так как при $\mu=1$ показатель преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, после подстановки $Z_1=1/n_1$ и $Z_2=1/n_2$ в (40) имеем

$$\boxed{R_E=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}.} \tag{41}$$

Этот результат можно обобщить. Пусть воздушный зазор g и ширина w передающей линии бесконечно увеличиваются. Коэффициент отражения в данной области поля не может зависеть от граничных условий. Поэтому выражение (41) применимо даже для волн, испускаемых удаленным уличным фонарем или телевизионной антенной. *Уравнение* (41) *дает коэффициент отражения для любых бегущих электромагнитных волн, падающих нормально к поверхности, на которой происходит резкий скачок* (*на длине меньшей, чем длина волны*) *диэлектрической постоянной.*

Мы можем немедленно применить этот результат к интересному случаю отражения видимого света.

Пример 8. *Отражение видимого света.* Коэффициент отражения любой электромагнитной плоской волны при нормальном падении на границу между двумя прозрачными средами определяется по формуле (41) (если $\mu=1$ для обеих сред). Так, для перехода воздух-стекло (для воздуха $n_1=1$, а для стекла $n_2=1{,}5$) имеем

$$R_E=\frac{1-n}{1+n}=\frac{1-1{,}5}{1+1{,}5}=-\frac{1}{5}. \tag{42}$$

Таким образом, при отражении меняется знак электрического поля, а величина поля уменьшается в 5 раз. (Для перехода из стекла в воздух коэффициент отражения равен $+1/5$.) Поток энергии в отраженной волне пропорционален квадрату электрического поля. Поэтому интенсивность отраженного света при однократном отражении от границы воздух-стекло близка к 4% (1/25 часть) интенсивности света, падающего нормально на поверхность раздела. (См. домашний опыт 5.1.)

5.4. Согласование импедансов двух прозрачных сред

Мы хотим, чтобы бегущие волны переходили из одной среды в другую без отражения на границе. Речь идет, например, о передаче звуковой энергии из воздуха в громкоговорителе в воздух комнаты без образования отраженных волн. (В этом случае отражения нежелательны, потому что эффективный нагрузочный импеданс, на который работает возбуждающий механизм, может быть частично реактивным и соответственно зависящим от частоты. Зависимость импеданса от частоты может привести к появлению паразитных резонансов.) Другим примером может быть переход бегущих волн видимого света из воздуха в стеклянную линзу или пластину. Желательно, чтобы при переходе свет не отражался. (Отражение вызывает, во-первых, потерю интенсивности и, во-вторых, попадание света на другие части аппаратуры.) В качестве еще одного примера можно привести непосредственный разговор между двумя аквалангистами под водой. Каждый аквалангист может громко говорить в маску, которая закрывает рот, нос и глаза. Так как коэффициент прохождения T_{12} очень мал, то через стекло маски в воду пройдет лишь незначительная часть звуковой энергии. Малость величины T_{12} объясняется тем, что звуковые импедансы воды и воздуха сильно отличаются.

Передача бегущих волн из одной среды в другую без отражения называется *согласованием импедансов.* Мы рассмотрим два способа решения этой важной задачи. Первый способ заключается в создании «неотражающего» слоя, второй способ связан с образованием переходного слоя с плавно меняющимися свойствами. (Надо сказать, что ни один из этих способов не подходит для аквалангистов. В случае переговоров под водой решение было достигнуто преобразованием звуковых частот в ультразвуковые. Оказалось, что на ультразвуковых частотах в воде согласование импедансов выполнить легче. Поэтому каждый аквалангист снабжается ультразвуковым передатчиком и приемником, а также конвертером частот.)

Слой без отражения. Пусть среда 1 простирается от $z=-\infty$ до $z=0$, а среда 3 — от $z=L$ до $z=+\infty$. Между этими средами от $z=0$ до $z=L$ расположено устройство (среда 2), с помощью которого мы хотим добиться согласования импедансов сред 1 и 3. Это согласование мы хотим осуществить для волн с угловой частотой ω. Очевидно, что если существует скачок в величине импеданса, то на границе раздела обязательно возникнет отражение. Способ, который мы рассмотрим, основан на том, чтобы образовать две отраженные волны: одну в $z=0$ и другую в $z=L$. Если мы будем достаточно сообразительны, то сможем создать такие условия, чтобы суперпозиция этих двух волн в среде 1 дала нулевую амплитуду отраженной волны.

