

в 1,5 раза больше фазовой. Для длин волн, много больших 1,7 см, преобладает сила тяжести и групповая скорость равна половине фазовой (см. задачу 6.19). В табл. 6.1 приведены некоторые параметры для волн в воде при длине волн от 1 мм до 64 м.

П р и л о ж е н и е. Рассмотрим пример, в котором использованы данные табл. 6.1. Предположим, что вы находитесь на морском берегу и хотите знать длину волны в открытом океане на расстоянии порядка 20—30 миль от берега.

Засекая время по часам, вы находите, что в среднем о берег разбивается 12 волн в минуту, т. е. $v=0,2$ гц. Предполагая, что погода не менялась в течение нескольких дней, можно считать, что волны соответствуют установившемуся процессу. Поэтому в открытом море v также будет равно 0,2 гц. (Нужно заметить, что длины волн у берега и в открытом море будут различны, поскольку *длина волны зависит от глубины*. Однако *в установившихся вынужденных колебаниях частота не будет зависеть от глубины*.) Из табл. 6.1 мы находим, что этой частоте соответствует длина волны порядка 40 м.

Теперь нас интересует путь, пройденный гребнем, который сейчас разбивается о берег, в течение предыдущего часа. Будем считать, что большая часть пути была пройдена по глубокой воде. По табл. 6.1 находим, что фазовая скорость равна 8 м/сек, или около 29 000 м/час, т. е. за час гребень прошел около 30 км.

6.3. Импульсы

Будем рассматривать случай, когда в точке $z=0$ возмущение, создаваемое передатчиком, является суперпозицией большого числа гармонических колебаний равной амплитуды, частоты которых мало отличаются друг от друга и заключены в узком диапазоне частот от самой низкой ω_1 до самой высокой ω_2 . Мы рассмотрели более простую задачу с двумя частотами и показали, что в этом случае возникает модулированное колебание, которое распространяется с групповой скоростью.

Векторная диаграмма. Прежде чем перейти к рассмотрению более сложной задачи с многими гармоническими компонентами, близкими по частоте, разберем случай двух частот, используя метод *векторных диаграмм* (см. том I, стр. 125). Гармоническое колебание

$$\psi(t) = A \cos \omega t \quad (34)$$

является вещественной частью комплексного гармонического колебания

$$\psi_k(t) = A e^{i\omega t}. \quad (35)$$

Здесь индекс «к» показывает, что функция комплексная. Графически $\psi_k(t)$ можно представить на комплексной плоскости вектором длиной A , вращающимся против часовой стрелки с угловой частотой ω . [Проекция этого вектора на горизонтальную ось (т. е. ось вещественных значений) дает гармоническую функцию (34).] Будем

делать мгновенные стробоскопические «снимки» этого вектора. Если частота стробоскопа совпадает с частотой вращения вектора, то на каждом мгновенном снимке вектор будет в одной и той же позиции (рис. 6.2, а). Если угловая частота вращения вектора ω чуть-чуть больше частоты стробоскопа ω_c , то на последовательности снимков вектор будет вращаться вперед (против часовой стрелки) с угловой частотой $\omega - \omega_c$ (рис. 6.2, б). Если $\omega - \omega_c < 0$, мы увидим

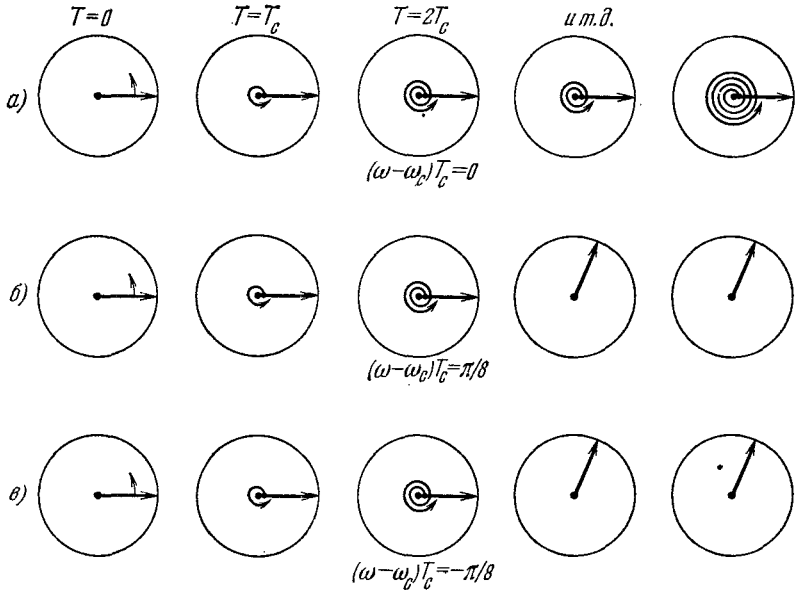


Рис. 6.2. Стробоскопические моментальные «снимки» вращающегося комплексного вектора $\exp i\omega t$.
 Назначение спиралей — помочь сосчитать число оборотов вектора. Интервал времени между «снимками» $T_c = 2\pi/\omega_c$.

вектор вращающимся по часовой стрелке (рис. 6.2, в). Индекс «с» указывает на принадлежность данной величины (ω или T) к стробоскопу.

