часть «амортизатора», его выход (относительное смещение входной и выходной частей «амортизатора» и создает затухание трения), закреплена на жестком основании. Того же результата мы достигли бы, присоединив выход «амортизатора» не к жесткому основанию, а к другой струне с бесконечно большой плотностью массы, простирающейся от $z=0$ до ∞. Импеданс такой струны равен бесконечности, и ситуация аналогична той, которая возникает при обрезании передающей линии и включении ее на согласованную нагрузку. Если вместо этого выход амортизатора присоединить к струне с импедансом Z_2, простирающейся от $z=0$ до ∞, то в $z=0$ импеданс для падающей волны будет равен импедансу параллельного соединения импедансов амортизатора и струны Z_2. Точно так же, как в случае передающей линии или пустого пространства, мы можем достичь согласования нагрузки для волн в струне либо соединив выход амортизатора с жестким основанием, либо соединив выход со струной, протяженностью в четверть волны; конец струны должен быть закреплен на кольце, скользящем без трения по стержню. Такое устройство имеет нулевой импеданс у стержня и бесконечный импеданс у выхода амортизатора. Этим будет обеспечена неподвижность выхода.

Другие методы согласования нагрузки. Не всегда легко достичь согласования «передающей линии» и «нагрузки». Если условия работы допускают применение распределенной нагрузки, занимающей заметный объем, то поглощение без отражения можно получить и не имея согласованной нагрузки с сосредоточенными параметрами, какой является, например, «эквивалент». Так, если мы хотим поглотить без отражения интенсивный пучок света, мы можем направить его в щель, сделанную в большом светонепроницаемом картонном ящике. Выложим изнутри стенки ящика черным материалом (поглотитель) и поставим в нем несколько перегородок, чтобы воспрепятствовать выходу света. Щель в ящике даже в яркий день будет выглядеть чернее любого черного тела, например сажи. Такая черная поверхность и совершенный «эквивалент» неразличимы по своему действию: излучение, попавшее в щель, не выходит обратно. Щель действует, как простирающаяся до бесконечности прозрачная среда (воздух).

5.3. Отражение и прохождение

Непрерывная струна. Предположим, что мы имеем полубесконечную струну, простирающуюся от $z=-\infty$ до $z=0$, с характеристическим импедансом, равным Z_1. В точке $z=0$ струна подсоединена к нагрузке, представляющей собой амортизатор, с импедансом Z_2 ($Z_2 \neq Z_1$). В точке $z=-\infty$ находится передатчик, генерирующий бегущую волну в направлении $+z$. Уравнение этой волны имеет вид

$$\psi_{\text{пад}}(z, t) = A\cos(\omega t - kz). \qquad (11)$$

Подставив сюда $z=0$, получим волну в точке $z=0$:

$$\psi_{\text{пад}}(0, t) = A\cos\omega t. \tag{12}$$

Отражение вследствие несогласованности импеданса нагрузки с импедансом линии. Последнюю точку струны обозначим L (именно эта точка струны подсоединена ко входу амортизатора), а вход поршня — через R. (Очевидно, что это условное обозначение, при котором одна и та же точка обозначена через L, если считается, что она принадлежит струне, или через R, если она принадлежит поршню.) Если бы импеданс амортизатора равнялся характеристическому импедансу струны Z_1, то мы имели бы случай линии, согласованной с нагрузкой, и отражения от конца линии не было бы. В этом случае граничная сила $F_{\text{гр}}$, действующая со стороны поршня (R) на струну (L), равна

$$F_{\text{гр}}(R, L) = -Z_1 \frac{\partial\psi_{\text{пад}}(0, t)}{\partial t}. \tag{13}$$

В действительности входной импеданс амортизатора Z_2 может быть не равен импедансу линии Z_1. Поэтому силу, действующую со стороны поршня на струну, можно в общем случае представить так:

$$F(R, L) = F_{\text{гр}}(R, L) + F_{\text{изб}}(R, L), \tag{14}$$

где $F_{\text{изб}}$ — так называемая избыточная сила. Оказывается, что эта сила ответственна за возникновение бегущей волны $\psi_{\text{отр}}(z, t)$, распространяющейся в направлении $-z$. В связи с этим мы можем считать, что в точке $z=0$ действует передатчик, который испускает бегущую волну в направлении $-z$. Далее, поскольку мы имеем дело с бегущей волной, должно быть справедливо соотношение

$$Z_1 \frac{\partial\psi_{\text{отр}}(0, t)}{\partial t} = F_{\text{изб}}(R, L). \tag{15}$$

