговорителя.* Оценим величину мощности на выходе высококачественного громкоговорителя. Предположим, что с помощью этого громкоговорителя озвучивается длинная комната, имеющая отражающие боковые стенки и поглощающую звук заднюю стенку. Пусть интенсивность звука равна $100 I_0$, а поперечное сечение ком-

наты $3 \text{ м} \times 3 \text{ м} \approx 10^5 \text{ см}^2$. Можно считать, что в том месте, где установлен громкоговоритель, он воздействует на целую стенку, которая и передает излучение, или что в этой части комнаты имеется постепенно сужающийся к громкоговорителю рупор. Это нужно для согласования импедансов громкоговорителя и комнаты (согласование импедансов рассмотрено в главе 5). Выходная мощность равна

$$P = l \times (\text{площадь}) = 100 I_0 \cdot 10^5 = 10^7 \text{ мквт} = 10 \text{ вт}.$$

д) Совместное действие двух звуков, интенсивность которых близка к болезненной. Предположим, что человек еще может терпеть боль при интенсивности $100 I_0$ при частоте 440 гц, но боль трудно переносима при интенсивности $200 I_0$ и той же частоте. Предположим, что то же справедливо и для частоты 512 гц. Пусть две ноты А440 и С512 звучат одновременно и интенсивность каждой будет $100 I_0$. Сможет ли человек выдержать их одновременное звучание? Полная интенсивность в этом случае равна $200 I_0$.

Мы надеемся, что теперь у вас достаточно знаний, чтобы разобраться в ряде интересных задач о звуке. Мы не рассматривали стоячих звуковых волн. Их поведение аналогично стоячим продольным волнам в «пружине». Теперь вам следует перейти к домашним опытам, касающимся звука. Мы надеемся, что они не вызовут затруднений.

Пример 11. Бегущие волны в передающей линии. Линия, о которой идет речь, показана на рис. 4.11. Вынуждающая сила

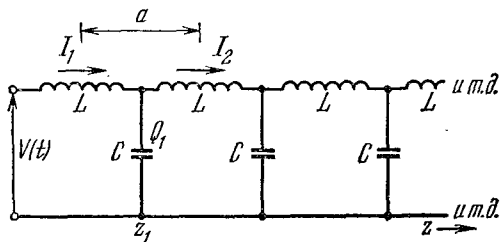


Рис. 4.11. Бегущие волны в передающей линии.

представляет собой напряжение $V(t)$, приложенное в начале линии (точка $z=0$). Будем рассматривать приближение длинных волн, когда $V(z, t)$ и $I(z, t)$ — непрерывные функции z . Если передающая линия бесконечно длинная (или нагружена на полностью поглощающий приемник), то мы имеем открытую систему, в которой распространяются бегущие волны напряжения $V(z, t)$ и тока $I(z, t)$. Если вынуждающая сила $V(t)$ на входном конце имеет вид

$$V(t) = V_0 \cos \omega t, \quad (120)$$

то волна напряжения $V(z, t)$ в точке $z=0$ равна $V_0 \cos \omega t$, и мы можем записать

$$V(z, t) = V_0 \cos(\omega t - kz). \quad (121)$$

Мы хотим найти связь между $V(z, t)$ и $I(z, t)$. Оказывается, что (для бегущих волн) эти величины пропорциональны друг другу (между ними нет сдвига фаз). Предположим, что выражение для $I(z, t)$ имеет вид

$$I(z, t) = I_0 \cos(\omega t - kz) + J_0 \sin(\omega t - kz). \quad (122)$$

Мы покажем, что J_0 равно нулю.

Рассмотрим первую емкость на рис. 4.11. Заряду этой емкости $Q_1(t)$ соответствует разность потенциалов $V_1(t)$:

$$Q_1(t) = CV_1(t) = CV(z_1, t). \quad (123)$$

Тогда

$$C \frac{\partial V(z_1, t)}{\partial t} = \frac{dQ_1}{dt} = I_1 - I_2 = -(I_2 - I_1) = -a \frac{\partial I(z_1, t)}{\partial z}.$$

В последнем равенстве мы использовали непрерывное приближение. Таким образом,

$$\frac{\partial V(z_1, t)}{\partial t} = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} \frac{\partial I(z_1, t)}{\partial z}. \quad (124)$$

