будут отличаться друг от друга, и мы получим, что $\Delta\sigma\Delta z \approx \approx \Delta\nu\Delta t > 1$ для $t \neq 0$. Если же мы имеем дело со средой без дисперсии, то растяжения пакета не происходит и соотношение $\Delta\sigma\Delta z \approx \approx \Delta\nu\Delta t \approx 1$ сохраняется.

Волновые пакеты в воде. Волновые пакеты, распространяющиеся по кругам на поверхности воды, можно образовать, бросая в пруд гальку. При некотором опыте удается следить за распространением групп и наблюдать, как отдельные гребни возникают позади группы, проходят через нее и рассасываются. (Это явление связано с тем, что для длин волн с $\lambda > 1{,}7$ *см*, возбуждаемых камнем средней величины, фазовая скорость больше групповой. Картина распространения волновой группы, для которой фазовая скорость в два раза больше групповой, показана на рис. 6.7.) Мы настоятельно рекомендуем понаблюдать за распространением волновых групп. Вначале возникнут некоторые трудности, связанные с довольно большой скоростью распространения группы, однако усилия будут оправданы. (См. домашние опыты.)

6.4. Фурье-анализ импульсов

В п. 6.3 мы впервые встретились с представлением функции времени $\psi(t)$ в виде интеграла Фурье. Здесь мы покажем, как найти непрерывный частотный спектр для любого «разумного» импульса, а также приведем несколько примеров, представляющих большой интерес для различных областей физики.

Импульсы ограниченной длительности. Предположим, что функция $\psi(t)$ имеет форму импульса ограниченной длительности (рис. 6.8): она равна нулю до момента времени t_0 и после момента времени

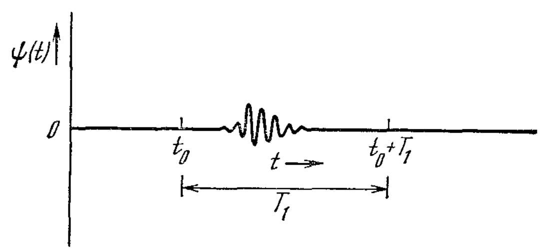

Рис. 6.8. Импульс $\psi(t)$.
Для времен более ранних, чем t_0, и более поздних, чем t_0+T_1, функция $\psi(t)=0$.

t_0+T_1. Таким образом, мы предполагаем, что существует конечный интервал времени T_1, внутри которого происходят колебания вида $\psi(t)$ (см. рис. 6.8). Величина интервала T_1, в общем, произвольна, однако в дальнейшем мы будем считать ее очень большой (но не бесконечно большой). (Величина $\nu_1 = 1/T_1$ будет нашей «единицей частоты», которую мы сможем выбрать сколь угодно малой.)

В п. 2.3 мы применили фурье-анализ для разложения периодической функции $F(t)$, определенной для всех t и имеющей период

T_1, так что $F(t+T_1)=F(t)$. Мы умеем также применять фурье-анализ к функции, определенной в ограниченном интервале времени t. В этом случае мы строили новую периодическую функцию, определенную для всех t и совпадающую с исходной функцией на временно́м интервале, равном периоду. Продолжив таким образом исходную функцию и сделав ее периодической, можно применить формулы, выведенные для периодических функций. Здесь мы поступим точно так же. Образуем периодическую функцию $F(t)$ с периодом T_1; на каждом периоде $F(t)$ является копией импульса $\psi(t)$ (рис. 6.9).

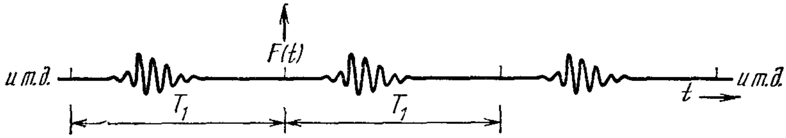

Рис. 6.9. Периодическая функция $F(t)$ с периодом T_1, полученная «повторением» импульса $\psi(t)$ в последовательные интервалы времени протяженностью T_1.