Теперь рассмотрим суперпозицию двух гармонических волн с одинаковой амплитудой, но немного разными частотами:

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t. \quad (36)$$

Пусть частота стробоскопа равна

$$\omega_c = \omega_{cp} = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2). \quad (37)$$

Таким образом (считаем, что $\omega_2 - \omega_1 > 0$), $\omega_2 - \omega_{cp} > 0$ и $\omega_1 - \omega_{cp} < 0$. Напомним, что $\psi(t)$ может быть записано [уравнение (2), п. 6.2)] как произведение медленно меняющейся амплитуды $A(t)$ на быстрые колебания, происходящие с частотой ω_{cp} . Так как частота

стробоскопа равна $\omega_{\text{ср}}$, то мы не увидим быстрых колебаний, а увидим только изменение $A(t)$. В результате получим серию мгновенных «снимков», показанных на рис. 6.3.

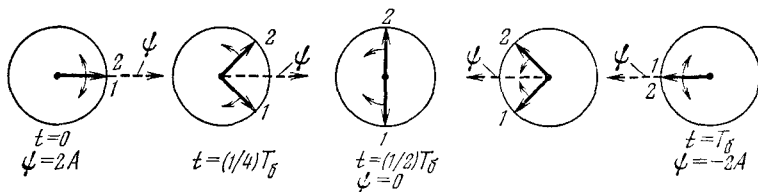


Рис. 6.3. Биение в суперпозиции $\psi(t) = A \exp i\omega_1 t + A \exp i\omega_2 t$. Стробоскопические «снимки» производятся с частотой $\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{ср}}$ и покрывают целый период биений T_b .

В этом примере частота биений равна $1/4$ средней частоты: $\omega_2 - \omega_1 = 1/4 \omega_{\text{ср}}$.

Образование импульса. Теперь рассмотрим случай, когда волновая функция $\psi(t)$ является суперпозицией очень большого числа колебаний равной амплитуды A , с нулевыми начальными фазами и частотами, которые равномерно распределены в диапазоне от ω_1 до ω_2 . Соответствующая стробоскопическая векторная диаграмма показана на рис. 6.4.

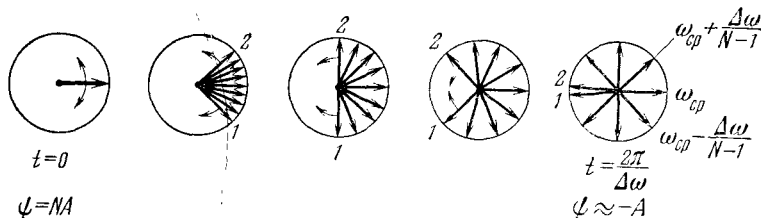


Рис. 6.4. Стробоскопические «снимки» N колебаний ($N=9$), равномерно распределенных в интервале частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Стробоскопическая частота равна $\omega_{\text{ср}}$. Вектор колебаний $\omega = \omega_{\text{ср}}$ кажется неподвижным.

В момент $t=0$ полная амплитуда $A(t)$ суперпозиции $\psi(t)$ равна NA . Через время t , немного меньшее, чем время $2\pi/\Delta\omega$ (равное периоду биений между крайними частотами ω_1 и ω_2), полная амплитуда $A(t)$ равна нулю, так как векторы, соответствующие разным частотам, равномерно распределены по окружности. (Когда $N \rightarrow \infty$, этот первый нуль в $A(t)$ возникает точно при $t=2\pi/\Delta\omega$.) В течение долгого времени после $t=2\pi/\Delta\omega$ векторы будут иметь все еще достаточно широкое распределение по фазе (однако уже не совершенно равномерное), так что в сумме дадут небольшое значение $A(t)$. Векторы снова окажутся в фазе и амплитуда $A(t)$ снова достигнет максимума, равного NA , лишь когда биения между соседними по частоте колебаниями опять достигнут максимума. Так как соседние колебания отличаются по частоте на $\Delta\omega/(N-1)$, то период биений между ними равен произведению $(N-1)$ на период биений, соответствующую

щий разности крайних частот. Если $N \rightarrow \infty$, то общая амплитуда остается малой практически «навсегда», никогда не возвращаясь к начальному значению. В этом случае мы имеем то, что называют *импульсом*, т. е. функцию времени, которая отлична от нуля только в течение ограниченного интервала времени.

Длительность импульса. Обозначим длительность импульса, т. е. интервал времени, в течение которого функция $\psi(t)$ «достаточно велика», через Δt . Этот интервал простирается от момента $t=0$, когда все компоненты между ω_1 и ω_2 находятся в фазе, до момента t_1 , когда все компоненты равномерно распределены по фазе (по кругу в комплексной плоскости), т. е.

$$\Delta t \approx t_1, \quad (38)$$

где

$$(\omega_2 - \omega_1) t_1 = 2\pi. \quad (39)$$

Имеем

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi, \quad (40)$$

или

$$\boxed{\Delta\nu \Delta t \approx 1.} \quad (41)$$

Соотношение (41) является частным случаем общего и очень важного соотношения между продолжительностью Δt импульса $\psi(t)$ и полосой в частотном спектре гармонических компонент, суперпозиция которых образует импульс. Оно имеет необычайно широкое применение во всех областях физики, независимо от того, будет ли явление, протекающее в виде импульса, функцией времени или какой-либо другой переменной. Соотношение (41) не зависит от деталей формы импульса $\psi(t)$. Важно лишь, чтобы функция $\psi(t)$ действительно представляла собой импульс, т. е. была отлична от нуля в течение конечного интервала длительностью Δt .