Заполним область между $z=0$ и $z=L$ дисперсивной средой с характеристическим импедансом Z_2. Пусть Z_2 лежит между Z_1 и Z_3. В соответствии с нашими формулами для коэффициентов отражения имеем

$$R_{12}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_2+Z_1}=\frac{1-(Z_2/Z_1)}{1+(Z_2/Z_1)}, \quad R_{23}=\frac{Z_2-Z_3}{Z_2+Z_3}=\frac{1-(Z_3/Z_2)}{1+(Z_3/Z_2)}. \qquad (43)$$

Вследствие того, что $Z_1<Z_2<Z_3$, оба коэффициента отражения, R_{12} и R_{23}, имеют одинаковый знак. Теперь нам нужно воспользоваться тем, что две отраженные волны возникают в различных местах, а именно при $z=0$ и при $z=L$. Проследим за распространением падающей волны. В $z=0$ падающая волна частично отражается с коэффициентом R_{12} и частично проходит с коэффициентом прохождения T_{12}, который, кстати, всегда положителен. Прошедшая волна доходит до границы $z=L$, где частично отражается с коэффициентом R_{23} и частично проходит. Волна, отраженная от границы $z=L$, распространяется в направлении $-z$ и проходит границу $z=0$ с коэффициентом прохождения T_{21}. Таким образом, амплитуда

волны, прошедшей обратно (в направлении $-z$) в среду 1, равна амплитуде падающей волны, умноженной на коэффициент $T_{12} \times \times R_{23} T_{21}$. Сдвиг фазы между этой волной и волной, отраженной от первой поверхности раздела, определится временем прохода волной расстояния $2L$. Таким образом, мы можем написать следующие выражения для трех волн в первой среде:

$$\psi_{пад} = A \cos(\omega t - k_1 z), \tag{44}$$

$$\psi_{(отр\ в\ z=0)} = R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z), \tag{45}$$

$$\psi_{(отр\ в\ z=L)} = T_{12} R_{23} T_{21} A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L). \tag{46}$$

Здесь $-2k_2L$ — это изменение фазы волны при прохождении расстояния $2L$ в среде 2 (k_2 — волновое число; знак минус указывает на отставание по фазе). Падающая волна и две отраженные волны, определяемые уравнениям (45) и (46), показаны на рис. 5.5.

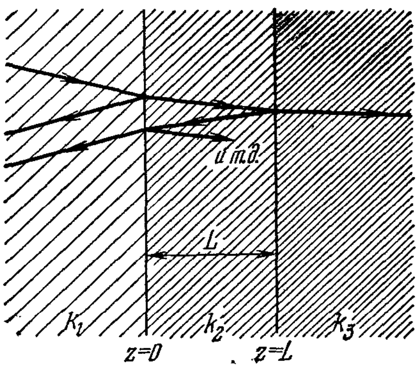

Рис. 5.5. Падающая и две первые отраженные волны.

Чтобы избежать наложения лучей, показан случай падения не по нормали.

Приближение, основанное на малости коэффициентов отражения. Кроме двух отраженных волн, показанных на рис. 5.5, существует бесконечно много отраженных волн, на что указывает стрелка «и т. д.».

Следует заметить, что во всех применениях описываемого метода импедансы Z_1, Z_2 и Z_3 мало отличаются друг от друга и поэтому коэффициенты отражения малы по сравнению с единицей. В этом случае первые две отраженные волны преобладают, и с достаточной степенью точности мы можем пренебречь вкладом от многократно отраженных волн. Например, амплитуда третьего отраженного луча будет составлять $(R_{21} R_{23})$-ю часть от амплитуды второго луча (т. е. луча, отраженного от границы $z=L$). Если R_{21} и R_{23} порядка 0,1, то третьей отраженной волной можно уже пренебречь. Точно так же произведение $T_{12}T_{21}$ в уравнении (46) можно с достаточно хорошим приближением заменить единицей:

$$T_{12} T_{21} = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \approx 1. \tag{47}$$

Таким образом, *в приближении, когда коэффициенты отражения малы*, отраженная волна в среде 1 будет суперпозицией двух волн: отраженной на границе $z=0$ и на границе $z=L$. Имея в виду равенства (46) и (47), получаем

$$\psi_{отр} \approx R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z) + R_{23} A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L), \tag{48}$$

где $2k_2L$ определяет сдвиг фазы, возникший от движения «туда и обратно».

Как получить неотражающий слой. Теперь можно считать, что задача согласования сопротивлений решена. Сначала выберем Z_2 так, чтобы $R_{12}=R_{23}$, т. е. чтобы [в соответствии с (43)]

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_2}{Z_3}, \quad Z_2=\sqrt{Z_1Z_3}. \tag{49}$$

Тогда выражение (48) принимает вид

$$\psi_{\text{отр}}\approx R_{12}A\left[\cos(\omega t+k_1z)+\cos(\omega t+k_1z-2k_2L)\right]. \tag{50}$$

Теперь выберем длину L такой, чтобы сумма в уравнении (50) равнялась нулю. Это означает, что мы хотим иметь «полностью деструктивную интерференцию». Она возможна в том случае, если $2k_2L$ равно π, т. е. если расстояние $2L$ представляет собой половину длины волны в среде 2. Таким образом, *отраженная в среду* 1 *волна равна нулю, если* Z_2 *есть геометрическое среднее из* Z_1 *и* Z_3, *а толщина* L *промежуточного слоя равна четверти длины волны в этом слое.*

