6.2. Групповая скорость

В главе 4 мы рассмотрели несколько примеров, из которых следует, что скорость распространения информации или энергии в бегущей волне не обязательно совпадает с фазовой скоростью синусоидальной бегущей волны. Например, было показано, что фазовая скорость света в ионосфере больше скорости света c. Однако если бы сигналы распространялись со скоростями бо́льшими, чем c, то теория относительности была бы неверна.

Передача информации с помощью модуляции. Гармоническое колебание определенной частоты и амплитуды не может нести информацию о сигнале, поскольку каждый последующий цикл колебаний является точной копией предыдущего. Чтобы передать определенную информацию с такой волной, ее нужно *промодулировать*, т. е. изменить какой-то параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала. В бегущей волне такими изменяемыми параметрами могут быть амплитуда, частота и фаза. Соответственно различают *амплитудную*, *частотную* и *фазовую модуляцию*.

Чтобы понять, как распространяется сигнал, рассмотрим бегущую волну, которая образуется передатчиком, расположенным в точке $z=0$. Смещение на выходе передатчика не будет больше иметь простую гармоническую форму $D(t)=A\cos\omega t$, а определяется более сложной временной зависимостью $D(t)=f(t)$. Оказывается, что широкий класс функций $f(t)$ может быть представлен линейной суперпозицией функций вида $A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$, где амплитуда $A(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$ зависят от частоты. Несколько позже мы увидим, как определить $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ с помощью фурье-анализа. Сперва рассмотрим простой случай, когда смещение $f(t)$ представляет собой сумму всего лишь двух колебаний. Мы получим при этом ряд интересных результатов, которые в конце концов позволят понять, как происходит распространение волновой группы или импульса в диспергирующей среде (т. е. в среде, где фазовая скорость зависит от длины волны).

Амплитудно-модулированное колебание как сумма двух гармонических колебаний. Предположим, что в точке $z=0$ передатчик воздействует на струну, простирающуюся от $z=0$ до $+\infty$. Пусть колебания генератора являются суперпозицией двух гармонических колебаний с угловыми частотами ω_1 и ω_2. Не нарушая общности результата, можно считать, что амплитуды и фазы этих колебаний равны. Итак, смещение на выходе передатчика имеет вид

$$D(t)=A\cos\omega_1 t+A\cos\omega_2 t. \qquad (1)$$

Мы знаем из рассмотрения биений [см. п. 1.5, уравнения (1.80) — (1.85)], что такая суперпозиция может быть записана в виде *амплитудно-модулированного колебания*:

$$D(t)=A_{\text{мод}}(t)\cos\omega_{\text{ср}}t, \qquad (2)$$

где

$$A_{\text{мод}}(t)=2A\cos\omega_{\text{мод}}(t) \qquad (3)$$

и

$$\omega_{мод} = {}^1/_2 (\omega_1 - \omega_2), \quad \omega_{ср} = {}^1/_2 (\omega_1 + \omega_2). \tag{4}$$

Если ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга, то частота модуляции $\omega_{мод}$ мала по сравнению со средней частотой $\omega_{ср}$. В этом случае уравнение (2) соответствует *почти гармоническому колебанию* с частотой $\omega_{ср}$ и почти постоянной амплитудой.

Выражения (2) и (3) дают пример простейшей амплитудной модуляции, в которой участвует единственная частота модуляции $\omega_{мод}$. В общем случае амплитудно-модулированное колебание может быть представлено выражением (2), в котором $A_{мод}(t)$ является суперпозицией большого числа членов, подобных выражению (3), каждый из которых имеет собственную частоту модуляции, амплитуду и фазу. Например, в случае амплитудной модуляции радиоволн за $\nu_{ср}$ можно взять 1000 *кгц* (частоту $\nu_{ср}$ часто называют «несущей» частотой). Модуляционные частоты для передачи звука должны лежать в слышимом звуковом диапазоне, т. е. от 20 *гц* до 20 *кгц*.