Подставляя уравнения (121) и (122) в уравнение (124), мы видим, что постоянная J_0 в уравнении (122) должна равняться нулю. После подстановки получаем

$$-\omega V_0 \sin(\omega t - kz) = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} I_0 k \sin(\omega t - kz),$$

т. е.

$$V_0 = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\Phi} I_0, \quad (125)$$

откуда

$$V(z, t) = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\Phi} I(z, t) = ZI(z, t) \quad (126)$$

по определению Z . Таким образом, фазовая скорость и характеристический импеданс (для линии с распределенными параметрами) равны

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{(C/a)^{-1}}{(L/a)}}, \quad (127)$$

$$Z = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\Phi} = \sqrt{\left(\frac{L}{a}\right)\left(\frac{C}{a}\right)^{-1}}. \quad (128)$$

Мгновенное значение мощности на выходе передатчика (в точке $z=0$) равно

$$P(t) = V(t) I(t) = V(0, t) I(0, t) = ZI^2(0, t). \quad (129)$$

Эту мощность можно записать иначе:

$$P(t) = V(0, t) I(0, t) = \frac{V^2(0, t)}{Z}. \quad (130)$$

Заметим, что мы могли бы получить выражение для Z простой заменой K на C^{-1} и M на L в результате, полученном при рассмотрении продольных колебаний системы масс и пружин. Однако из-за важности этого примера мы рассмотрели его отдельно.

Пример 12. *Передающая линия из параллельных пластин.* Этот важный пример приведет нас к весьма общему результату. В соответствии с уравнениями (55) и (59) (п. 4.2) погонные емкость и индуктивность для передающей линии из параллельных пластин (между пластинами вакуум) равны

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g}, \quad \frac{L}{a} = \frac{4g}{wc^2}. \quad (131)$$

Здесь w — ширина пластин, а g — расстояние между пластинами. Характеристический импеданс [см. уравнение (128)] равен

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \quad (132)$$

(Здесь Z выражено в единицах СГСЭ.)

Испускаемая мощность определяется уравнением (130):

$$P(t) = \frac{1}{Z} V^2(0, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{w}{g} V^2(0, t). \quad (133)$$

Выразим мощность через напряженность электрического поля E_x (компоненты электрического поля E_y и E_z равны нулю), которая определена в каждой точке между пластинами. Имеем

$$V(0, t) = gE_x(0, t). \quad (134)$$

Подставляя (134) в (133), имеем

$$P(t) = \frac{c}{4\pi} wgE_x^2(0, t). \quad (135)$$

Заметим, что wg — поперечное сечение передающей линии. Разделив уравнение (135) на wg , получим интенсивность излучения [в эрг/(см²·сек)], которую для электромагнитных волн удобно обозначить через S (символ I занят для обозначения тока). Вспомнив наш опыт со струнами и звуковыми волнами, мы можем говорить об интенсивности в точке z , заменив в уравнении $z=0$ на z . Для бегущих плоских электромагнитных волн, распространяющихся в направлении z в передающей линии из параллельных пластин, энергия, переносимая за секунду через площадь в 1 см², равна интенсивности излучения:

$$S(z, t) = \frac{c}{4\pi} E_x^2(z, t). \quad (136)$$

Найдем теперь отношение не равной нулю компоненты магнитного поля $B_y(z, t)$ (компоненты B_x и B_z равны нулю) к $E_x(z, t)$. Мы можем его найти, зная, что $V(z, t)$ и $I(z, t)$ связаны через Z , и зная, как связаны V и E_x , B_y и I . Имеем

$$V = ZI,$$

т. е.

$$gE_x = \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w} I. \quad (137)$$

В соответствии с уравнением (57) (п. 4.2) имеем

$$\omega B_y = \frac{4\pi}{c} I. \quad (138)$$

Сравнивая уравнения (137) и (138), мы видим, что для бегущей плоской электромагнитной волны, распространяющейся в передающей линии из параллельных пластин в направлении $+z$, электрическое и магнитное поля в любой точке z и в любое время перпендикулярны друг другу и направлению распространения, равны по величине, а их знаки таковы, что векторное произведение $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ совпадает с направлением распространения волны. Короче:

$$E_x(z, t) = B_y(z, t). \quad (139)$$

Плоские электромагнитные волны в прозрачной среде. Предположим, что передающая линия заполнена веществом с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ . Приложенное напряжение равно $V(t)$. Испускаемая мощность равна

$$P(t) = \frac{V^2}{Z},$$

где

$$V = gE_x \text{ и } Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Z_{\text{вакуум}},$$

т. е.