Подставляя это уравнение в уравнение (14) для полной силы и учитывая уравнение (13), имеем

$$F(R, L) = -Z_1 \frac{\partial\psi_{\text{пад}}(0, t)}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial\psi_{\text{отр}}(0, t)}{\partial t}. \tag{16}$$

С другой стороны, полная реакция амортизатора, т. е. $F(R, L)$, равна, по определению (см. пример 1 п. 5.2), произведению скорости точки L на $-Z_2$. Скорость точки L равна суперпозиции скоростей от падающей и отраженной волны, т. е.

$$\frac{\partial\psi(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi_{\text{пад}}(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi_{\text{отр}}(0, t)}{\partial t}. \tag{17}$$

Таким образом, сила сопротивления движению поршня $F(R, L)$ равна

$$F(R,L) = -Z_2 \frac{\partial\psi(0, t)}{\partial t} = -Z_2 \frac{\partial\psi_{\text{пад}}(0, t)}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial\psi_{\text{отр}}(0, t)}{\partial t}. \tag{18}$$

Приравнивая правые части уравнений (16) и (18), находим для $z=0$

$$-Z_1 \frac{\partial\psi_{\text{пад}}}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial\psi_{\text{отр}}}{\partial t} = -Z_2 \frac{\partial\psi_{\text{пад}}}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial\psi_{\text{отр}}}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{\partial\psi_{\text{отр}}(0,\ t)}{\partial t} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right] \frac{\partial\psi_{\text{пад}}(0,\ t)}{\partial t}. \tag{19}$$

Коэффициент отражения. Проинтегрировав обе части уравнения (19) (считаем, что постоянные интегрирования равны нулю), получим

$$\psi_{\text{отр}}(0,\ t) = R_{12}\,\psi_{\text{пад}}(0,\ t) = R_{12} A \cos\omega t. \tag{20}$$

Величина R_{12} называется *коэффициентом отражения* для смещения ψ:

$$\boxed{R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}.} \tag{21}$$

Поскольку отраженная волна синусоидальная, то смещение в любой точке $z<0$ определится заменой $z=0$ и t на z и $t+z/v_ф$, где $v_ф$ — величина фазовой скорости:

$$\psi_{\text{отр}}(z,\ t) = R_{12} A \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_ф}\right)\right] = R_{12} A \cos(\omega t + kz). \tag{22}$$

Полное смещение $\psi(z,\ t)$ равно суперпозиции

$$\psi(z,\ t) = \psi_{\text{пад}}(z,\ t) + \psi_{\text{отр}}(z,\ t),$$

т. е.

$$\psi(z,\ t) = A\cos(\omega t - kz) + R_{12} A \cos(\omega t + kz). \tag{23}$$

Возвращающая сила и смещение отражаются с противоположными знаками. В случае поперечных колебаний струны физический интерес может представлять не только смещение $\psi(z,\ t)$, но и поперечная скорость $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$, а также поперечная составляющая натяжения $-T_0\,\partial\psi(z,\ t)/\partial z$, которая определяет возвращающую силу в струне. Из уравнений (19) и (20) следует, что волна скорости $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$ имеет тот же коэффициент отражения, что и волна смещения $\psi(z,\ t)$. Однако «волна возвращающей силы» $-T_0\partial\psi(z,\ t)/\partial z$ имеет коэффициент отражения, равный по величине коэффициенту отражения для волны скорости $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$, но *обратный по знаку*. Имеем

$$\psi_{\text{пад}} = A\cos(\omega t - kz), \quad \psi_{\text{отр}} = R_{12} A\cos(\omega t + kz), \tag{24}$$

$$\frac{\partial\psi_{\text{пад}}}{\partial t} = -\omega A\sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial\psi_{\text{отр}}}{\partial t} = R_{12}\left[-\omega A\sin(\omega t + kz)\right], \tag{25}$$

$$\frac{\partial\psi_{\text{пад}}}{\partial z} = kA\sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial\psi_{\text{отр}}}{\partial z} = -R_{12}\left[kA\sin(\omega t + kz)\right]. \tag{26}$$

Из уравнения (25) следует, что в точке $z=0$ скорость отраженной волны равна произведению R_{12} на скорость проходящей волны, а из уравнения (26) видно, что в точке $z=0$ возвращающая сила в отраженной волне равна произведению $-R_{12}$ на возвращающую силу в проходящей волне. Из уравнений (24), (25) и (26) следует, что для *коэффициента отражения* для ψ, $\partial\psi/\partial t$ и $\partial\psi/\partial z$ справедливы соотношения

$$R_{\psi}=R_{\partial\psi/\partial t}=R_{12}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_1}, \tag{27}$$

$$R_{\partial\psi/\partial z}=-R_{12}. \tag{28}$$

Заметим, что R_{12} лежит между -1 и $+1$.