Суперпозиция двух синусоидальных бегущих волн образует амплитудно-модулированную бегущую волну. Рассмотрим бегущие волны, испускаемые передатчиком. Пусть временна́я зависимость «смещения» на выходе передатчика определяется выражением (1) или равносильным ему выражением (2). Среда, в которую испускаются волны, связана с передатчиком так, что при $z=0$ $\psi(z, t)$ равно

$$\psi(0, t) = D(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t. \tag{5}$$

Таким образом, на выходе передатчика генерируются две бегущие волны и для любого z в направлении распространения этих волн результирующую волну можно представить как их суперпозицию, т. е. справедливо выражение

$$\psi(z, t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 z) + A\cos(\omega_2 t - k_2 z). \tag{6}$$

Выражение (6) получается из (5) заменой $\omega_1 t$ на $(\omega_1 t - k_1 z)$ и $\omega_2 t$ на $(\omega_2 t - k_2 z)$. Производя такую замену в выражениях (2), (3) и (4), мы получим выражение для *почти синусоидальной амплитудно-модулированной бегущей волны*:

$$\psi(z, t) = A_{мод}(z, t)\cos(\omega_{ср} t - k_{ср} z), \tag{7}$$

где

$$A_{мод}(z, t) = 2A\cos(\omega_{мод} t - k_{мод} z) \tag{8}$$

и

$$\omega_{мод} = {}^1/_2 (\omega_1 - \omega_2), \quad k_{мод} = {}^1/_2 (k_1 - k_2), \tag{9}$$

$$\omega_{ср} = {}^1/_2 (\omega_1 + \omega_2), \quad k_{ср} = {}^1/_2 (k_1 + k_2). \tag{10}$$

Скорость распространения модуляции. Постараемся ответить на вопрос: с какой скоростью распространяется модуляция? Предположим, что $\omega_{мод}$ мало по сравнению с $\omega_{ср}$. В этом случае на выходе передатчика ($z=0$) амплитудно-модулированные колебания имеют форму, показанную на рис. 1.13, п. 1.5. Наш вопрос сводится к нахождению скорости распространения максимума модулированной волны [т. е. точки, где $A_{мод}(z, t)=2A$]. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим уравнение (8). Очевидно, что для постоянства амплитуды $A_{мод}(z, t)$, например, для сохранения ее максимального значения, необходимо, чтобы аргумент $\omega_{мод}t - k_{мод}z$ оставался постоянным. Таким образом, изменение в этом аргументе, вызываемое приращениями dt и dz, должно равняться нулю, т. е.

$$\omega_{мод}\,dt - k_{мод}\,dz = 0. \tag{11}$$

Это условие удовлетворяется, если *скорость перемещения модулированного колебания* равна

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = v_{мод} = \frac{\omega_{мод}}{k_{мод}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}.} \tag{12}$$

Теперь вспомним, что ω и k связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = \omega(k). \tag{13}$$

Это соотношение однозначно определяет ω, если выбрано k, т. е.

$$\omega_1 = \omega(k_1), \quad \omega_2 = \omega(k_2). \tag{14}$$

Поэтому скорость распространения модуляции, определяемая уравнением (12), может быть представлена [с помощью разложения $\omega(k)$ в ряд Тейлора в точке $k=k_{ср}$] в таком виде:

$$v_{мод} = \frac{\omega(k_1)-\omega(k_2)}{k_1-k_2} = \frac{d\omega}{dk} + \ldots, \tag{15}$$

где производные берутся в точке $k=k_{ср}$.

Групповая скорость. Для большинства интересующих нас случаев ω_1 и ω_2 в уравнении (12) отличаются ненамного. Поэтому в выражении (15) для скорости мы можем пренебречь всеми членами, кроме первого. Величина $d\omega/dk$, вычисленная для некоторого среднего k, называется *групповой скоростью*:

$$\boxed{\text{Групповая скорость} \equiv v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}.} \tag{16}$$

Таким образом, скорость распространения «сигнала», образованного максимальной амплитудой (т. е. гребнем волны), равна не фазовой скорости $v_{ср}=\omega_{ср}/k_{ср}$, а групповой скорости $v_{гр}=d\omega/dk$.