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \quad (140)$$

Из этих трех уравнений получаем интенсивность $S = P/gw$:

$$S(z, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{c}{4\pi} E_x^2(z, t). \quad (141)$$

Найдем также отношение B_y к E_x . При заданном токе I магнитное поле должно возрасти в μ раз:

$$\omega B_y = \mu \frac{4\pi}{c} I,$$

но

$$V = ZI,$$

т. е.

$$gE_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w} I.$$

Сравнивая полученные выражения для E_x и B_y , имеем

$$\frac{B_y}{E_x} = \sqrt{\epsilon\mu},$$

т. е.

$$B_y = \sqrt{\epsilon\mu} E_x = nE_x. \quad (142)$$

Плоские электромагнитные волны в безграничном вакууме. Уравнения (136) и (139), справедливые для вакуума,

$$S(z, t) = \frac{c}{4\pi} E_x^2(z, t), \quad B_y(z, t) = E_x(z, t), \quad (143)$$

были выведены для электромагнитных волн, которые возникают от волн тока и напряжения в прямой параллельной передающей линии. Рассмотренную линию можно считать однородной (предполагается, что краевые эффекты отсутствуют). Электрическое и магнитное поля $E_x(z, t)$ и $B_y(z, t)$ тоже однородны, т. е. при достаточной ширине пластин линии ω , когда краевыми эффектами можно пренебречь, E_x можно считать одинаковым для всех значений x и y (для заданных z и t); то же справедливо для B_y . Такие волны называются *плоскими*. Любая плоскость, перпендикулярная оси z (оси, вдоль которой распространяются волны), является плоскостью постоянной фазы, т. е. в этой плоскости $(\omega t - kz) = \text{const}$. Такая плоскость называется *волновым фронтом*.

Существует несколько способов получения бегущих плоских электромагнитных волн. Один способ, связанный с использованием передающей линии из параллельных пластин, мы только что рассмотрели. Источником плоских электромагнитных волн может быть и точечный источник (например свеча, уличный фонарь или звезда), если только наблюдать волны на достаточно далеком расстоянии от источника. (В следующей главе мы установим, при каких размерах источника его можно считать точечным.) В этом случае все излучение в области вблизи наблюдателя распространяется в определенном направлении при условии, что эта область не слишком велика. (Дальше мы установим критерии «не слишком большой» области. Они зависят от характера выполняемых опытов.) Выражения (143) описывают локальные свойства электромагнитных плоских волн (это утверждение кажется правдоподобным, но в следующей главе мы докажем его, исходя из уравнений Максвелла) и не зависят от граничных условий, т. е. от конфигураций тока и заряда, которые ответственны за электромагнитное излучение. Разумеется, тот факт, что у вектора \mathbf{E} есть только составляющая E_x , зависит от начальных условий, связанных с геометрией передающей линии.

Теперь мы сформулируем важные результаты, заключенные в выражениях (143), в более общем виде.

Бегущие электромагнитные плоские волны, распространяющиеся в направлении $+\hat{z}$ в вакууме, обладают следующими свойствами (не все из них независимы):

1. $\mathbf{E}(z, t)$ и $\mathbf{B}(z, t)$ перпендикулярны \hat{z} и друг другу.
2. $\mathbf{E}(z, t)$ и $\mathbf{B}(z, t)$ равны по величине.
3. Направления $\mathbf{E}(z, t)$ и $\mathbf{B}(z, t)$ таковы, что вектор $\mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{B}(z, t)$ направлен вдоль $+\hat{z}$.
4. Первые три свойства означают, что $\mathbf{B}(z, t) = \hat{z} \times \mathbf{E}(z, t)$, что эквивалентно соотношениям $B_y(z, t) = E_x(z, t)$ и $B_x(z, t) = -E_y(z, t)$.

5. Фазовая скорость равна c и не зависит от частоты, т. е. электромагнитные волны в вакууме — не диспергирующие волны.

6. Мгновенная интенсивность (в единицах $\text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{сек})$) равна

$$S(z, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2(z, t) = \frac{c}{4\pi} [E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t)]. \quad (144)$$

Для этой величины используют также синонимы: интенсивность, поток, поток энергии.