Произведение частотного интервала на временной интервал. Общее соотношение между интервалом частот $\Delta\nu$ и длительностью импульса Δt имеет вид

$$\boxed{\Delta\nu \Delta t \geq 1.} \quad (42)$$

Знак неравенства отражает тот факт, что в результате суперпозиции N гармонических колебаний, занимающих диапазон частот $\Delta\nu$, мы получим импульс длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$ только при определенном выборе фаз складываемых колебаний. В примере рис. 6.4 все компоненты имеют одинаковую фазу. Если бы их фазовые постоянные не были равны (они равны в момент времени $t=0$ в нашем примере), то суперпозиция $\psi(t)$ никогда бы не достигла максимального значения. В этом случае интервал времени, соответствующий импульсу $\psi(t)$, будет более длительным. В пределе, когда фазы имеют случайные значения, продолжительность Δt может стать произвольно большой. В этом предельном случае не существует сколь угодно различимого импульса.

Пример с роялем. Предположим, что мы ударили по всем клавишам рояля одновременно. Результирующий звук занимает диапазон частот около 4000 гц. Если все струны были возбуждены точно в фазе, мы услышали бы очень громкий звук, продолжительностью около $\Delta t \approx 1/4000 \approx 0,2$ мсек. Если мы ударяем по клавишам руками или каким-либо протяженным предметом (чтобы захватить сразу все клавиши), то неизбежно получим разницу в начальных фазах, которая, очевидно, как минимум имеет порядок 10^{-3} сек. В этом случае фазы распределены существенно случайно и звук будет иметь характер продолжительного шума, а не импульса.

Гармоническое колебание ограниченной длительности. Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий соотношение (41). Предположим, что мы включили генератор, установившийся режим которого достигается за несколько периодов. Генератор выдает несколько циклов колебаний $A \cos \omega_0 t$ с амплитудой A и частотой ω

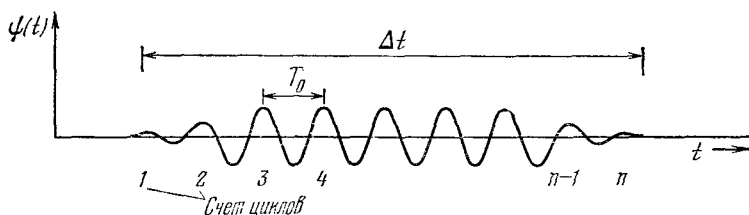


Рис. 6.5. Гармонические колебания конечной продолжительности.

и выключается, также быстро успокаиваясь (рис. 6.5). Колебания длятся конечное время и поэтому не являются чистыми гармоническими колебаниями с частотой ω_0 . Конечно, частота $\omega = \omega_0$ преобладает, но это не единственная частота, которая присутствует в образовавшемся импульсе. Нашему импульсу или цугу колебаний должна соответствовать полоса частот с центром в $\omega \approx \omega_0$. Покажем, как грубо оценить ширину $\Delta\omega$ этой полосы. Используя определение частоты как числа колебаний в секунду, вычислим полное число циклов работы осциллятора в течение интервала времени Δt . Если это число равно n , мы получаем, что доминирующее значение

$$\nu = \frac{n}{\Delta t}. \quad (43)$$

В пределе эта частота, в соответствии с рис. 6.5, должна быть равна $\nu_0 = 1/T_0$. Однако из рис. 6.5 следует, что n невозможно определить точно, так как на обоих концах импульса существует неопределенность порядка $\pm 1/2$ цикла и мы не можем решить, следует ли прибавить еще одно колебание или импульс уже затух. Вы можете сказать, что если n достаточно велико, то ошибка, связанная с неопределенностью в одно колебание, мала. Это верно, но мы ищем именно эту ошибку. Из выражения (43) следует, что неопределенность в n , равная одному колебанию, приводит к ширине полосы

частот, равной

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta n}{n} \approx \frac{1}{n}. \quad (44)$$

Перемножая уравнения (43) и (44), получим $\Delta\nu \approx 1/\Delta t$.

Пример 6. Телевизионный диапазон частот. Изображение на экране телевизора представляет собой прямоугольную сетку, состоящую из белых и черных точек. Данная точка будет «белой», если это место фосфоресцирующего телевизионного экрана было облучено (в течение $1/50$ сек) электронным пучком. Точки разделены расстоянием около 1 мм. Размеры обычного экрана близки к 50×50 см². Таким образом, экран имеет 500 линий, а в каждой линии 500 точек. Соответственно на всем экране можно разместить 25×10^4 «белых» точек. Каждая точка вновь «ощупывается» электронным лучом через $1/25$ сек. (При одном пробеге по экрану пучок просматривает горизонтальную линию. При следующем пробеге просматривается соседняя линия. Таким образом, данная область экрана, включающая много горизонтальных линий, имеет частоту мерцаний, равную 50 гц.)

Итак, число команд электронному пучку, содержащих приказание «выключиться» или «включиться», составляет $25 \cdot 25 \cdot 10^4$ или $6,25 \cdot 10^6$ в 1 сек.