Отражение на границе двух дисперсивных сред. Предположим, что струна простирается от $-\infty$ до 0 и имеет импеданс Z_1; в точке $z=0$ она подсоединена к струне с импедансом Z_2, которая простирается от 0 до ∞. Очевидно, что точка L слева от $z=0$ «не знает», является ли точка R справа от $z=0$ началом новой струны (линии) с импедансом Z_2 или же это «вход» амортизатора (т. е. его поршень) с импедансом Z_2. Поэтому коэффициенты отражения (27) и (28) будут также определять и отраженную волну в среде 1. (Среда 1 — это струна с импедансом Z_1, а среда 2 — струна с импедансом Z_2.) Заметим, что $R_{21}=-R_{12}$. Поэтому, если свойства сред взаимно изменятся, то коэффициент отражения изменит знак. Например, коэффициент отражения для волны смещения R_{ψ} отрицателен, если волна падает со стороны легкой струны на тяжелую (натяжение струн считается одинаковым), и положителен при обратном направлении распространения.

Проходящая волна на границе двух дисперсивных сред. В точке $z=0$ происходит отражение волны, приходящей из среды 1. Поскольку импедансы Z_1 и Z_2 не равны, то наряду с отраженной обратно в среду 1 волной должна существовать волна, прошедшая в среду 2. В связи с этим точку $z=0$, которая совершает колебания под действием силы, обусловленной падающей и отраженной волнами в среде 1, можно считать источником, испускающим бегущие волны в среду 2 (в направлении $+z$). Нас будет интересовать волна смещения ψ_2, волна поперечной скорости $\partial\psi_2/\partial t$ и волна возвращающей силы $-T_2\,\partial\psi_2/\partial z$, которые прошли во вторую среду и распространяются в ней. Чтобы найти эти волны, рассмотрим *граничные условия.*

Граничные условия и непрерывность. Для рассматриваемого случая граничные условия таковы, что смещение слева от границы раздела равно смещению справа от границы. Иными словами, *смещение* $\psi(z, t)$ *непрерывно. Непрерывны* также *скорость* $\partial\psi(z, t)/\partial t$ *и возвращающая сила* $-T_0\,\partial\psi(z, t)/\partial t$. В то время как непрерывность скорости и смещения на границе очевидна, непрерывность возвращающей силы требует некоторых замечаний. (Например, можно думать, что непрерывным должен быть наклон струны $\partial\psi(z, t)/\partial z$, а не произведение наклона на натяжение. Однако если на границе изменено натяжение, т. е. натяжение второй струны отлично от натяжения первой, то на границе может образоваться «изгиб».

В этом случае наклон не будет непрерывен, а произведение наклона на натяжение будет непрерывной функцией.) Чтобы убедиться в непрерывности возвращающей силы, рассмотрим бесконечно малый элемент массы в точке $z=0$. На этот элемент массы слева и справа действуют поперечные силы $-T_1\partial\psi_1/\partial z$ и $+T_2\partial\psi_2/\partial z$ соответственно. Суперпозиция этих сил равна произведению массы бесконечно малого элемента на его ускорение. Но масса элемента равна нулю. Поэтому равна нулю и суперпозиция:

$$-T_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+T_2\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0 \quad \text{в} \quad z=0.$$

Это уравнение и выражает непрерывность $T_0\partial\psi/\partial z$. (Заметим, что через T_0 мы обозначаем равновесное натяжение струны в общем случае, а через T_1 и T_2 — равновесные натяжения струны в среде 1 и среде 2.)