Приведенные выше соотношения очень важны и являются совершенно общими. Они справедливы для всех частот, например от частоты $\nu=1$ цикл в 100 000 лет (ей соответствует длина волны c/ν в 100 000 световых лет, что примерно равно диаметру нашей Галактики) до частот порядка $\nu \approx 3 \cdot 10^{25}$ *гц*, которым соответствует длина волны порядка 10^{-15} *см* или энергия фотона $h\nu$ порядка 100 *Гэв*.

П р и л о ж е н и е. *Определение солнечной постоянной.* Этот пример иллюстрирует понятие о потоке энергии и состоит из домашнего опыта и вычислений.

З а д а ч а (домашний опыт). Определить среднеквадратичное значение электрического поля бегущих волн солнечного света на земной поверхности.

Р е ш е н и е. (Данный опыт связан с рядом приближений и допущений, что накладывает некоторые ограничения на полученный результат. Такое замечание, впрочем, можно сделать по поводу любого опыта.) Возьмите 200—300-ваттную осветительную лампу с прозрачным баллоном (т. е. не матовую) и нитью не длиннее 2,5 *см*. Теперь закройте глаза. Приблизьте зажженную лампу к лицу. Ваши веки почувствуют тепло, созданное поглощением невидимого инфракрасного излучения лампы, а закрытые веками глаза (*веки играют роль фильтров*) ощутят красноту, обусловленную проникающим через веки светом. Выключите лампу и выйдите на улицу (предположим, что день солнечный). «Посмотрите» закрытыми глазами на солнце. Вы опять ощутите теплоту на веках и «красноту» солнечного света, проникающего через веки. Вернемся к электрической лампе. Найдите расстояние R от век до нити, на котором свет от лампы вызывает те же тепловые и цветовые ощущения, что и свет солнца. На этом заканчивается экспериментальная часть задачи. Остались вычисления. Будем считать, что нить излучает одинаково во всех направлениях, и вычислим (зная мощность лампы P и расстояние R) поток энергии S , падающий на веки. Легко видеть, что поток S (т. е. средняя во времени интенсивность излучения, попадающего на веки) равен

$$\langle S(z, t) \rangle \equiv S = \frac{P}{4\pi R^2}. \quad (145)$$

Из условий нашего опыта следует, что этой же величине равна средняя во времени интенсивность солнечного света, падающего на веки. Разумеется, все это относится к воспринимаемому в данном опыте нашим глазом участку спектра (в него входит также часть инфракрасной области спектра, воспринимаемой веками). Предположим

далее, что спектр излучения лампы и солнца примерно одинаков. Тогда мы можем, воспользовавшись выражением (145), оценить полный поток от солнца. Величина S называется солнечной постоянной и приведена в справочниках физических констант. Вы найдете там, что S равно 1,94 калории на 1 см^2 в одну минуту. Напомним, что $1 \text{ кал} = 4,18 \text{ дж}$ и что $1 \text{ дж/сек} = 1 \text{ вт}$.

Таким образом, в привычных нам единицах солнечная постоянная на границе атмосферы Земли равна

$$S = \frac{(1,94)(4,18) \text{ дж}}{60 \text{ сек}} = 135 \text{ вт/см}^2. \quad (146)$$

Воспользовавшись этой величиной, найдем среднеквадратичное значение электрического поля в в/см :

$$S = 0,135 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}} = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle,$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{(12,57)(0,135 \cdot 10^7)}{3 \cdot 10^{10}} = 5,6 \cdot 10^{-4},$$

$$\langle E^2 \rangle^{1/2} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ ед. СГСЭ}_V.$$

Но

$$1 \text{ ед. СГСЭ}_V = 300 \text{ в},$$

таким образом,

$$\langle E^2 \rangle^{1/2} = 7,2 \text{ в/см}. \quad (147)$$

Измерение потока энергии электромагнитного излучения. В приведенном выше примере глаза и веки были использованы для определения солнечной постоянной. Разумеется, это далеко не типичные детекторы излучения. Заметим, что, по-видимому, их можно считать квадратичными детекторами. Действительно, ведь они не чувствительны к фазе регистрируемых колебаний. (Вспомним, что ухо также является квадратичным детектором звука.) Для подобных детекторов величиной, описывающей падающий поток, является не мгновенное значение потока $S(z, t)$, а скорее среднее по времени значение потока за один цикл колебаний:

$$S \equiv \langle S(z, t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle E^2(z, t) \rangle \quad (148)$$

(для плоской волны средняя по времени интенсивность не зависит от z).