На рис. 6.1 показано распространение бегущей волны $\psi(z, t)$, определяемой выражениями (7) или (6). Эта волна имеет следующие параметры: $\omega_{ср}=8\omega_{мод}$, и групповая скорость $d\omega/dk$ (оцененная для средней частоты) равна половине фазовой скорости $\omega_{ср}/k_{ср}$.

Приведем менее длинный вывод для скорости распространения модуляции. Разность фаз волн 1 и 2, входящих в суперпозицию

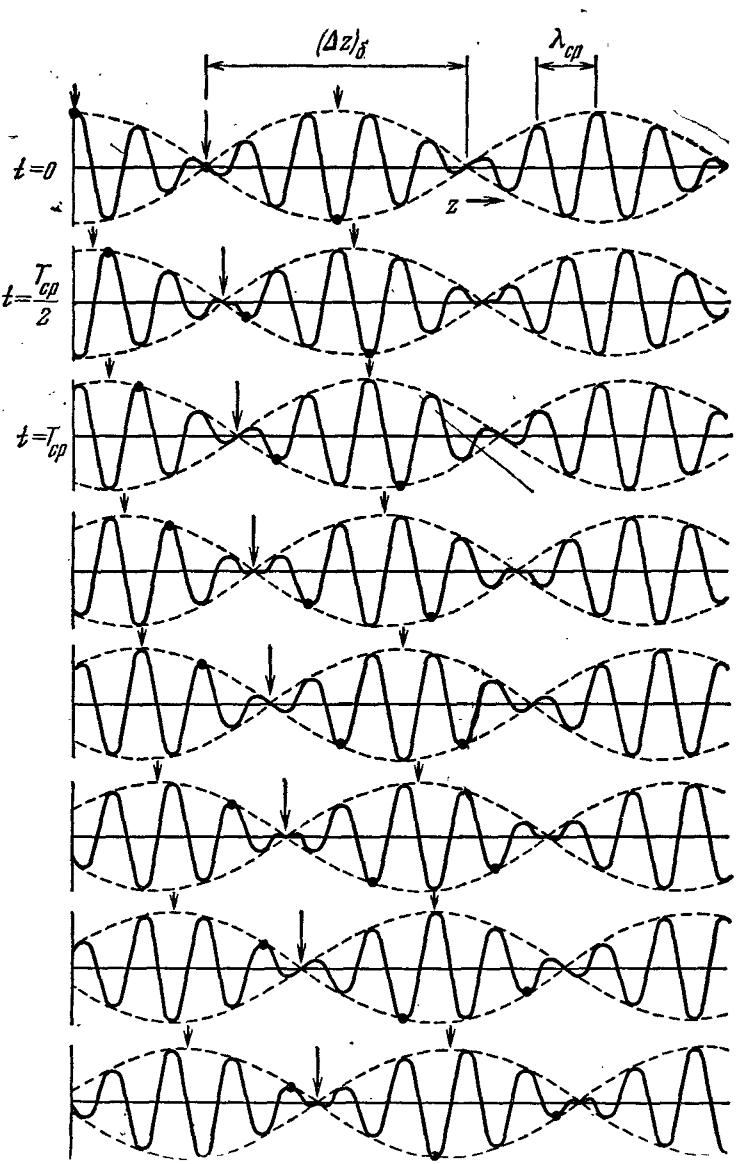

Рис. 6.1. Групповая скорость.

Стрелками показаны места биений, распространяющихся с групповой скоростью $v_{гр}$. Черными кружками показаны отдельные волновые гребни, которые распространяются со средней фазовой скоростью $v_{ср}$.