Разложение функции $F(t)$ в ряд Фурье определяется выражениями (2.49) — (2.52) из п. 2.3. Приведем заново результаты, которые нам понадобятся:

$$F(t)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t, \tag{73}$$

где

$$\omega_1=2\pi\nu_1=\frac{2\pi}{T_1}. \tag{74}$$

Тогда

$$B_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t)\,dt, \tag{75}$$

$$B_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t)\cos n\omega_1 t\,dt, \tag{76}$$

$$A_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t)\sin n\omega_1 t\,dt, \tag{77}$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$ Постараемся применить формулы (73) — (77) к нашей задаче о представлении функции $\psi(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний.

Заметим, что коэффициент B_0 в разложении (73) равен нулю. Действительно, функция $\psi(t)$ равна нулю вне своего интервала T_1, а в пределах этого интервала осциллирует. С физической точки зрения равенство $B_0=0$ означает, что в системе нет «постоянного смещения» или «постоянного напряжения», т. е. в общем случае у процесса, заданного функцией $\psi(t)$, нет постоянной составляющей. Это не означает, конечно, отсутствия таких процессов, для которых функция $\psi(t)$ имела бы вне T_1 не нулевое, а какое-либо конечное значение. Мы просто не рассматриваем сейчас такие случаи. Сила принципа суперпозиции заключается в том, что он дает возможность не рассматривать не интересующие нас члены суперпозиции, с той оговоркой, что «мы уже рассматривали их и позже добавим эти члены в результат».]

Переход от суммы Фурье к интегралу Фурье. Рассмотрим несколько первых членов в бесконечных суммах разложения (73). Эти члены имеют вид $A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$, $A_2 \sin 2\omega_1 t + B_2 \cos 2\omega_1 t$ и т. д. Покажем, что *эти первые члены пренебрежимо малы.* Из рис. 6.8 мы видим, что у функции $\psi(t)$ нет компонент с периодом большим, чем T_1. Искусственно построенная функция $F(t)$ будет иметь компоненту с периодом T_1. Но так как выбор T_1 произволен (за исключением особых случаев), то мы можем сделать этот интервал очень большим, так что соответствующая угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T_1$ будет очень малой. Константы A_1, A_2, B_1, B_2 и т. д. при соответствующем выборе T_1 могут быть сделаны очень малыми, и ими можно пренебречь. В частности, мы можем сделать T_1 таким, что первыми несколькими константами A_n и B_n можно пренебречь. Под «первыми несколькими A_n и B_n» мы подразумеваем, например, первые десять тысяч членов. Теперь рассмотрим такие n, для которых уже нельзя пренебречь членами A_n и B_n. Рассмотрим два последовательных члена в уравнении (73), n и $n+1$:

$$F(t) = \ldots + A_n \sin n\omega_1 t + A_{n+1} \sin (n\omega_1 + \omega_1) t + \ldots \tag{78}$$

Если T_1 достаточно велико, мы можем предположить, что ω_1 столь мало, а n столь велико, что A_{n+1} отличается от A_n на бесконечно малую величину. В этом случае мы можем заменить $n\omega_1$ на непрерывную переменную ω и рассматривать A_n как непрерывную функцию частоты ω:

$$\omega = n\omega_1. \tag{79}$$

Пусть $\delta\omega$ — приращение ω при увеличении n на δn:

$$\delta\omega = \omega_1 \delta n, \quad \delta n = \delta\omega/\omega_1. \tag{80}$$

Далее, пусть δn настолько мало, что коэффициенты A_n в диапазоне от n до $n+\delta n$ можно считать практически равными. В этом случае мы можем сгруппировать члены, соответствующие диапазону δn в уравнении (78), считая, что все они имеют одинаковую частоту ω (среднее значение ω в диапазоне $\delta\omega$). Перепишем разложение (78) следующим образом [используя равенства (79) и (80)]:

$$F(t) = \ldots + \delta n A_n \sin n\omega_1 t + \ldots = \ldots + \delta\omega \frac{A_n}{\omega_1} \sin \omega t + \ldots \equiv$$

$$\equiv \ldots + \delta\omega\, A(\omega) \sin \omega t + \ldots = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \ldots \tag{81}$$