Обычно квадратичный детектор содержит в себе широкополосный фильтр (который пропускает излучение только в определенной полосе частот), соединенный со входом «датчика», воспринимающего падающий поток с минимальными потерями на отражение. Выходной сигнал датчика пропорционален величине поглощенной энергии (или по крайней мере зависит от нее). Очень часто в таких детекторах в качестве чувствительного элемента, поглощающего энергию, используется чувствительный *калориметр*. Величину поглощенной в единицу времени энергии можно определить, измеряя либо скорость возрастания температуры поглотителя, либо равновесное превышение температуры чувствительного элемента над температурой окружающей среды (которая может быть весьма

низкой, если в качестве среды взят, например, жидкий гелий). В последнем случае равновесие поддерживается постоянной утечкой тепла от чувствительного элемента к окружающей среде. Такой детектор должен содержать устройство для калибровки, которое заключается в том, например, что детектор изолируют от внешнего излучения и пропускают в течение определенного времени t известный ток по эталонному сопротивлению R , вмонтированному в чувствительный элемент детектора. Таким способом можно определить энергию (I^2Rt), рассеянную сопротивлением. Эта энергия должна быть равна поглощенной детектором энергии, которая вызывает такое же повышение температуры относительно окружающей среды, как и ток, пропущенный по сопротивлению. Детекторы такого типа имеют много различных модификаций.

К другому классу детекторов относится *счетчик фотонов*, каким является, например, фотоумножитель. Когда фотон падает на катод фотоумножителя, он выбивает из него один электрон. Этот электрон ускоряется разностью потенциалов около 100 в и при столкновении с первым электродом (он называется динодом) создает несколько (обычно 3—4) вторичных электронов. Выбитые из первого динода электроны снова ускоряются и попадают на второй динод, где каждый из них выбивает 3—4 или большее число электронов, и т. д. В результате один фотон, попавший на фотокатод умножителя, вызывает появление после десятого динода около $(3,5)^{10}$ электронов. Эти электроны собираются на аноде фотоумножителя. Проходя через сопротивление, соединенное с анодом, они образуют импульс напряжения. Такие импульсы могут быть записаны и сосчитаны. Каждый импульс соответствует *поглощению одного фотона, который имеет энергию $h\nu$* (ν — частота колебаний, h — постоянная Планка). *Эффективность фотоумножителя* для фотонов частоты ν можно определить с помощью эталонного источника излучения. *Средняя скорость счета R* за интервал времени t_0 определяется как отношение числа N сосчитанных за это время событий к величине t_0 :

$$R = \frac{N \pm \sqrt{N}}{t_0}. \quad (149)$$

Указанная здесь ошибка $\pm\sqrt{N}$ является мерой статистической неопределенности опыта. Зная величину R и эффективность детектора $e(\nu)$, можно определить поток энергии S . Эти величины связаны соотношением

$$R = \left(\frac{S}{h\nu} \right) Ae(\nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{c}{4\pi} \langle E^2(z, t) \rangle Ae(\nu), \quad (150)$$

где A — площадь фотокатода (в $см^2$), S — усредненная по времени интенсивность, т. е. поток энергии [в $эрг/(см^2 \cdot сек)$], $S/h\nu$ — средний во времени поток фотонов [в единицах $фотон/(см^2 \cdot сек)$] и $e(\nu)$ — эффективность детектора к излучению данной частоты.

Эффективность детектора представляет собой вероятность того, что падающий на фотокатод электрон будет поглощен, образовав

при этом хотя бы один фотозлектрон. Обычно эффективность фотомножителей лежит в пределах $1 \div 20\%$.

Примером неквадратичного детектора может служить система из приемной антенны, резонансной схемы, на которую подается напряжение, наведенное на антенне, усилителя и осциллографа. На экране осциллографа можно наблюдать мгновенные значения фазы и интенсивности излучения от удаленного передатчика. Фазу электромагнитной волны можно измерить с неограниченной точностью, если существует поток большого числа фотонов, при котором эффект от действия отдельного фотона незаметен. В этом случае вы можете наблюдать зависимость электрического поля от времени. Для одного фотона нельзя определить фазовую константу φ в световой волне, описываемой зависимостью $E_x = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$.