(6), равна

$$\varphi_1(z, t)-\varphi_2(z, t)=(\omega_1 t-k_1 z+\varphi_1)-(\omega_2 t-k_2 z+\varphi_2)=$$
$$=(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)z+(\varphi_1-\varphi_2).$$

При некоторых значениях $\varphi_1(z, t)$ и $\varphi_2(z, t)$ обе волны находятся в фазе и их интерференция дает максимум, при других значениях $\varphi_1(z, t)$ и $\varphi_2(z, t)$ волны будут в противофазе и амплитуда модулированного колебания будет равна нулю. Очевидно, что если мы будем двигаться со скоростью, при которой разность фаз $\varphi_1(z, t)-\varphi_2(z, t)$ остается постоянной, то эта скорость и будет скоростью распространения модулированного колебания, т. е. групповой скоростью. Поэтому, приравняв нулю полный дифференциал приведенного выше выражения, получим

$$(\omega_1-\omega_2)dt-(k_1-k_2)dz=0.$$

Определяемая из этого выражения скорость dz/dt совпадает с уравнением (12).

Пример 1. *Радиоволны с амплитудной модуляцией (АМ-радиоволны)*. Рассмотрим простой пример бегущей волны, которую можно считать либо почти гармонической амплитудно-модулированной бегущей волной с медленно изменяющейся амплитудой $A_{мод}(z, t)$ и большой несущей частотой $\omega_{ср}$, либо суперпозицией двух гармонических бегущих волн с двумя различными частотами ω_1 и ω_2. Амплитуда модуляции $A_{мод}(z, t)$ может считаться «почти постоянной» в пределах одного периода колебаний высокой частоты. Величина $A_{мод}(z, t)$ изменяется синусоидально во времени (для заданного z) с частотой модуляции $\omega_{мод}$ и синусоидально в пространстве (для фиксированного t), имея модуляционное волновое число $k_{мод}$. Мы нашли, что суперпозиция двух гармонических бегущих волн эквивалентна амплитудно-модулированной бегущей волне с частотой модуляции $\omega_{мод}$. Мы могли бы начать с рассмотрения бегущей волны, определяемой выражением (2), и пришли бы к выводу, что она состоит из суперпозиции двух гармонических колебаний.

Чтобы описать амплитудно-модулированные колебания, посылаемые радиопередатчиком, следует учесть, что здесь мы имеем дело не с единственной частотой модуляции, а с целым диапазоном таких частот. Ток в антенне представляет собой почти гармоническое колебание со средней частотой $\omega_{ср}$, которая, как уже отмечалось, называется *несущей частотой*. (У широковещательных радиостанций с АМ каждой станции соответствует своя несущая частота, лежащая в диапазоне от 500 до 1600 *кгц*.) Амплитуда напряжения на выходных зажимах передатчика не постоянна. Она является амплитудой модуляции, которая может быть выражена с помощью ряда

$$A_{мод}(t)=A_0+\sum_{\omega_{мод}} A(\omega_{мод})\cos[\omega_{мод}t+\varphi(\omega_{мод})]. \qquad (17)$$

Величина $A_{мод}(t) - A_0$ пропорциональна давлению в звуковой волне и представляет собой передаваемую информацию. (Микрофон преобразует мгновенные значения звукового давления воздуха в электрическое напряжение.) Величина A_0 дает некоторый вклад в выражение (17), который существует постоянно, независимо от того, говорят ли в микрофон. Остальные члены разложения (17) соответствуют звуковым волнам, регистрируемым микрофоном. Частоты модуляции представляют собой, таким образом, частоты звуковых волн, лежащие в слышимом диапазоне от 20 до 20 000 *гц*. Они малы по сравнению с несущей частотой. Приложенное к антенне напряжение $V(t)$ будет поэтому почти гармоническим колебанием с частотой $\omega_{ср}$:

$$V(t) = A_{мод}(t)\cos\omega_{ср}t =$$
$$= A_0\cos\omega_{ср}t + \sum_{\omega_{мод}} A(\omega_{мод})\cos[\omega_{мод}t + \varphi(\omega_{мод})]\cos\omega_{ср}t. \quad (18)$$

Это выражение может быть записано как *суперпозиция строго гармонических колебаний*:

$$V(t) = A_0\cos\omega_{ср}t + \sum\frac{1}{2}A(\omega_{мод})\cos[(\omega_{ср}+\omega_{мод})t + \varphi(\omega_{мод})] +$$
$$+ \sum\frac{1}{2}A(\omega_{мод})\cos[(\omega_{ср}-\omega_{мод})t - \varphi(\omega_{мод})]. \quad (19)$$