Коэффициент прохождения для амплитуды. Пусть $\varphi(z, t)$ соответствует любой из трех волн: смещению, скорости или возвращающей силе. В среде 1 волновая функция $\varphi(z, t)$ выражается суперпозицией

$$\varphi_1(z, t)=\varphi_0\cos(\omega t-k_1z)+R\varphi_0\cos(\omega t+k_1z), \tag{29}$$

где в соответствии с (27) и (28) коэффициент отражения R равен $R_{12}=(Z_1-Z_2)/(Z_1+Z_2)$, если $\varphi(z, t)$ соответствует волне смещения или скорости, $R=-R_{12}$, если $\varphi(z, t)$ соответствует волне возвращающей силы. Для среды 2 существует своя волновая функция $\varphi_2(z, t)$, которая описывает бегущую волну, распространяющуюся в направлении $+z$:

$$\varphi_2(z, t)=T\varphi_0\cos(\omega t-k_2z), \tag{30}$$

где T — *коэффициент прохождения для амплитуды.* Из условия непрерывности $\varphi(z, t)$ на границе в $z=0$ следует:

$$\varphi_2(0, t)=\varphi_1(0, t),$$

т. е.

$$T\varphi_0\cos\omega t=\varphi_0(1+R)\cos\omega t,$$

$$\boxed{T=1+R,} \tag{31}$$

где R равно R_{12} для ψ и $\partial\psi/\partial t$ и равно $-R_{12}$ для волны возвращающей силы $-T\partial\psi/\partial z$. (Заметим, что мы использовали T для обозначения натяжения струны и коэффициента прохождения. В примерах, не связанных со струной, это не может вызывать недоразумения.)

Величина R лежит между -1 и $+1$, поэтому T заключено в интервале значений от нуля до $+2$. Таким образом, *коэффициент прохождения всегда положителен.* Рассмотрим несколько интересных предельных случаев.

Случай 1. *Полное согласование импедансов.* Если $Z_2=Z_1$, то отражения на границе не возникает и $R_{12}=0$. Коэффициент прохождения равен единице. Заметим, что равенство $Z_2=Z_1$ вовсе не означает идентичности сред. Напрнмер, у второй струны плотность и натяжение могут быть не равны плотности и натяжению первой, но произведения этих величин для *обеих* сред (струн) могут быть равны. В этом случае будут равны и импедансы, так как $Z_1=\sqrt{T_1\rho_1}$ и $Z_2=\sqrt{T_2\rho_2}$. Однако фазовые скорости в этих средах $v_1=\sqrt{T_1/\rho_1}$ и $v_2=\sqrt{T_2/\rho_2}$ будут различны.

Случай 2. *Бесконечное сопротивление.* Если Z_2/Z_1 равно бесконечности, то $R_{12}=-1$. *Точка $z=0$ неподвижна.* Коэффициент отражения для смещения и скорости равен -1. Поэтому суперпозиция падающей и отраженной волн смещения и скорости в точке $z=0$ дает нулевые смещение и скорость. В данном случае положительный импульс в падающей волне становится отрицательным импульсом после отражения. Коэффициент отражения для волны поперечной силы равен $+1$. Таким образом, сила, действующая на струну в точке $z=0$, имеет то же направление, что и в случае полного согласования, но она в два раза больше, чем в этом случае. Избыточная сила идет на образование отраженной волны с амплитудой, равной по величине и противоположной по знаку амплитуде падающей волны.

Случай 3. *Случай нулевого сопротивления.* Если Z_2/Z_1 равно нулю, то конец струны в точке $z=0$ называется *свободным концом*. Наклон струны в этой точке всегда равен нулю. Коэффициент отражения для возвращающей силы равен -1. Поэтому приходящий положительный импульс волны возвращающей силы после отражения становится отрицательным. Коэффициент отражения для скорости и смещения равен $+1$. Поэтому в точке $z=0$ струна имеет в два раза большую скорость, чем в том случае, когда импедансы согласованы. Предельные случаи, соответствующие $Z_2/Z_1=\infty$ и $Z_2/Z_1=0$, иллюстрируются рис. 5.3 и 5.4.

Форма синусоидальной волны в общем случае. Если в среде 1 присутствуют падающая и отраженная волны, то мы можем написать

$$\psi(z, t)=A\cos(\omega t-kz)+RA\cos(\omega t+kz), \tag{32}$$

где R — коэффициент отражения, значения которого лежат между -1 и $+1$. При $R=0$ мы имеем случай полного согласования. При этом $\psi(z, t)$ — это «чистая» бегущая волна, т. е. волна, распространяющая только в направлении $+z$. Когда $R=-1$, $\psi(z, t)$ соответствует «чистой» стоячей волне, т. е. волне с постоянными узлами (нулями). Узел будет также и в точке $z=0$.