Эталон силы видимого света — стандартная свеча. В Палате мер и весов хранится эталон силы света, который называется *свечой*. Мы не будем описывать сложное устройство этого эталона. Укажем, что яркость стандартной эталонной свечи сравнима с яркостью обычной свечки. Полная мощность излучения, испускаемого эталонной свечой в полосе частот видимого света, равна $20,3 \text{ мвт}$:

$$1 \text{ св} \approx 20 \text{ мвт} \text{ видимого света.} \quad (151)$$

Представим себе точечный источник видимого света силой в 1 св . Он равномерно излучает по всем направлениям. Световой поток, испускаемый таким источником в единице телесного угла, равного одному стерадиану, называется *люменом*.

Поверхностная яркость. Каждая часть поверхности пламени обычной свечи испускает свет во всех направлениях. При этом поверхность свечи кажется одинаково яркой независимо от того, с какого расстояния вы за ней наблюдаете. То же справедливо, например, для Луны, для листа белой бумаги и приблизительно справедливо для поверхности неоновой лампы накаливания. *Поверхностная яркость* или просто *яркость* определяется как световой поток в направлении, перпендикулярном поверхности, испускаемый с единичной площади. Эта величина может измеряться в ваттах видимого света или в свечах, отнесенных к единичной площади. Пламя обычной свечи имеет площадь порядка 2 см^2 , и испускаемый ею световой поток близок к 1 св . Таким образом, яркость пламени свечи имеет порядок:

$$\text{Поверхностная яркость свечи} \approx \frac{1 \text{ св}}{2 \text{ см}^2} = 0,5 \frac{\text{св}}{\text{см}^2}. \quad (152)$$

Обычная 40-ваттная 127-вольтная лампа с вольфрамовой нитью накаливания имеет абсолютную световую эффективность около $1,8\%$, 100-ваттная лампа имеет эффективность $2,5\%$. Это значит, что лишь около $1,8\%$ от 40 вт приходится на ту часть спектра, которая ощущается глазом. Большая часть излучения лампы глазом не воспринимается и рассеивается в виде тепла. (Некоторая часть мощности теряется в месте соединения нити и цоколя, а часть излучения

инфракрасной области спектра поглощается стеклянным баллоном лампы. Действительно, даже чистый баллон, прозрачный для видимого излучения, быстро становится очень горячим.) Оценим яркость 40-ваттной лампы. Диаметр баллона лампы около 6 см. Если внимательно посмотреть на лампу, то можно убедиться, что ее яркость не однородна и уменьшается с расстоянием от центра. Этим яркость лампы отличается от яркости Луны или белого листа бумаги. Лампа кажется однородно яркой вблизи центра, в области сферы с радиусом около $r=1$ см, и за ее пределами яркость быстро падает. Поэтому наши оценки мы сделаем для сферической поверхности радиусом 1 см. Ее площадь $4\pi r^2=4\pi=12,6$ см². Яркость поверхности такой фиктивной сферы равна отношению «видимой» мощности к площади сферы. «Видимая» мощность равна произведению 40 вт на эффективность, равную 0,018. Ответ (в св/см²):

$$\begin{aligned} \text{Яркость поверхности 40-ваттной лампы} &= \\ &= \frac{(40)(0,018)}{(12,6)(20 \cdot 10^{-3})} = 2,8 \frac{\text{св}}{\text{см}^2}. \end{aligned} \quad (153)$$

Вы можете сравнить этот результат с яркостью лампы с вольфрамовой нитью, указанной в каком-нибудь справочнике физических констант. В заключение отметим, что наряду с обычными и матовыми лампами существуют лампы «мягкого белого света», которые дают практически однородную яркость по всей поверхности.

Почему при приближении к Луне она не кажется ярче? Попытаемся понять, почему яркость какой-либо поверхности, испускающей свет во всех направлениях (например, листа белой бумаги, или Луны, или Солнца, или голубого неба), не зависит от расстояния до этой поверхности. Предположим, что вы смотрите на стену, сплошь заполненную лампами «мягкого белого света». Пусть D — плотность ламп на стене в единицах «одна лампа на единицу площади стены». По определению яркость стены будет такой же, как яркость отдельной лампы. Далее, визуальное ощущение яркости зависит от величины световой энергии, попадающей на глаз (от источника) из «стандартного конуса» с вершиной в глазу и с некоторой угловой апертурой. В данный момент времени вы смотрите на небольшую часть яркой поверхности и ваше ощущение яркости зависит от энергии, попадающей на глаз с поверхности, ограниченной определенным конусом. Допустим, что расстояние от глаза до стены равно R и что ΔA — площадь стены, на которую вы смотрите. Телесный угол, под которым ваш глаз видит площадь ΔA , равен