Чтобы получить последнее из равенств (81), мы заменили сумму по последовательности полос с шириной $\delta\omega$ интегралом, а $\delta\omega$ — на более общий символ $d\omega$. Точки (...) в формуле (81) соответствуют второй сумме в (73), а именно $\sum B_n \cos n\omega_1 t$. Эту сумму также можно представить в виде интеграла. Окончательно получаем

$$F(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \tag{82}$$

$$A(\omega) = A(n\omega_1) = A_n/\omega_1, \quad B(\omega) = B(n\omega_1) = B_n/\omega_1. \tag{83}$$

Заметим, что переменная ω имеет нижний предел, равный нулю. Это справедливо потому, что A_n и B_n равны (примерно) нулю при n, близких к нулю, и поэтому $A(\omega)$ и $B(\omega)$ должны равняться нулю при $\omega=0$.

Из равенств (83) и (77) имеем

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega_1 T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) \sin \omega t \, dt;$$

учитывая, что $\omega_1 T_1 = 2\pi$, получим

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t \, dt.$$

В последнем равенстве мы учли тот факт, что интеграл по периоду от искусственно построенной периодической функции $F(t)$ равен интегралу по времени от $-\infty$ до $+\infty$ от непериодического импульса $\psi(t)$.

Интеграл Фурье. Мы пришли к выводу, что вместо периодической функции $F(t)$ можем написать в выражении (82) первоначальную функцию $\psi(t)$. Для этой функции справедливо следующее разложение, которое называется *интегралом Фурье*:

$$\boxed{\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t \, d\omega,} \tag{84}$$

где коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ равны

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t \, dt, \tag{85}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t \, dt. \tag{86}$$

Рассмотрим несколько интересных применений этих формул.

Приложение. *Прямоугольный частотный спектр.* Пусть функция $A(\omega)$ равна нулю для всех ω, а функция $B(\omega)$ постоянна для ω между ω_1 и ω_2 и равна нулю для всех других значений ω. Выберем постоянное значение $B(\omega)$ таким, чтобы площадь под $B(\omega)$

была равна единице, т. е.

$$\left.\begin{array}{ll} B(\omega)=\dfrac{1}{\Delta\omega} & \text{для}\quad \omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2=\omega_1+\Delta\omega, \\ B(\omega)=0 & \text{для остальных } \omega. \end{array}\right\} \qquad (87)$$

(Так как $B(\omega)$ имеет размерность обратной частоты, то функция $\psi(t)$ должна быть безразмерной.) Функция $\psi(t)$ вычисляется следующим образом:

$$\psi(t)=\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t\,d\omega+\int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\,d\omega=$$

$$=0+\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{\Delta\omega}\cos\omega t\,d\omega=\frac{1}{\Delta\omega}\,\frac{\sin\omega t}{t}\Bigg|_{\omega=\omega_1}^{\omega=\omega_2},$$

т. е.

$$\psi(t)=\frac{\sin\omega_2 t-\sin\omega_1 t}{\Delta\omega t}=\frac{\sin\omega_2 t-\sin\omega_1 t}{(\omega_2-\omega_1)\,t}. \qquad (88)$$

В этом выражении числитель представляет собой суперпозицию двух колебаний, которая дает модулированное колебание с частотой модуляции $(\omega_2-\omega_1)/2$. Знаменатель содержит множитель t, благодаря которому $\psi(t)$ имеет наибольшее значение при $t=0$. Представим выражение (88) в виде почти гармонического колебания со средней частотой ω_0 и с медленно изменяющейся амплитудой:

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_0={}^1\!/_2\,(\omega_2+\omega_1), & {}^1\!/_2\Delta\omega={}^1\!/_2\,(\omega_2-\omega_1), \\ \omega_2=\omega_0+{}^1\!/_2\Delta\omega, & \omega_1=\omega_0-{}^1\!/_2\Delta\omega; \end{array}\right\} \qquad (89)$$

$$\psi(t)=\frac{\sin(\omega_0+{}^1\!/_2\,\Delta\omega)\,t-\sin(\omega_0-{}^1\!/_2\,\Delta\omega)\,t}{\Delta\omega t}=\left[\frac{\sin{}^1\!/_2\,\Delta\omega t}{{}^1\!/_2\Delta\omega t}\right]\cos\omega_0 t. \qquad (90)$$