Из выполненного расчета следует, что напряжение в передающей и приемной антеннах должно иметь порядок 10^7 всплесков в секунду. Длительность каждого всплеска (импульса) не должна быть больше $\Delta t \sim 10^{-7}$ сек для избежания перекрытия. Поэтому необходимый диапазон частот равен $\Delta\nu \approx 1/\Delta t \sim 10^7$ гц ~ 10 Мгц. Несущая частота для телевизионного канала лежит в диапазоне от 50 до 210 Мгц. В соответствии с тем, что было сказано о радиопередаче с амплитудной модуляцией, можно думать, что полоса в 10 Мгц должна быть расположена симметрично относительно несущей частоты. На самом же деле несущая частота и одна боковая полоса «подавляются». Они отфильтровываются и не поступают к передающей антенне. (Однако они генерируются в приемнике, будучи восстановленными по информации, получаемой из оставшейся боковой полосы.) Такой способ передачи называется передачей одной боковой полосы. Он требует полосы частот в два раза меньшей, т. е. всего 5 Мгц. Таким образом, между 55 и 210 Мгц можно уместить 30 телевизионных каналов, каждый из которых занимает полосу в 5 Мгц.

Пример 7. Использование видимого света для радиовещания. В этом примере мы рассмотрим передачу информации с помощью лазера. Использование лазеров открывает широкие возможности для передачи информации электромагнитным излучением на частоте видимого света. Сейчас многие исследователи заняты поиском методов, которые позволили бы модулировать выходной свет лазера, аналогично тому как в радио или телепередатчике модулируется несущая частота. Предположим, что такая техника модуляции све-

того пучка лазера уже разработана в широком диапазоне частот видимого света. Нас интересует, как много телевизионных каналов можно было бы уместить в частотном диапазоне видимого света. Пусть в качестве несущей частоты используется видимый свет лазера. На один телевизионный канал нужна полоса в 10 Мгц . Длины волн видимого света занимают диапазон от 6500 \AA (красный) до 4500 \AA (голубой), т. е. частоты от $\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^{10}/6,5 \cdot 10^{-5} \approx 4,6 \cdot 10^{14} \text{ гц} = 4,6 \cdot 10^8 \text{ Мгц}$ до $\nu = 3 \cdot 10^{10}/4,5 \cdot 10^{-5} \approx 6,6 \cdot 10^{14} \text{ гц} = 6,6 \cdot 10^8 \text{ Мгц}$. Таким образом, доступный частотный диапазон заключен в пределах от $4,6 \cdot 10^8 \text{ Мгц}$ до $6,6 \cdot 10^8 \text{ Мгц}$, т. е. занимает полосу шириной в $2 \cdot 10^8 \text{ Мгц}$. Такая полоса позволила бы создать $2 \cdot 10^7$ неперекрывающихся телевизионных каналов, каждый с полосой в 10 Мгц .

Форма импульса $\psi(t)$, образованного «прямоугольным» частотным спектром. Найдем точное выражение для импульса $\psi(t)$, образованного суперпозицией N различных гармонических компонент, имеющих равную амплитуду A , одинаковую начальную фазу (равную нулю) и частоты, равномерно распределенные между самой низкой частотой ω_1 и самой высокой частотой ω_2 . На рис. 6.4 представлены мгновенные стробоскопические «снимки» для такой суперпозиции, состоящей из 9 компонент. В общем случае мы имеем

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos (\omega_1 + \delta\omega)t + \\ + A \cos (\omega_1 + 2\delta\omega)t + \dots + A \cos \omega_2 t, \quad (45)$$

где $\delta\omega$ — частота, на которую отличаются две соседние компоненты:

$$\delta\omega \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{N - 1} = \frac{\Delta\omega}{N - 1}. \quad (46)$$

Формула (45) представляет $\psi(t)$ в виде *линейной суперпозиции большого числа строго гармонических компонент*. Постараемся теперь выразить $\psi(t)$ в виде *почти гармонического колебания с одной «быстрой» частотой $\omega_{\text{ср}}$* , равной

$$\omega_{\text{ср}} = 1/2 (\omega_1 + \omega_2), \quad (47)$$

и почти постоянной (относительно временного масштаба быстрых колебаний) амплитудой $A(t)$. На основании имеющегося у нас опыта по нахождению суперпозиции двух гармонических колебаний (п. 5.2) мы ожидаем, что выражение для $\psi(t)$ будет иметь вид

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{\text{ср}} t. \quad (48)$$

Мы будем искать $\psi(t)$ именно в таком виде и покажем, что если полоса $\Delta\omega$ мала по сравнению с $\omega_{\text{ср}}$, то $A(t)$ медленно изменяется в масштабе времени быстрых колебаний. (Наш ответ будет точным независимо от этого условия.) Таким образом, мы сможем представить $\psi(t)$ как амплитудно-модулированное почти гармоническое колебание. Мы увидим, что $\psi(t)$ имеет форму импульса. Этот результат подтвердит наши качественные рассуждения, иллюстрируемые рис. 6.4. Точное выражение для $\psi(t)$ позволит понять, что мы имеем

в виду, утверждая, что произведение ширины частотного спектра импульса на его длительность близко к единице.