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2}. \quad (154)$$

Площадь ΔA ориентирована перпендикулярно линии взгляда, и ее линейные размеры значительно меньше R . Данный угол $\Delta\Omega$ соответствует конусу с определенным углом раствора при вершине. *Ощущение яркости пропорционально энергии, попадающей на ваш глаз с поверхности, ограниченной некоторым определенным телесным углом.* Число ламп N внутри конуса с телесным углом $\Delta\Omega$ равно

плотности ламп D , умноженной на площадь ΔA :

$$N = D \Delta A = D \Delta \Omega \cdot R^2. \quad (155)$$

Теперь допустим, что вы удаляетесь от стены. Число ламп N , которое будет попадать в ваше поле зрения, пропорционально только R^2 , так как $\Delta \Omega$ и D постоянны. Однако интенсивность, которая определяет ощущение яркости для каждой отдельной лампы, уменьшается, как $1/R^2$, так как мощность лампы P равномерно распределена по площади $4\pi R^2$. Эти две причины нейтрализуют друг друга. Число ламп N , умноженное на $1/R^2$, есть величина постоянная. Таким образом, интенсивность S , попадающая на ваш глаз из конуса с телесным углом $\Delta \Omega$, постоянна:

$$S = \frac{NP}{4\pi R^2} = D \frac{\Delta \Omega}{4\pi} P \frac{srz}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}. \quad (156)$$

Мы показали, что стена, составленная из ламп, выглядит одинаково ярко как издали, так и вблизи. То же справедливо и для листа белой бумаги.

В приведенном рассуждении мы предполагали, что линия взгляда перпендикулярна стене с лампами. Допустим теперь, что стена с лампами наклонена под большим углом к линии взгляда. Можно думать, что чем больше ламп окажется в конусе, тем ярче будет наклоненная поверхность. Однако это не так: при наклоне стены лампы будут частично затемнять друг друга. Если взять две лампы и загородить одной другую, то загороженная лампа не даст вклада в освещенность. Излучающая поверхность двух перекрывающихся ламп не ярче, чем поверхность одной лампы.

Если осветить белую бумагу или соль или сахар, рассыпанный на некоторой поверхности, то свет проникнет на некоторую глубину. То же можно сказать о поверхности Луны, освещаемой Солнцем. Свет же, излучаемый с поверхности, многократно рассеян. Полный вклад в освещенность в этом случае будет таким же, как если бы мы имели дело с многослойными стенками, состоящими из ламп «мягкого белого света». Чтобы убедиться в том, что значительная часть испускаемого света может приходиться с глубины, положите лист белой папиросной бумаги на черную поверхность. Добавьте второй, третий листы и т. д. По мере добавления листов бумага будет казаться все более белой.

Освещенность. Освещенность определяется как световой поток, приходящийся на единицу освещаемой поверхности. Освещенность, создаваемая данным источником, пропорциональна его яркости и телесному углу, под которым он виден с освещаемой поверхности. Например, если бы диаметр Луны увеличился вдвое, то яркость ее поверхности не изменилась бы (яркость Луны определяется освещением ее Солнцем), но телесный угол, под которым Луна видна с Земли, возрос бы в четыре раза. Поэтому световой поток на Землю и ее освещенность стали бы в четыре раза больше. Освещенность

имеет размерность $\text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{сек})$. Ее измеряют обычно в люменах на квадратный метр. Эта единица освещенности называется люксом.

В качестве примера заметим, что в США и Англии иногда пользуются другой единицей освещенности. Это освещенность, создаваемая точечным источником силой в 1 св на расстоянии в один фут. Такая единица освещенности называется *фут-свечой*. Из выражения (151) легко получить (сделайте это сами), что

$$1 \text{ фут-св} \approx 1,8 \text{ мквт}/\text{см}^2. \quad (157)$$

Приложение 1. Сравнение освещенности от 40-ваттной лампы и от Луны. В табл. 4.3 приведена яркость ряда важных источников света. Мы видим, что яркость неба и свечи одинакова:

Таблица 4.3

Яркость поверхности различных источников света

Поверхность	Яркость поверхности, св/см ²
Свеча	0,5
40-ваттная матовая лампа	2,5
Чистое небо	0,4
Луна	0,25
Солнце	160 000
40-ваттная прозрачная лампа	200