Боковые полосы. Таким образом, модулированное по амплитуде напряжение $V(t)$ является суперпозицией гармонических колебаний, состоящих из колебания с частотой $\omega_{ср}$ (*несущая частота*) и многих гармонических колебаний с частотами $\omega_{ср}+\omega_{мод}$ (*верхняя полоса частот*) и $\omega_{ср}-\omega_{мод}$ (*нижняя полоса частот*). Для того чтобы излучаемые бегущие волны передавали информацию о звуке в области частот от 0 до 20 *кгц*, необходимо, чтобы напряжение $V(t)$ было представлено суперпозицией гармонических компонент с угловыми частотами ω в частотном диапазоне от самой низкой частоты, присутствующей в нижней боковой полосе, до самой верхней частоты в верхней боковой полосе. Таким образом, излучаемые *частоты занимают диапазон*

$$\omega_{ср} - \omega_{мод}(\text{макс}) \leqslant \omega \leqslant \omega_{ср} + \omega_{мод}(\text{макс}), \quad (20)$$

т. е.

$$\nu_{ср} - \nu_{мод}(\text{макс}) \leqslant \nu \leqslant \nu_{ср} + \nu_{мод}(\text{макс}). \quad (21)$$

Ширина полосы частот. Шириной полосы частот называется разность между максимальной и минимальной частотами:

$$\text{Полоса частот} \equiv \Delta\nu = \nu(\text{макс}) - \nu(\text{мин}) = 2\nu_{мод}(\text{макс}). \quad (22)$$

Таким образом, для передачи несущей и двух боковых полос, занимающих весь звуковой частотный диапазон, необходима ширина полосы вдвое большая, чем 20 *кгц*, т. е. 40 *кгц*. (Коммерческим радиостанциям, работающим с амплитудной модуляцией, предоставляется диапазон частот шириной 10 *кгц*. Этого диапазона вполне хватает для передачи речи и музыки. Вспомним, что частота самой высокой ноты рояля близка к 4,2 *кгц*.)

«Музыка» распространяется с групповой скоростью. Вынуждающая сила $V(t)$, представленная выражениями (18) или (19), приводит к испусканию электромагнитных бегущих волн, которые можно считать суперпозицией гармонических компонент, занимающих полосу частот $\Delta\omega$. В центре полосы находится частота $\omega_{ср}$. Эти волны могут быть также представлены как почти гармоническая бегущая волна, имеющая частоту «быстрых» колебаний $\omega_{ср}$, равную несущей частоте, и «почти постоянную» медленно меняющуюся амплитуду $A_{мод}(z, t)$, представляющую собой суперпозицию членов типа (8). [В примере, к которому относится выражение (8), присутствуют только два гармонических колебания и верхняя боковая полоса состоит всего лишь из одной частоты $\omega_1 = \omega_{ср} + \omega_{мод}$, а нижняя боковая полоса — также из единственной частоты $\omega_2 = \omega_{ср} - \omega_{мод}$.] Модуляция распространяется в среде (воздух, ионосфера, ...) с определенной скоростью. В случае радиостанции с амплитудной модуляцией, работающей, например, на несущей частоте 1000 *кгц* и с шириной полосы 10 *кгц*, частотный диапазон простирается от 995 до 1005 *кгц*. Так как ширина этой полосы частот мала по сравнению с несущей частотой (средней частотой), то можно пренебречь членами высокого порядка в разложении в ряд Тейлора [уравнение (15)]. В этом случае групповая скорость, определяемая уравнением (16), будет равна скорости распространения модулированных колебаний.

Частотная и фазовая модуляции и другие близкие проблемы рассмотрены в задачах 6.27—6.32. (Существует еще один важный вид модуляции — *импульсно-кодовая модуляция* *).)