Пример 9. *Согласование импедансов в оптике.* Пучок видимого света, проходящий через пластинку стекла, отражается дважды: на границах воздух — стекло и стекло — воздух. *Интенсивность* отраженного пучка будет пропорциональна квадрату амплитуды отраженной волны (или квадрату коэффициента отражения, если амплитуда падающей волны принята за единицу). Поэтому при каждом отражении в соответствии с уравнением (42) п. 5.3 потери интенсивности равны $(1/5)^2=1/25=4\%$. Соответственно при переходе через пластинку (две поверхности) эти потери составят 8%. [Мы пренебрегаем интерференцией отраженных от двух поверхностей волн. Для обычного белого света интерференционные эффекты равны нулю при усреднении по широкому диапазону частот (цветов). Обратите внимание на опыт 5.10.] Такие потери (8%) недопустимы в оптических приборах, имеющих много границ стекло — воздух. Поэтому обычно поверхность линз покрывают неотражающим слоем. В соответствии с уравнением (49) импеданс покрывающего слоя должен быть геометрическим средним импедансов стекла и воздуха, т. е. он должен быть равен $\sqrt{1{,}50\cdot 1{,}0}\approx 1{,}22$. Толщина слоя должна равняться $^1/_4\lambda_2$, где λ_2 — длина волны света в слое. Для волны света в вакууме 5500 Å соответствующая длина волны в покрытии равна 5500/1,22=4500 Å. Это соответствует толщине покрытия 4500 Å/4=1120 Å$=1{,}12\cdot 10^{-5}$ *см*. Такой слой можно нанести испарением соответствующего материала в вакуумной камере.

Рассмотрим интересную задачу. Предположим, что линза покрыта неотражающим слоем толщиной в $^1/_4\lambda$ для зеленого цвета (длина волны в вакууме 5500 Å.) В этом случае для зеленого цвета отражения не будет. Какой будет интенсивность отраженной волны для других цветов? См. задачу 5.21.

Метод плавного изменения импеданса. Неотражающий слой, который мы рассмотрели, имеет тот недостаток, что он годится лишь для определенного узкого интервала частот. Рассмотрим еще один способ избавиться от отражения, который доступен в том случае, когда мы не ограничены местом в пространстве. Пусть длина L больше любой из длин волн света, который мы хотим передать без отражений.

Допустим, что импеданс меняется монотонно на длине L, а на длине, равной четверти длины любой из передаваемых волн, изменится на очень малую величину. Для простоты будем считать, что имеем дискретное изменение импеданса каждый раз, когда z увеличивается на $^1/_4\lambda$, где λ — длина волны, которую мы хотим передать без отражений. Очевидно, что мы полностью избавимся от отражений, если амплитуда, отраженная при z, уничтожится амплитудой, отраженной при $z+{}^1/_4\lambda$, и т. д. (Мы пренебрегаем многократным отражением.) Коэффициент отражения при одном шаге по z, когда импеданс Z изменится до $Z_2=Z_1+\Delta Z$, будет равен

$$\Delta R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\approx\frac{-\Delta Z}{2Z}\approx\frac{-1}{2Z}\left[\frac{dZ(z)}{dz}\right]\left(\frac{1}{4}\lambda\right). \tag{51}$$

Если отражения от границ z и $z+{}^1/_4\lambda$, т. е. при одном дискретном шаге по z, взаимно гасятся, то величина ΔR должна быть постоянной и не должна зависеть от z. Обозначим ΔR через α, тогда формулу (51) можно записать так:

$$\frac{dZ}{Z}=-\frac{8\alpha}{\lambda}dz. \tag{52}$$

Пример 10. *Экспоненциальный горн (рупор)*. Если считать, что длина волны λ постоянна и не зависит от z (что имеет место, например, при распространении звуковой волны в трубе, импеданс которой меняется из-за изменения диаметра трубы), то интегрирование уравнения (52) дает экспоненциальный закон изменения импеданса Z с расстоянием z. Экспоненциально расширяющийся рупор часто используют в высококачественных громкоговорителях для передачи без отражений звуковой энергии, излучаемой мембраной площадью A_1. Если же мы возбудим колебания в цилиндрической трубке без раструба с площадью поперечного сечения A_1 и неожиданно «подсоединим» эту трубку к комнате, то трубка будет резонировать для всех длин волн, для которых на концах трубки образуются пучности, и то, что мы услышим, будет мало похоже на музыку.

Пример 11. *Метод плавно меняющегося показателя преломления*. Согласование импедансов в оптике методом плавного изменения показателя преломления заключается в покрытии оптического элемента (линзы) несколькими слоями различных веществ, показатель преломления которых постепенно изменяется от n_1 до n_2. Технологически это более трудоемкий процесс, чем нанесение одного слоя, однако такой способ более эффективен. В этом случае зависимость n (или Z) от z не экспоненциальная. Почему? (См. задачу 5.22.)