Таким образом, $\psi(t)$ представляет собой «быстрое» колебание с медленно изменяющейся амплитудой $A(t)$:

$$\psi(t)=A(t)\cos\omega_0 t,\quad A(t)=\frac{\sin{}^1\!/_2\Delta\omega\,t}{{}^1\!/_2\Delta\omega\,t}. \qquad (91)$$

Результат, представленный равенством (91), аналогичен результату, полученному в п. 6.3 для суперпозиции N гармонических колебаний, частоты которых равномерно распределены между границами интервала ω_1 и ω_2. Если перейти к пределу, устремив N к ∞, мы получим разложение (91). (См. формулы (57) и (58), п. 6.3.) Импульс $\psi(t)$ и его преобразование Фурье показаны на рис. 6.6.

Приложение. *«Прямоугольный» временной импульс.* Пусть функция $\psi(t)$ равна нулю всюду, кроме промежутка Δt, центрированного относительно t_0 и простирающегося от t_1 до t_2. В этом промежутке функция имеет постоянное значение, которое выбрано таким, чтобы интеграл от $\psi(t)$ по t был равен единице:

$$\psi(t)=\frac{1}{\Delta t},\qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2=t_1+\Delta t. \qquad (92)$$

Найдем коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$ для функции $\psi(t)$.

Если $t_0=0$, то $\psi(t)$ — четная функция времени, и поэтому $A(\omega)$ должно равняться нулю (так как $\sin \omega t$ — нечетная функция). Если $t_0 \neq 0$, то мы должны вычислять как $A(\omega)$, так и $B(\omega)$. Мы всегда можем облегчить вычисление, сместив ось времени, т. е. заменив t на $t-t_0$. Так как $\psi(t)$ — четная функция от $t-t_0$, то мы имеем

$$\psi(t)=\int_0^\infty B(\omega)\cos\omega(t-t_0)\,d\omega, \tag{93}$$

где

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cos\omega(t-t_0)\,dt. \tag{94}$$

Произведя это несложное интегрирование (задача 6.20), мы получим

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta t\,\omega}{\frac{1}{2}\Delta t\,\omega}. \tag{95}$$

Прямоугольный импульс [функция (92)] и его фурье-коэффициент $B(\omega)$ показаны на рис. 6.10. Заметим, что если мы определяем $\Delta\omega$

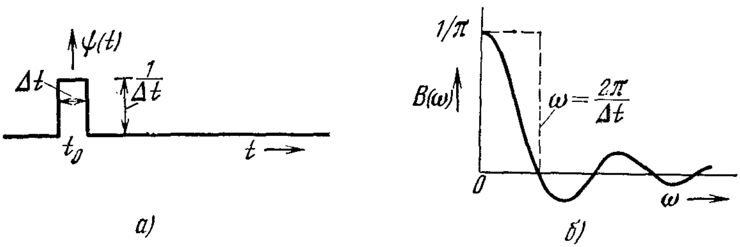

Рис. 6.10. Прямоугольный импульс $\psi(t)$ и его фурье-коэффициент $B(\omega)$.

как интервал, простирающийся от минимальной частоты (которая равна нулю) до частоты, соответствующей первому нулю в коэффициенте $B(\omega)$, то имеем

$$\Delta\omega\,\Delta t=2\pi, \quad \Delta\nu\,\Delta t=1. \tag{96}$$

Фурье-анализ хлопка с помощью рояля. Предположим, что мы хотим оценить длительность звука от хлопка руками. У нас нет ни микрофона, ни усилителя звуковых частот, ни осциллографа, но в нашем распоряжении находится рояль. Нажав на демпфирующую педаль (освободив тем самым все струны), расположим руки под поднятой крышкой рояля и хлопнем в ладоши. Рояль будет играть роль частотного анализатора. Оцените наивысший тон, для которого интенсивность звука достаточно велика. Можно сказать, что для этой частоты справедливо приближенное равенство $\nu \approx 1/\Delta t$. Этот пример, как следует из дальнейших рассуждений, дает нам дополнительное представление о смысле анализа Фурье.