Для упрощения вычислений будем делать их в комплексной форме. Выражение (45) представляет собой произведение константы A на вещественную часть комплексной функции $f(t)$:

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i(\omega_1 + \delta\omega)t} + e^{i(\omega_1 + 2\delta\omega)t} + \dots + e^{i(\omega_1 + \Delta\omega)t} \equiv e^{i\omega_1 t} S, \quad (49)$$

где S [обозначим $e^{i\delta\omega t} = a$ и $\Delta\omega = (N - 1)\delta\omega$] — сумма геометрической прогрессии:

$$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}.$$

Тогда

$$aS = a + a^2 + \dots + a^{N-1} + a^N, \quad (a - 1)S = a^N - 1,$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN\delta\omega t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1} = \frac{e^{1/2 i N \delta\omega t}}{e^{1/2 i \delta\omega t}} \cdot \left[\frac{e^{1/2 i N \delta\omega t} - e^{-1/2 i N \delta\omega t}}{e^{1/2 i \delta\omega t} - e^{-1/2 i \delta\omega t}} \right] = \\ &= e^{1/2 i (N-1) \delta\omega t} \cdot \frac{\sin 1/2 N \delta\omega t}{\sin 1/2 \delta\omega t} = e^{1/2 i \Delta\omega t} \frac{\sin 1/2 N \delta\omega t}{\sin 1/2 \delta\omega t}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} S = e^{i[\omega_1 + 1/2 \Delta\omega]t} \frac{\sin 1/2 N \delta\omega t}{\sin 1/2 \delta\omega t} = e^{i\omega_{cp} t} \frac{\sin 1/2 N \delta\omega t}{\sin 1/2 \delta\omega t}.$$

Наконец, имея в виду, что $\psi(t)$ есть произведение константы A на вещественную часть $f(t)$, имеем

$$\psi(t) = A \cos \omega_{cp} t \frac{\sin 1/2 N \delta\omega t}{\sin 1/2 \delta\omega t},$$

т. е.

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{cp} t, \quad (50)$$

где

$$A(t) = A \frac{\sin 1/2 N \delta\omega t}{\sin 1/2 \delta\omega t}. \quad (51)$$

Выражение (51) для $A(t)$ является точным. Посмотрим, следует ли из него простая формула для случая биений с двумя компонентами. Полагая $N=2$ в (51) и пользуясь равенством $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$, где $x = 1/2 \delta\omega t$, имеем:

$$\begin{aligned} \text{для } N=2 \quad \psi(t) &= [2A \cos 1/2 \delta\omega t] \cos \omega_{cp} t = \\ &= 2A \cos 1/2 (\omega_1 - \omega_2) t \cos \omega_{cp} t, \end{aligned}$$

т. е. выражение, полученное для биений в п. 1.5.

Уравнение (51) можно представить в более удобной форме, выразив постоянную A через $A(0)$ в момент $t=0$. Чтобы найти значение $A(0)$, нужно найти, к чему стремится предел выражения $\sin N\theta/\sin \theta$ при θ , стремящемся к нулю. Используя разложение в ряд Тейлора в точке $t=0$ и имея в виду, что $\theta = 1/2 \delta\omega t$, получим

$$\frac{\sin N\theta}{\sin \theta} = \frac{N\theta - \frac{1}{6}(N\theta)^3 + \dots}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots}. \quad (52)$$

Для достаточно малых θ можно пренебречь всеми членами в разложении, кроме первого (это относится как к числителю, так и к знаменателю). Тогда получим

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right\} = N. \quad (53)$$

Из (51) следует:

$$A(0) = NA, \quad A = \frac{A(0)}{N}, \quad (54)$$

т. е.

$$A(t) = A(0) \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{N \sin \frac{1}{2} \delta \omega t}. \quad (55)$$

Теперь рассмотрим случай, когда N очень велико. При достаточно большом N расстояние $\delta\omega$ между соседними гармоническими компонентами станет настолько малым, что его невозможно будет обнаружить с помощью имеющихся физических приборов. В этом случае можно считать, что мы имеем непрерывное распределение гармонических компонент по частоте. Такое N , при котором все вышесказанное справедливо, условно можно называть бесконечно большим. Для бесконечно большого N можно пренебречь разницей между N и $N - 1$. Тогда имеем:

$$\text{для } N \text{ бесконечно большого } N\delta\omega \approx (N-1)\delta\omega = \Delta\omega. \quad (56)$$

Таким образом, мы устремляем N к бесконечности, а $\delta\omega$ к нулю, но при этом их произведение остается равным ширине полосы $\Delta\omega$. В знаменателе (55), равно $\sin \frac{1}{2} \delta\omega t$, положим, что $\delta\omega$ стремится к нулю (но t не стремится к бесконечности, так как импульс обладает определенной длительностью). Тогда в разложении $\sin \frac{1}{2} \delta\omega t$ в ряд Тейлора можно пренебречь всеми членами, кроме первого. В результате имеем

$$A(t) = A(0) \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{N \sin \frac{1}{2} \delta \omega t} = A(0) \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta \omega t}{N \cdot \frac{1}{2} \delta \omega t} = A(0) \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta \omega t}{\frac{1}{2} \Delta \omega t}, \quad (57)$$