Когда $R=+1$, $\psi(z, t)$ также соответствует «чистой» стоячей волне с постоянным «антиузлом» (максимумом) в точке $z=0$, т. е. в этом случае первый постоянный узел будет расположен на расстоянии $1/4$ длины волны от $z=0$. В случае, когда R не равно ни нулю, ни ± 1, $\psi(z, t)$ не будет ни «чистой» стоячей волной, ни «чистой» бегущей волной. Таким образом, в наиболее общем случае синусоидальная волна (данной частоты ω) может быть представлена либо как суперпозиция стоячих волн, либо как суперпозиция бегущих волн, либо как некоторая комбинация тех и других волн. Поэтому любую синусоидальную волну можно представить в виде

$$\psi(z,\ t)=A\cos(\omega t+\alpha)\sin kz+B\cos(\omega t+\beta)\cos kz. \qquad (33)$$

Это уравнение является суперпозицией *двух стоячих волн, узлы которых смещены на четверть длины волны* и которые имеют разные

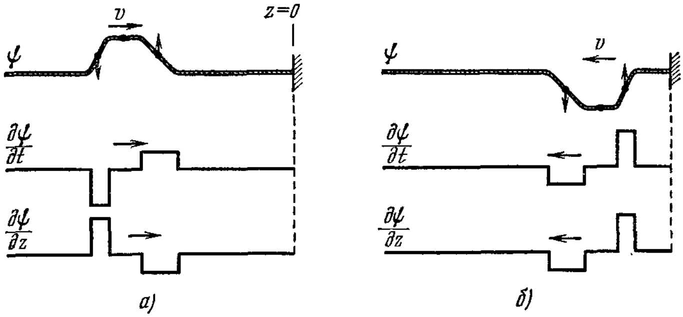

Рис. 5.3. Отражение приходящего импульса на закрепленном конце струны.

а) До отражения; *б)* после отражения. В точке $z=0$ струна присоединена к струне с бесконечной плотностью. Вертикальными стрелками показана скорость струны в данных точках. Точка между двумя стрелками соответствует нулевой скорости $\partial\psi/\partial t$.

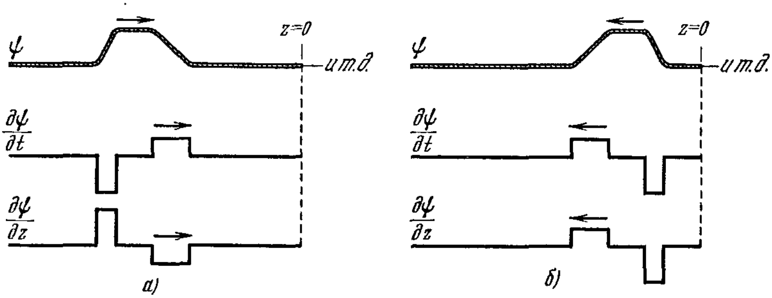

Рис. 5.4. Отражение импульса от свободного конца.

а) До отражения; *б)* после отражения. В точке $z=0$ струна присоединена к струне с пренебрежимо малой плотностью.

амплитуды и начальные фазы. Та же волна $\psi(z,\ t)$ может быть записана в таком виде:

$$\psi(z,\ t)=C\cos(\omega t-kz+\gamma)+D\cos(\omega t+kz+\delta). \qquad (34)$$

Эта запись представляет собой суперпозицию *двух бегущих в разных направлениях волн*, имеющих различные амплитуды и начальные фазы. Например, волна, определяемая уравнением (32), записана как суперпозиция бегущих волн, однако она может быть с таким же успехом представлена как суперпозиция стоячих волн. У вас будет возможность доказать это (задача 5.20). Рассмотрим несколько примеров на отражение волн.

Пример 3. *Отражение звуковых волн*. Уравнения движения звуковых волн подобны уравнениям, описывающим продольные волны в пружине. Последние в свою очередь подобны уравнениям для поперечных волн в струне. Поэтому, не повторяя выводов, мы можем воспользоваться результатами для коэффициентов отражения и прохождения, полученными для струны. Скорость воздуха отвечает величине $\partial\psi/\partial t$, а звуковое давление $-\gamma p_0\, \partial\psi/\partial z$ аналогично возвращающей силе $-T_0\, \partial\psi/\partial z$ для струны.