Рассмотрим несколько физических примеров групповой скорости. В случае бегущих электромагнитных волн мы не ограничимся частотами радиостанций с АМ ($\nu \sim 10^6$ *гц*), а рассмотрим также видимый свет ($\nu \sim 10^{15}$ *гц*), микроволны ($\sim 10^{10}$ *гц*) и другие частоты.

Пример 2. *Электромагнитное излучение в вакууме.* Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид

$$\omega = ck. \tag{23}$$

Фазовая и групповая скорости равны

$$v_ф = \frac{\omega}{k} = c, \quad v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c. \tag{24}$$

Таким образом, для электромагнитного излучения в вакууме фазовая и групповая скорости равны скорости света c.

Пример 3. *Другие недиспергирующие волны.* Волны света в вакууме не испытывают дисперсии: их фазовая скорость не зависит от частоты (или волнового числа). В таких случаях групповая

---

*) J. S. Mayo, Pulse-Code Modulation, Scientific American, p. 102 (March 1968). См. также А. А. Харкевич, Теоретические основы радиосвязи, Гостехиздат., 1957, стр. 56.

скорость равна фазовой скорости. В общем случае имеем

$$\omega = v_ф k, \tag{25}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = v_ф + k\frac{dv_ф}{dk}. \tag{26}$$

Если производная $dv_ф/dk$ равна нулю, то групповая скорость равна фазовой. Другими примерами недиспергирующих волн могут служить слышимые звуковые волны, для которых справедливо соотношение

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}\, k, \tag{27}$$

а так же *поперечные волны в непрерывной струне*, у которых соотношение между ω и k имеет вид

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k. \tag{28}$$

Пример 4. *Электромагнитные волны в ионосфере* *). Для синусоидальной волны имеем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \tag{29}$$

для частот, превышающих граничную частоту $\nu_p \approx 20$ *Мгц*. Дифференцирование уравнения (29) по k дает

$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2c^2k, \tag{30}$$

т. е.

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_ф v_{гр} = c^2. \tag{31}$$

Фазовая и групповая скорости в этом случае равны

$$v_ф = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geqslant c, \qquad v_{гр} = c\left(\frac{c}{v_ф}\right) \leqslant c. \tag{32}$$

Мы видим, что хотя фазовая скорость всегда больше c, групповая скорость всегда меньше c. Поэтому *сигнал* не может быть передан со скоростью, превышающей скорость c.

Пример 5. *Поверхностные волны в воде.* В состоянии равновесия поверхность воды горизонтальна. При наличии волн на поверхность воды действует сила, которая стремится сгладить гребни волн и сделать поверхность воды плоской. Эта восстанавливающая сила складывается из силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Можно считать, что при длинах волн, больших нескольких *см*, преобладает сила тяжести. Для миллиметровых волн преобладает сила поверхностного натяжения.

Из-за очень малой сжимаемости воды избыток воды в гребне волны перемещается в соседние области. Поэтому отдельные водяные капли совершают движение, являющееся комбинацией продольного движения (взад и вперед) и поперечного движения (вверх и

*) Вернитесь к главе 3, п. 3.5, пример 10.

вниз). Если длина волны мала по сравнению с глубиной слоя воды в равновесном состоянии, мы имеем так называемые волны в глубокой воде, когда траектория отдельных водяных капель в бегущей волне представляет собой окружность. Плавающая на поверхности утка или просто капля воды будет совершать равномерные круговые движения с радиусом, равным амплитуде гармонической волны, и периодом, равным периоду волны. На гребне волны утка будет иметь максимальную скорость в прямом направлении, во впадине — максимальную скорость в обратном направлении. Капли воды под поверхностью совершают движение по окружности меньших радиусов. Оказывается, что радиус окружностей экспоненциально убывает с глубиной, и поэтому движение практически полностью затухает на глубине порядка нескольких длин волн.

Дисперсионное соотношение для волн в глубокой воде приближенно имеет следующий вид:

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3, \tag{33}$$

где $\rho \approx 1{,}0$ *г/см*^{3} и $T \approx 72$ *дин/см* (коэффициент поверхностного натяжения воды на границе с воздухом), $g=980$ *см/сек*^{2}.