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{cp} t. \quad (58)$$

Вернемся теперь к выражению (45) для $\psi(t)$ как суперпозиции гармонических колебаний и перепишем его, имея в виду, что $\delta\omega \rightarrow 0$. Используя выражения (54) и (56), можем записать

$$A = \frac{A(0)}{N} = \frac{A(0)}{\Delta\omega} \delta\omega. \quad (59)$$

Суперпозиция (45) может быть записана в виде

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega} [\delta\omega \cos \omega_1 t + \delta\omega \cos (\omega_1 + \delta\omega) t + \dots + \delta\omega \cos \omega_2 t]. \quad (60)$$

При $\delta\omega \rightarrow 0$ выражение в квадратных скобках представляет собой интеграл от $\cos \omega t \delta\omega$, взятый в пределах от ω_1 до ω_2 . Поэтому уравнение (60) примет вид

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega t d\omega. \quad (61)$$

Интеграл Фурье. Выражение (61) является примером *непрерывной суперпозиции гармонических колебаний*. Его называют также *интегралом Фурье*. Оказывается, что любая («разумная») непериодическая функция $\psi(t)$ может быть представлена (в общем случае) интегралом Фурье:

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (62)$$

Непрерывные функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ называются *коэффициентами Фурье* по аналогии с коэффициентами разложения в ряд Фурье.

Сравнивая формулы (61) и (62), мы видим, что функция $\psi(t)$, определяемая выражениями (57) и (58), имеет следующие коэффициенты Фурье:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= 0 && \text{для всех } \omega, \\ B(\omega) &= 0 && \text{для } \omega \text{ вне интервала } (\omega_1, \omega_2), \\ B(\omega) &= \frac{A(0)}{\Delta\omega} && \text{для } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Частотный спектр Фурье. График зависимости коэффициентов Фурье от частоты называется *частотным спектром* $\psi(t)$. Спектр, определяемый выражением (63), является простейшим частотным спектром. Он постоянен в пределах всего диапазона частот $\Delta\omega$ и равен нулю вне его. Такой спектр иногда называют «прямоугольным» в соответствии с его формой. [Заметим, что в общем случае мы должны рассматривать два графика: один для $A(\omega)$ и другой для $B(\omega)$.]

На рис. 6.6 показана наша функция $\psi(t)$ и ее коэффициенты Фурье $B(\omega)$. Заметим, что огибающая $A(t)$ первый раз обращается в нуль в $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$. Это — время, необходимое для равномерного распределения по фазе всех гармонических компонент в интервале 2π (см. мгновенные стробоскопические снимки на рис. 6.4). Интервал времени Δt , когда амплитуда $A(t)$ относительно велика, можно было бы определить как интервал между значениями $t = -t_1$ и $t = +t_1$. Однако этот интервал слишком велик и более разумно за Δt принять интервал, вне которого амплитуда $A(t)$ никогда не достигает своего значения в интервале. Для рассматриваемого случая это означает, что за Δt можно взять половину интервала между двумя нулями в $t = \pm t_1$. Таким образом, мы можем определить длительность импульса как

$$\Delta t = t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

откуда

$$\Delta\nu \Delta t = 1. \quad (64)$$

В уравнении (64) стоит знак равенства вместо знака приближенного равенства, так как мы точно определили, что подразумевается под длительностью импульса Δt . В соответствии с нашим определением $A(t)$ на концах интервала Δt равна

$$A\left(\frac{t_1}{2}\right) = A(0) \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} A(0). \quad (65)$$

Таким образом, в начале и в конце интервала Δt амплитуда $A(t)$ равна $2/\pi$ от своего максимального значения.

Энергия колебаний «почти гармонического осциллятора», смещение которого равно $\psi(t) = A(t) \cos \omega_{cp} t$, пропорциональна $A^2(t)$.

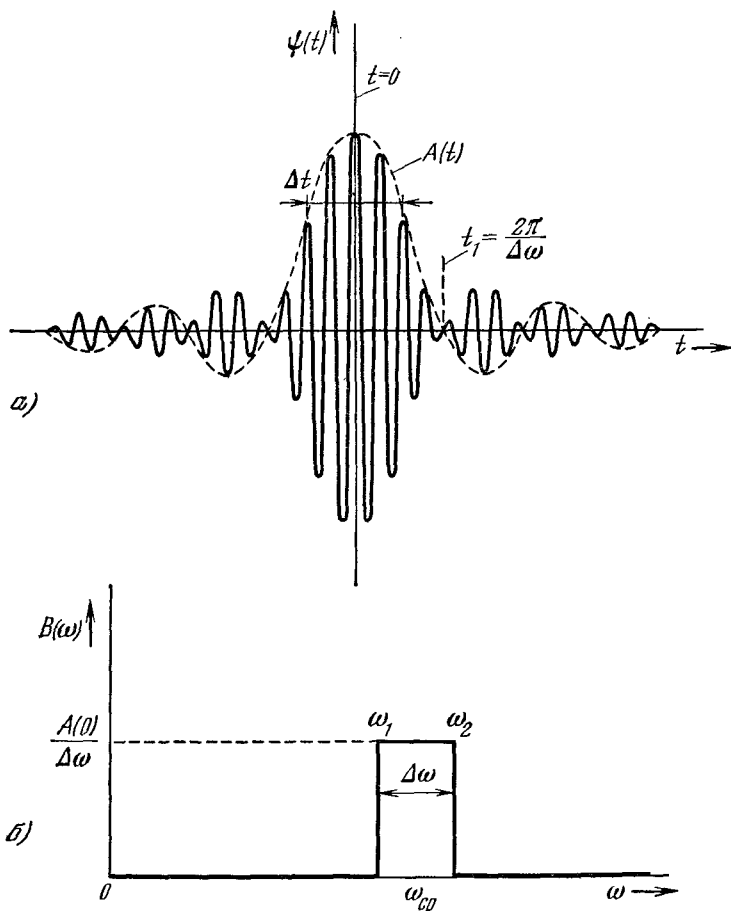


Рис. 6.6. Фурье-анализ непериодической функции.