Закрытый конец. У закрытого конца трубы средняя скорость молекул воздуха вдоль z (вдоль трубы) равна нулю. (Для каждой молекулы, движущейся направо вдоль оси $+z$ по направлению к стене, существует молекула, которая недавно отскочила от стены и движется в направлении $-z$.) Поэтому на закрытом конце волна скорости $\partial\psi/\partial t$ будет иметь коэффициент отражения, равный -1. Действительно, при этом суперпозиция падающей и отраженной волн скорости даст нуль.

Другой волной, представляющей физический интерес, является волна звукового давления (аналог волны возвращающей силы) $-\gamma p_0 \partial\psi/\partial z$. В соответствии с результатами, полученными для струны, коэффициент отражения для волны звукового давления должен быть равен по величине коэффициенту отражения для волны скорости и иметь обратный знак. Поэтому на закрытом конце коэффициент отражения для волны звукового давления равен $+1$ и давление на закрытом конце имеет тот же знак, что и при полном согласовании, однако величина его в два раза больше. С микроскопической точки зрения удвоение давления можно объяснить следующим образом.

Давление определяется как сила, действующая на единицу площади. Сила — это изменение количества движения за единицу времени. Будем считать, что молекулы сталкиваются со стенкой упруго. Тогда при столкновении количество движения молекулы изменит знак (мы имеем в виду направления вдоль оси z). Таким образом, на закрытом конце количество движения молекулы изменяется в два раза $[mv_z - (-mv_z) = 2mv_z]$ и соответственно давление возрастает тоже в два раза. Этот случай аналогичен упругому удару шарика с массой m и скоростью v_z в направлении z о стенку массы M $(M \gg m)$. При соударении стена получает импульс, равный $2mv$.

Открытый конец. В этом случае у нас возникают технические трудности. Мы не хотим, чтобы воздух из трубы «ушел» в вакуум. Поэтому посмотрим, что будет происходить, если открытый конец трубы «подсоединить» к большой комнате, в которой давление воздуха p_0 равно давлению воздуха в трубе. На открытом конце воздух может свободно входить и выходить из трубы, и поэтому волна скорости здесь не будет обращаться в нуль. Области комнаты, достаточно удаленные от открытого конца трубы, имеют постоянное давление p_0, равное равновесному давлению в комнате. (Оказывается, что уже на расстояниях порядка радиуса трубы давление можно считать существенно постоянным и равным p_0.) Когда область сжатия достигнет открытого конца трубы, то у воздуха появится возможность распространяться во все стороны, в то время как в звуковой волне в трубе движение происходило только вдоль z. Поэтому область сжатия быстро рассасывается с увеличением расстояния от конца трубы, пока на некотором расстоянии (порядка радиуса трубы) давление не станет равным p_0. Таким образом, если труба «подсоединена» к большой комнате, то на расстояниях от конца трубы порядка ее радиуса звуковое давление очень близко к нулю.

Назовем эффективной длиной открытого конца трубы область, отстоящую от реального конца на расстояние, на котором звуковое давление практически уменьшается до нуля. Так как здесь звуковое давление все время равно нулю, то его коэффициент отражения должен быть равен —1. Поэтому для скорости коэффициент отражения будет равен +1. В рассмотренной нами модели импеданс Z_2, созданный воздухом в комнате, равен нулю. (Нулевой импеданс обусловлен тем, что воздух свободно растекается во все стороны. Наша формула для импеданса $Z=\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$ здесь неприменима, так как она была получена для строго продольных колебаний.)

Рассмотрим «микроскопическую» картину на эффективном открытом конце трубы.

Пусть область сжатия достигла открытого конца. При распространении области сжатия в трубе происходит передача импульса в направлении распространения волны (направлении $+z$), обусловленная наличием импеданса. На открытом конце воздух вытекает из трубы, попадая в условия, при которых импеданс равен нулю (Z_2 для комнаты равен нулю, о чем было сказано выше), т. е. невозможна передача импульса. В этом случае вытекающий поток создаст разрежение на открытом конце. Воздух на ближайшей к трубе части области разрежения испытывает меньшее сопротивление, чем «обычно», и стремится заполнить эту область, которая, таким образом, смещается влево (мы считаем, что звук по трубе распространяется вправо). Воздух, примыкающий к сместившейся области разрежения, снова стремится вправо и т. д. Мы видим, что *сжатие*, перемещавшееся в направлении $+z$, вызвало *разрежение*, перемещающееся в направлении — z. Волна скорости, имевшая вид импульса, бежавшего вдоль оси $+z$, вызовет волну скорости *того же* знака в обратном направлении —z (чтобы заполнить разрежение, молекулы всегда смещаются в направлении $+z$). Мы видим, что на открытом конце трубы коэффициент отражения для волны скорости положителен, а для волны давления отрицателен.