Покажите сами, что когда вклады в ω^2 от силы поверхностного натяжения и от силы тяжести равны, фазовая и групповая скорости также равны. Докажите, что это условие осуществляется для длины волны $\lambda=1{,}70$ *см*. Фазовая и групповая скорости при этом равны примерно 23 *см/сек*. Для длин волн, много меньших 1,7 *см*, поверхностное натяжение преобладает, и в этом случае групповая скорость

Таблица 6.1

Волны в глубокой воде

λ, *см*	ν, *гц*	$v_ф$, *см/сек*	$v_{гр}$, *см/сек*	$v_{гр}/v_ф$
0,10	675	67,5	101,4	1,50
0,25	172	43,0	63,7	1,48
0,50	62,5	31,2	44,4	1,42
1,0	24,7	24,7	30,7	1,24
1,7	13,6	23,1	23,1	1,00
2	11,6	23,2	21,4	0,92
4	6,80	27,2	17,8	0,65
8	4,52	36,2	19,6	0,54
16	3,14	50,3	25,8	0,51
32	2,22	71	35,8	0,50
100	1,25	125	62,5	0,50
200	0,884	177	88,5	0,50
400	0,625	250	125	0,50
800	0,442	354	177	0,50
1600	0,313	500	250	0,50
3200	0,221	708	354	0,50
6400	0,156	1000	500	0,50

в 1,5 раза больше фазовой. Для длин волн, много больших 1,7 *см*, преобладает сила тяжести и групповая скорость равна половине фазовой (см. задачу 6.19). В табл. 6.1 приведены некоторые параметры для волн в воде при длине волн от 1 *мм* до 64 *м*.

Приложение. Рассмотрим пример, в котором использованы данные табл. 6.1. Предположим, что вы находитесь на морском берегу и хотите знать длину волны в открытом океане на расстоянии порядка 20—30 миль от берега.

Засекая время по часам, вы находите, что в среднем о берег разбивается 12 волн в минуту, т. е. $\nu=0{,}2$ *гц*. Предполагая, что погода не менялась в течение нескольких дней, можно считать, что волны соответствуют установившемуся процессу. Поэтому в открытом море ν также будет равно 0,2 *гц*. (Нужно заметить, что длины волн у берега и в открытом море будут различны, поскольку *длина волны зависит от глубины*. Однако *в установившихся вынужденных колебаниях частота не будет зависеть от глубины*.) Из табл. 6.1 мы находим, что этой частоте соответствует длина волны порядка 40 *м*.

Теперь нас интересует путь, пройденный гребнем, который сейчас разбивается о берег, в течение предыдущего часа. Будем считать, что большая часть пути была пройдена по глубокой воде. По табл. 6.1 находим, что фазовая скорость равна 8 *м/сек*, или около 29 000 *м/час*, т. е. за час гребень прошел около 30 *км*.

6.3. Импульсы

Будем рассматривать случай, когда в точке $z=0$ возмущение, создаваемое передатчиком, является суперпозицией большого числа гармонических колебаний равной амплитуды, частоты которых мало отличаются друг от друга и заключены в узком диапазоне частот от самой низкой ω_1 до самой высокой ω_2. Мы рассмотрели более простую задачу с двумя частотами и показали, что в этом случае возникает модулированное колебание, которое распространяется с групповой скоростью.

Векторная диаграмма. Прежде чем перейти к рассмотрению более сложной задачи с многими гармоническими компонентами, близкими по частоте, разберем случай двух частот, используя метод *векторных диаграмм* (см. том I, стр. 125). Гармоническое колебание

$$\psi(t)=A\cos\omega t \tag{34}$$

является вещественной частью комплексного гармонического колебания

$$\psi_к(t)=Ae^{i\omega t}. \tag{35}$$

Здесь индекс «к» показывает, что функция комплексная. Графически $\psi_к(t)$ можно представить на комплексной плоскости вектором длиной A, вращающимся против часовой стрелки с угловой частотой ω. [Проекция этого вектора на горизонтальную ось (т. е. ось вещественных значений) дает гармоническую функцию (34).] Будем