а) Импульс $\psi(t)$, форма которого выражается равенствами (57) и (58); б) непрерывный частотный спектр фурье-коэффициентов, определяемый равенствами (63). [Так как $\psi(t)$ — четная функция времени t , фурье-коэффициент $A(\omega)$ равен 0 для всех ω .]

Поэтому энергия максимальна в центре импульса ($t=0$) и уменьшается на концах интервала Δt в $(2/\pi)^2 = 0,406$ раза. Таким образом, с энергетической точки зрения Δt соответствует интервалу, в течение которого осциллятором выдается около 60% запасенной в нем энергии.

В п. 6.4 мы рассмотрим другие примеры импульсов и соответствующие им интегралы Фурье.

Пакет бегущих волн. Предположим, что в точке $z=0$ «движение» передатчика похоже на импульс, показанный на рис. 6.6. Так как время, в течение которого передатчик излучает волны в среду, ограничено и волны распространяются от передатчика, то они будут представлять собой импульсы конечной протяженности в пространстве. Такой импульс называется *волновым пакетом* или *волновой группой*. Волновая группа распространяется с групповой скоростью. Поскольку k и ω связаны дисперсионным соотношением $k(\omega)$, то существование полосы частот $\Delta\omega$ приводит к появлению соответствующей полосы волновых чисел Δk (и соответственно длин волн) в волновом пакете. В соответствии с основной частотой ω_0 будет существовать и основное волновое число $k_0 = k(\omega_0)$ [т. е. k_0 получается подстановкой $\omega = \omega_0$ в дисперсионное соотношение $k = k(\omega)$]. Полоса Δk центрирована относительно k_0 . Ее ширина получается дифференцированием дисперсионного соотношения в точке $\omega = \omega_0$:

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_{гр}}. \quad (66)$$

Индекс нуль означает, что производная вычисляется в центре полосы. Мы пренебрегаем членами более высокого порядка, чем первый, в разложении дисперсионного соотношения в ряд Тейлора. Уравнение (66) является первым членом этого разложения.]

Произведение длины пакета на ширину полосы волновых чисел. Пакет длиной Δz , распространяющийся с групповой скоростью $v_{гр}$, проходит мимо данной точки z за время Δt . В этом случае имеем

$$\Delta z \approx v_{гр} \Delta t. \quad (67)$$

Перемножая правые и левые части уравнений (66) и (67), получим

$$\Delta k \Delta z \approx \Delta\omega \Delta t. \quad (68)$$

Так как $\Delta\omega \Delta t \geq 2\pi$, то и $\Delta k \Delta z \geq 2\pi$. Используя волновое число $\sigma \equiv k/2\pi = \lambda^{-1}$, имеем

$$\Delta\sigma \Delta z \geq 1. \quad (69)$$

Это соотношение полностью аналогично имеющему общий характер соотношению $\Delta\nu \Delta t \geq 1$, но относится к импульсу в пространстве, а не во времени.

Другой вывод уравнения (69) заключается в рассмотрении неопределенности в числе циклов колебаний, укладывающихся в Δz . Величина σ (в циклах на единицу длины) равна

$$\sigma \approx \frac{\text{циклы} \pm 1/2}{\Delta z}. \quad (70)$$

Отсюда следует, что неопределенность в ширине полосы близка к $1/\Delta z$. Этот вывод для координаты аналогичен сделанному выше выводу (44) соотношения $\Delta\nu \Delta t = 1$ для времени.

«Расползание» волнового пакета со временем. Следует обратить внимание на то, что если пакет распространяется в диспергирующей среде, то его длина не остается постоянной. Пакет растягивается по мере распространения.

Причина такого расползания в том, что групповая скорость $v_{гр} = d\omega/dk$ зависит от k (или ω). Поэтому полоса Δk определяет соответствующую полосу групповых скоростей $\Delta v_{гр}$:

$$\Delta v_{гр} = \left(\frac{dv_{гр}}{dk} \right)_0 \Delta k = \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 \Delta k. \quad (71)$$

Волновой пакет в момент $t=0$ имел длину $(\Delta z)_0$, в момент времени t будет иметь длину $(\Delta z)_t$, приблизительно равную

$$(\Delta z)_t \approx (\Delta z)_0 + (\Delta v_{гр}) t. \quad (72)$$

Соответственно увеличится время Δt , необходимое пакету для прохождения точки z . [Уравнение (68) справедливо для любого момента времени, так как Δk и $\Delta\omega$ — постоянные величины.]