Эффективная длина открытого конца трубы. Эффективное расстояние за открытым концом трубы, на котором звуковое давление уменьшается до нуля, можно экспериментально определить следующим образом. Рассмотрим трубу, открытую с обоих концов. Мода свободных колебаний воздуха в трубе, для которой эффективная длина трубы равняется половине длины волны, будет первой модой (гармоникой). (Если труба открыта с обоих концов, то на концах для стоячей волны скорости мы будем иметь пучности, а в середине трубы узел. Для стоячей волны давления узлы и пучности поменяются местами.) Чтобы найти эффективную длину трубы, возбудим в ней колебания, слегка ударив по ней чем-либо. (Легче всего возбуждается самая низкая гармоника, и именно ее вы и услышите.) Определите каким-нибудь образом частоту слышимого вами тона. Затем вычислите половину длины волны. Эта длина будет несколько больше, чем длина трубы, и ее можно принять за эффективную длину. Более легкий способ состоит в использовании стандартной возмущающей силы, т. е. камертона. Изменяя длину трубы (либо отрезая по кусочку, если труба длинная, либо перемещая пробку по трубе), добиваются резонанса, т. е. максимальной громкости звучания. Частота гармоники (тона) при максимальной громкости соответствует частоте возбуждающей силы, т. е. частоте камертона. На частотах, отличных от резонанса, собственная частота колебаний не равна частоте возмущающей силы. (Какую частоту вы слышите, когда труба и камертон не настроены в резонанс? Собственную частоту колебаний трубы или частоту камертона? Посмотрите домашние опыты.)

Пример 4. *Отражения в передающих линиях.* Напряжение передатчика $V(t)$ на левом конце L ($z=0$) бесконечной передающей линии с импедансом Z_1 образует бегущую волну тока $I(z, t)$. В точке $z=0$ имеем

$$V_0 \cos \omega t = V(t) = Z_1 I(0, t). \tag{35}$$

Бегущие волны тока и напряжения в любой точке z равны

$$V(z, t) = V_0 \cos(\omega t - k_1 z), \quad I = I_0 \cos(\omega t - k_1 z), \quad V_0 = Z_1 I_0. \tag{36}$$

На границе, где происходит резкое изменение характеристического импеданса с Z_1 на Z_2, образуются отраженная и проходящая волны. Нет необходимости повторять для этого случая все, что было нами проделано для струны. Коэффициенты отражения и прохождения в этом случае имеют вид, аналогичный соответствующим коэффициентам для волн в струне и звуковых волн. Перед тем как выписать эти формулы, рассмотрим два предельных случая, когда импеданс Z_2 равен нулю (пример 5) и когда он равен бесконечности (пример 6).

Пример 5. *Короткозамкнутая линия: импеданс равен нулю.* Если правый конец линии замкнут накоротко, напряжение на этом конце постоянно равно нулю. В этом случае коэффициент отражения для волны напряжения равен -1. Коэффициент отражения для волны тока в этом случае равен $+1$ и величина тока (на конце линии) удваивается по сравнению со случаем самосогласованной нагрузки. Положительный импульс напряжения при отражении от конца линии становится отрицательным, а импульс тока после отражения сохраняет свой знак.

Пример 6. *Линия с открытым концом: импеданс равен бесконечности.* Если линия на правом конце разомкнута, то ток на конце линии равен нулю. Таким образом, коэффициент отражения для тока должен быть равен -1. Коэффициент отражения для напряжения в этом случае равен $+1$. Из сказанного выше следует, что в общем случае коэффициенты отражения для напряжения V и тока I имеют вид

$$R_V = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \equiv -R_{12}, \quad R_I = -R_V. \tag{37}$$

В случае $Z_2 = 0$ получаем $R_V = -1$, а в случае $Z_2 = \infty$ $R_I = -1$, что совпадает со сказанным выше.