свечу с трудом можно заметить на фоне голубого неба. Только различие голубого цвета неба и желтого пламени свечи позволяет ее обнаружить. Рассмотрим такую задачу: на каком расстоянии R 40-ваттная матовая лампа с «эффективным» диаметром 2 см создаст ту же освещенность, что Луна? Из табл. 4.3 следует, что яркость поверхности лампы в 10 раз больше яркости полной Луны. Ту же освещенность, что и Луна, эта лампа создаст в телесном угле, равном $1/10$ от телесного угла, под которым Луна видна с Земли. Поэтому угловой диаметр лампы должен составлять $1/\sqrt{10} = 1/3,2$ от углового диаметра Луны. Последний равен

$$\frac{\text{Диаметр Луны}}{\text{Расстояние от Земли до Луны}} = 1/100 \text{ рад.}$$

Таким образом, чтобы освещенность от Луны была равна освещенности от лампы, последняя должна быть видна под углом $1/320$ рад. Имеем $1/320 = 2 \text{ см}/R$, откуда $R = 6,4 \text{ м}$; 40-ваттная лампа на расстоянии 6,4 м даст ту же освещенность, что Луна. Это справедливо как для матовой, так и для обыкновенной лампы. Обыкновенная лампа будет только выглядеть ярче, но создаст ту же освещенность.

Приложение 2 (добавлено редактором перевода). В заключение этого раздела, посвященного измерению световых потоков, рассмотрим выполненную Ньютоном около 300 лет назад оценку расстояния до «неподвижных» звезд. Эта оценка основана на хорошо известном Ньютоном экспериментальном факте, который зак-

лючается в том, что освещенность, создаваемая в фокальной плоскости телескопа планетой Сатурн (она светит отраженным светом Солнца), близка к освещенности от некоторых звезд, и на предположении, что эти звезды идентичны Солнцу. Приведем соответствующее место *) из произведения Ньютона «О системе мира», по видимому, представляющего собой предварительный вариант третьей книги «Математических начал натуральной философии» [см. немецкий перевод Вольферса (J. P. Wolfers «Mathematische Principien der Naturlehre, Berlin, 1872), стр. 551]:

«На диск Сатурна падает около $\frac{1}{2\ 100\ 000\ 000}$ части солнечного света **). Во столько же раз поверхность этого диска меньше сферической поверхности, радиус которой равен радиусу орбиты Сатурна. Предположим далее, что Сатурн отражает $\frac{1}{4}$ этого света. Тогда отраженный полусферой Сатурна свет будет составлять $\frac{1}{4\ 200\ 000\ 000}$ часть света, испущенного полусферой Солнца.

Уменьшение света обратно пропорционально второй степени расстояния до светящегося тела. Поэтому, если Солнце было бы на расстоянии от Земли в $10\ 000\ \sqrt{42}$ раз большем, чем Сатурн, оно оказалось бы таким же ярким, каким кажется Сатурн без своего кольца. Такое свечение немного превосходило бы свечение неподвижной звезды первой величины. Таким образом, расстояние, с которого Солнце светило бы, как неподвижная звезда, приблизительно в 100 000 раз больше расстояния до Сатурна. При этом его угловой диаметр был бы равен $7^{\text{IV}}\ 16^{\text{V}}$, а параллакс, созданный годичным движением Земли, составил бы 13^{III} . Таковы расстояния, угловой диаметр и параллакс звезд первой величины, которые равны нашему Солнцу по величине и свету».

К этому замечательному отрывку из книги Ньютона остается добавить перечень расстояний до нескольких ярких и сравнительно близких к нам звезд. Выраженные в расстояниях от Солнца до Сатурна, они приведены в таблице:

α Центавра	28 000
Сириус	58 000
Процион	75 000
Альтаир	101 000

Таким образом, не выходя из комнаты, по сравнению освещенностей Ньютон правильно оценил порядок расстояния до звезд.

*) Редактор благодарен И. Ю. Кобзареву, от которого он узнал об этой оценке.

**) В таблицах физических и химических констант (Кэй и Лэби, Физматгиз, 1962) вы найдете, что диаметр Сатурна равен $d=1,21 \cdot 10^5$ км, а его среднее расстояние от Солнца $R=1,43 \cdot 10^9$ км. Таким образом, Сатурн, рассматриваемый с Солнца, занимает $\frac{1}{4} \frac{\pi d^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{2\ 240\ 000\ 000}$ часть сферы. Это число близко к приведенному Ньютоном.