С некоторым приближением мы можем считать, что воздушная волна давления длительностью Δt воздействует на все струны в одно и то же время и в одном направлении. Струны начинают колебаться с собственными частотами. Те струны, частоты которых малы по сравнению с $1/\Delta t$, совершат только часть полного колебания за время действия силы. Эти струны испытывают ускорение в течение всего времени Δt действия силы. Струны с периодом, точно равным Δt, ускоряются волной давления в течение первой полуволны длительностью $\Delta t/2$ и тормозятся в течение следующей полуволны. Замедление и ускорение, получаемые струной за время $\Delta t/2$, равны по величине, и поэтому после прекращения действия силы струна не колеблется. Таким образом, струны с собственными частотами от нуля до значения несколько меньшего, чем $1/\Delta t$, возбуждаются с положительной амплитудой. Струна с частотой $1/\Delta t$ имеет нулевую амплитуду: эта частота определяет первый нуль для коэффициента $B(\omega)$ в выражении (95). Струны с частотами между $1/\Delta t$ и $2/\Delta t$ сделают от одного до двух полных колебаний за время Δt. Струна с частотой $2/\Delta t$ совершит за это время два полных колебания и успокоится. Эта частота соответствует второму нулю $B(\omega)$. Струна с частотой $1{,}5/\Delta t$ будет вести себя следующим образом: после окончания первого цикла колебаний на эту струну в течение первой половины второго цикла будет действовать сила того же направления. Эта струна получит $^1/_3$ часть импульса силы, так как она совершает три полуцикла собственных колебаний, причем вклады от двух из них взаимно уничтожаются. Струна с частотой собственных колебаний $^1/_2(1/\Delta t)$ за Δt совершит лишь полцикла колебаний, а амплитуда ее должна быть в три раза больше, чем для струны с частотой колебаний $\nu=1{,}5\ (1/\Delta t)$. Из равенства (95) следует, что коэффициент $B(\omega)$ для $\omega\,\Delta t=\pi$ действительно в три раза больше, чем для $\omega\,\Delta t=3\pi$.

Этот пример показывает, что рояль или аналогичный музыкальный инструмент можно использовать в качестве частотного анализатора. (Мы пренебрегаем тем фактом, что связь воздуха со струнами может и не быть столь совершенной.) Заметим, что из пианино, используемого в качестве анализатора, очень трудно получить информацию о *фазе* колебаний. Однако для нашего уха фаза не представляет интереса. Это общая ситуация; часто нас не интересуют коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ по отдельности, так что мы можем ограничиться *интенсивностью* $I(\omega)$ фурье-разложения, которая определяется следующим образом:

$$I(\omega)=A^2(\omega)+B^2(\omega). \qquad (97)$$

Дельта-функция времени. Если продолжительность Δt прямоугольного импульса значительно короче периода колебания наибольшей частоты, который мы можем обнаружить, то коэффициент $B(\omega)$ постоянен для регистрируемого нами диапазона частот. Это утверждение можно пояснить при помощи рис. 6.10. Если устремить Δt к нулю, то первый нуль функции $B(\omega)$ устремится к $+\infty$ и для любой частоты функция $B(\omega)$ будет равна $1/\pi$. Импульс, определяемый функцией (92), называется дельта-функцией времени, если Δt

достаточно мало. Например, наивысшая частота ноты рояля $\nu\approx$ ≈ 5000 *гц*, и поэтому любой звуковой импульс длительностью меньше десятой миллисекунды будет возбуждать колебания всех струн. Нужно заметить, что с помощью рояля мы не сможем отличить этот звуковой импульс от звукового импульса, в десять раз большего по величине, длительность которого на порядок меньше. В обоих случаях конечный результат движения струн будет одинаков.