Передающая линия из параллельных пластин. Импеданс линии (в ед. СГСЭ) равен [уравнение (4.140) п. 4.4]

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{4\pi}{c}\,\frac{g}{w}. \tag{38}$$

Если, например, при переходе от линии 1 к линии 2 длина воздушного зазора удваивается, то импеданс также возрастет в два раза.

Коэффициенты отражения для полей. Вместо потенциала и тока можно рассматривать электрическое поле E_x и магнитное поле B_y. В данной передающей линии электрическое поле пропорционально V, а магнитное — пропорционально I. Имеем

$$gE_x = V, \quad wB_y = \frac{4\pi}{c} I\mu. \tag{39}$$

Так как отраженная волна в линии 1, естественно, находится в той же передающей линии, что и падающая волна, т. е. в линии с тем же воздушным зазором g, шириной w и магнитной проницаемостью μ, то коэффициент отражения для E_x тот же, что и для V, а для B_y тот же, что и для I. С другой стороны, коэффициенты *прохождения* для gE_x и wB_y/μ совпадают с коэффициентами прохождения для V и I соответственно. Мы будем рассматривать только коэффициенты отражения. Имеем для электрического поля

$$R_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \tag{40}$$

Магнитное поле имеет коэффициент отражения, равный по величине и обратный по знаку коэффициенту для E_x.

В следующем примере рассмотрен случай, имеющий большое значение.

Пример 7. *Отражение в передающей линии, имеющей разрыв непрерывности по* ε. Будем считать, что геометрия линии (т. е. w и g) и магнитная проницаемость не изменяются на границе. (Для таких сред, как ионосфера, вода, стекло, воздух, можно с достаточно высокой степенью точности считать $\mu = 1$.) Из выражения (38) для Z видно, что в этих условиях единственной величиной, которая может меняться на границе раздела, является диэлектрическая постоянная ε. Из (38) следует, что Z пропорционально $1/\sqrt{\varepsilon}$ или $1/n$, так как при $\mu=1$ показатель преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, после подстановки $Z_1=1/n_1$ и $Z_2=1/n_2$ в (40) имеем

$$\boxed{R_E=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}.} \tag{41}$$

Этот результат можно обобщить. Пусть воздушный зазор g и ширина w передающей линии бесконечно увеличиваются. Коэффициент отражения в данной области поля не может зависеть от граничных условий. Поэтому выражение (41) применимо даже для волн, испускаемых удаленным уличным фонарем или телевизионной антенной. *Уравнение* (41) *дает коэффициент отражения для любых бегущих электромагнитных волн, падающих нормально к поверхности, на которой происходит резкий скачок* (*на длине меньшей, чем длина волны*) *диэлектрической постоянной.*

Мы можем немедленно применить этот результат к интересному случаю отражения видимого света.

Пример 8. *Отражение видимого света.* Коэффициент отражения любой электромагнитной плоской волны при нормальном падении на границу между двумя прозрачными средами определяется по формуле (41) (если $\mu=1$ для обеих сред). Так, для перехода воздух-стекло (для воздуха $n_1=1$, а для стекла $n_2=1{,}5$) имеем

$$R_E=\frac{1-n}{1+n}=\frac{1-1{,}5}{1+1{,}5}=-\frac{1}{5}. \tag{42}$$

Таким образом, при отражении меняется знак электрического поля, а величина поля уменьшается в 5 раз. (Для перехода из стекла в воздух коэффициент отражения равен $+1/5$.) Поток энергии в отраженной волне пропорционален квадрату электрического поля. Поэтому интенсивность отраженного света при однократном отражении от границы воздух-стекло близка к 4% (1/25 часть) интенсивности света, падающего нормально на поверхность раздела. (См. домашний опыт 5.1.)

5.4. Согласование импедансов двух прозрачных сред

Мы хотим, чтобы бегущие волны переходили из одной среды в другую без отражения на границе. Речь идет, например, о передаче звуковой энергии из воздуха в громкоговорителе в воздух комнаты без образования отраженных волн. (В этом случае отражения нежелательны, потому что эффективный нагрузочный импеданс, на который работает возбуждающий механизм, может быть частично реактивным и соответственно зависящим от частоты. Зависимость импеданса от частоты может привести к появлению паразитных резонансов.) Другим примером может быть переход бегущих волн видимого света из воздуха в стеклянную линзу или пластину. Желательно, чтобы при переходе свет не отражался. (Отражение вызывает, во-первых, потерю интенсивности и, во-вторых, попада-