Из-за размывания пакета соотношения $\Delta\sigma \Delta z \approx 1$ и $\Delta v \Delta t \approx 1$ выполняются только в начальный момент времени $t=0$. Для того чтобы соотношение $\Delta v \Delta t \approx 1$ было справедливо, необходимо, чтобы все гармонические составляющие были в правильной фазе. Это имеет место для $t=0$. Однако как только пакет начал распространяться в среде и прошел некоторое расстояние, то из-за дисперсии среды различные части пакета будут иметь разные скорости и все составляющие в диапазоне Δk (или $\Delta\omega$) не останутся в фазе (в какой-то точке z). Таким образом, фазы различных частотных компонент

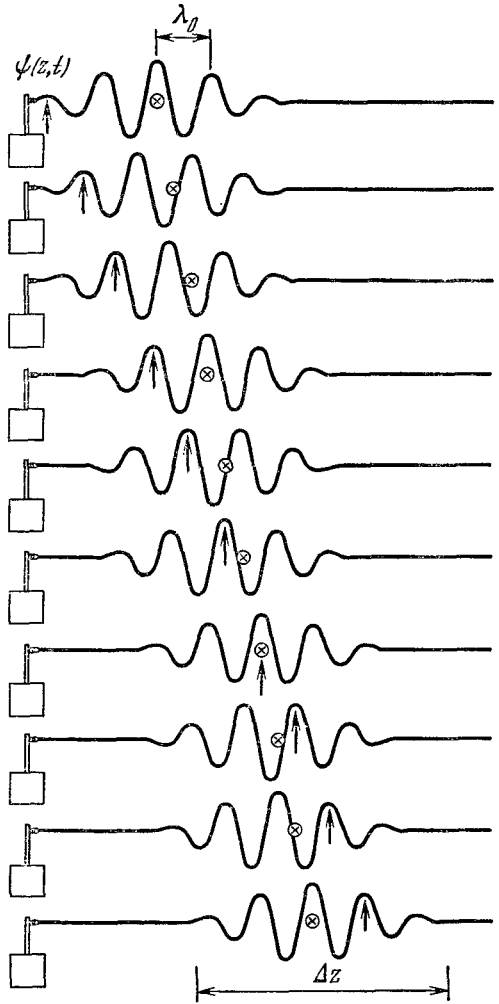


Рис. 6.7. Волновой пакет, для которого фазовая скорость в два раза больше групповой.

Стрелки перемещаются с фазовой скоростью, следуя за точкой постоянной фазы в колебании с доминирующей частотой. Кресты перемещаются с групповой скоростью. Они следуют за пакетом.

будут отличаться друг от друга, и мы получим, что $\Delta\sigma\Delta z \approx \Delta v\Delta t > 1$ для $t \neq 0$. Если же мы имеем дело со средой без дисперсии, то растяжения пакета не происходит и соотношение $\Delta\sigma\Delta z \approx \Delta v\Delta t \approx 1$ сохраняется.

Волновые пакеты в воде. Волновые пакеты, распространяющиеся по кругам на поверхности воды, можно образовать, бросая в пруд гальку. При некотором опыте удается следить за распространением групп и наблюдать, как отдельные гребни возникают позади группы, проходят через нее и рассыпаются. (Это явление связано с тем, что для длин волн с $\lambda > 1,7$ см, возбуждаемых камнем средней величины, фазовая скорость больше групповой. Картина распространения волновой группы, для которой фазовая скорость в два раза больше групповой, показана на рис. 6.7.) Мы настоятельно рекомендуем понаблюдать за распространением волновых групп. Вначале возникнут некоторые трудности, связанные с довольно большой скоростью распространения группы, однако усилия будут оправданы. (См. домашние опыты.)

6.4. Фурье-анализ импульсов

В п. 6.3 мы впервые встретились с представлением функции времени $\psi(t)$ в виде интеграла Фурье. Здесь мы покажем, как найти непрерывный частотный спектр для любого «разумного» импульса, а также приведем несколько примеров, представляющих большой интерес для различных областей физики.

Импульсы ограниченной длительности. Предположим, что функция $\psi(t)$ имеет форму импульса ограниченной длительности (рис. 6.8): она равна нулю до момента времени t_0 и после момента времени

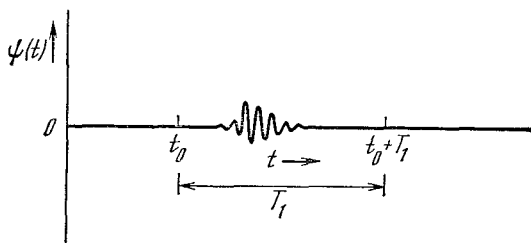


Рис. 6.8. Импульс $\psi(t)$.

Для времен более ранних, чем t_0 , и более поздних, чем $t_0 + T_1$, функция $\psi(t) = 0$.

$t_0 + T_1$. Таким образом, мы предполагаем, что существует конечный интервал времени T_1 , внутри которого происходят колебания вида $\psi(t)$ (см. рис. 6.8). Величина интервала T_1 , в общем, произвольна, однако в дальнейшем мы будем считать ее очень большой (но не бесконечно большой). (Величина $\nu_1 = 1/T_1$ будет нашей «единицей частоты», которую мы сможем выбрать сколь угодно малой.)

В п. 2.3 мы применили фурье-анализ для разложения периодической функции $F(t)$, определенной для всех t и имеющей период