Приложение. *Затухающий гармонический осциллятор; естественная ширина линии.* Нас интересует частотный спектр, т. е. «форма линии» видимого света, испускаемого атомом, среднее время жизни которого порядка $\tau\approx 10^{-8}$ *сек*. Если бы нас интересовала лишь ширина спектральной линии, то ее легко определить, и мы знаем, что она порядка $1/\tau$, т. е. 10^8 *гц*. Нас однако интересует большее, а именно детальная форма линии. Будем считать, что *моделью атома является затухающий гармонический осциллятор*. Это значит, что функция $\psi(t)$ равна нулю для всех $t< t=0$, а при $t=0$ действует скачкообразное возмущение и функция имеет вид

$$\psi(t)=e^{-{}^1/_2\Gamma t}\cos\omega_1 t. \tag{98}$$

(Мы полагаем постоянную амплитуду равной единице, чтобы сократить вычисления.) Коэффициент затухания обратно пропорционален среднему времени жизни атома:

$$\Gamma=1/\tau. \tag{99}$$

Пусть частота колебаний нашей модели атома в отсутствие затухания равна ω_0. Мы знаем (см. главу 3), что частота затухающих колебаний ω_1 следующим образом связана с ω_0 и Γ:

$$\omega_1^2=\omega_0^2-{}^1/_4\Gamma^2. \tag{100}$$

Выразим равенство (98) с помощью интеграла Фурье:

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)\sin\omega t\,d\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\cos\omega t\,d\omega. \tag{101}$$

Имеем

$$2\pi A(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\sin\omega t\,dt=\int_0^{\infty}e^{-{}^1/_2\Gamma t}\,2\cos\omega_1 t\sin\omega t\,dt=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-{}^1/_2\Gamma t}\left[\sin(\omega+\omega_1)t+\sin(\omega-\omega_1)t\right]dt, \tag{102}$$

$$2\pi B(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cos\omega t\,dt=\int_0^{\infty}e^{-{}^1/_2\Gamma t}\,2\cos\omega_1 t\cos\omega t\,dt=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-{}^1/_2\Gamma t}\left[\cos(\omega+\omega_1)t+\cos(\omega-\omega_1)t\right]dt. \tag{103}$$

В любой таблице определенных интегралов мы найдем

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{b^2+a^2}, \tag{104}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{b^2+a^2}. \tag{105}$$

Равенства (102) и (103) дают

$$2\pi A(\omega) = \frac{(\omega+\omega_1)}{(\omega+\omega_1)^2+(^1/_2\Gamma)^2} + \frac{(\omega-\omega_1)}{(\omega-\omega_1)^2+(^1/_2\Gamma)^2}, \tag{106}$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{^1/_2\Gamma}{(\omega+\omega_1)^2+(^1/_2\Gamma)^2} + \frac{^1/_2\Gamma}{(\omega-\omega_1)^2+(^1/_2\Gamma)^2}. \tag{107}$$

Воспользуемся равенством (100) для замены ω_1^2 на ω_0^2. После ряда преобразований получим

$$2\pi A(\omega) = \frac{2\omega(\omega^2-\omega_0^2)+\omega\Gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{108}$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\Gamma(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{109}$$

$$I(\omega) \equiv [2\pi A(\omega)]^2 + [2\pi B(\omega)]^2 = \frac{4\omega^2+\Gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+\Gamma^2\omega^2}. \tag{110}$$

Сравнение свободно затухающего колебания с вынужденным колебанием. Интересно сравнить полученные результаты частотного фурье-анализа колебаний свободно затухающего гармонического осциллятора с результатами частотного анализа установившихся вынужденных колебаний. Приведем результаты, которые были получены для такой системы в п. 3.2 [равенства (3.17) и (3.32) — (3.35)]:

$$A_д(\omega) = \frac{F_0}{M}\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{111}$$

$$A_п(\omega) = \frac{F_0}{M}\,\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{112}$$

$$|A|^2 \equiv [A_д(\omega)]^2 + [A_п(\omega)]^2 = \frac{F_0^2}{M^2}\,\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{113}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{F_0^2}{M}\,\frac{\Gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{114}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{F_0^2}{M}\,\frac{^1/_2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{115}$$

Сравнивая эти выражения с формулами (108) и (109), мы видим, что коэффициент $B(\omega)$ для затухающих колебаний пропорционален запасенной энергии $E(\omega)$ вынужденных колебаний. Коэффициент $A(\omega)$ для затухающих колебаний состоит из двух слагаемых: одно из них пропорционально $\omega A_д(\omega)$, а второе пропорционально

$A_п(\omega)$. При достаточно слабом затухании слагаемое, пропорциональное $A_п$, пренебрежимо мало, за исключением значений ω, очень близких к резонансу ω_0; поэтому $A(\omega)$ в этом случае практически пропорционально $\omega A_д(\omega)$. Интенсивность $I(\omega)$, определяемая как $A^2(\omega)+B^2(\omega)$, состоит из двух частей: одна часть пропорциональна поглощаемой мощности $P(\omega)$, а вторая часть, при достаточно слабом затухании, т. е. при $\Gamma^2 \ll \omega^2$, пренебрежимо мала. Поэтому можно считать, что интенсивность $I(\omega)$ для свободного затухания практически пропорциональна поглощаемой мощности $P(\omega)$ для вынужденных колебаний.

Лоренцевская форма линии; связь с резонансной кривой. В случае слабого затухания для ω, близких к ω_0, коэффициент $B(\omega)$ и интенсивность $I(\omega)$ пропорциональны функции $L(\omega)$:

$$L(\omega)=\frac{(^1/_2\Gamma)^2}{(\omega_0-\omega)^2+(^1/_2\Gamma)^2}\,. \qquad (116)$$

Эта функция называется *лоренцевской формой линии*. Коэффициент затухания Γ равен величине интервала частот, внутри которого $L(\omega)>{}^1/_2L(\omega_0)$. Этот интервал частот называется *шириной линии* $\Delta\omega$ частотного спектра, описывающего затухающие колебания:

$$(\Delta\,\omega)_{з.\,к}=\Gamma. \qquad (117)$$

Лоренцевская форма линии (116) совпадает с брейт-вигнеровской резонансной кривой $R(\omega)$, которая дает (для слабого затухания) частотную зависимость величин $A_п(\omega)$, $|A|^2$, $E(\omega)$ и $P(\omega)$ при вынужденных колебаниях [равенство (3.36), п. 3.2)]:

$$R(\omega)=\frac{(^1/_2\Gamma)^2}{(\omega_0-\omega)^2+(^1/_2\Gamma)^2}\,. \qquad (118)$$

Полная ширина резонанса на уровне половины максимального значения равна

$$(\Delta\omega)_{рез}=\Gamma. \qquad (119)$$

Таким образом, мы пришли к замечательному выводу, что для слабо затухающего гармонического осциллятора (который мы взяли в качестве модели излучающего атома) *преобразование Фурье дает ту же частотную зависимость, что и резонансные характеристики вынужденных колебаний*:

$$\boxed{(\Delta\omega)_{з.\,к}=(\Delta\omega)_{рез}=\frac{1}{\tau_{з.\,к}}\,.} \qquad (120)$$

Измерение собственной частоты и полосы частот. Тот факт, что фурье-преобразование для затухающих свободных колебаний совпадает с резонансной кривой для установившихся вынужденных колебаний, имеет важные экспериментальные следствия. Допустим, что мы хотим определить а) первую моду рояльной струны и б) энергию первого возбужденного состояния атома, Рассмотрим три способа, которыми это можно сделать:

1. *Временная зависимость свободных колебаний.* В зависимости от того, с какой из двух систем мы имеем дело, мы можем воспользоваться либо молоточком рояля, либо столкновением атома с другим атомом для внезапного возбуждения системы в момент $t=0$. Произведя скоростные фотоснимки движения затухающего осциллятора, мы можем построить график смещения в зависимости от времени. Это возможно для рояльной струны, но для атома невозможно, даже в принципе. (В томе «Квантовая физика» будет показано, почему это невозможно.)

2. *Резонансная характеристика вынужденного колебания.* Пусть в установившемся режиме на систему воздействует гармоническая сила $F_0 \cos \omega t$. Будем менять частоту внешней силы и измерять поглощаемую мощность $P(\omega)$ как функцию частоты. Это можно

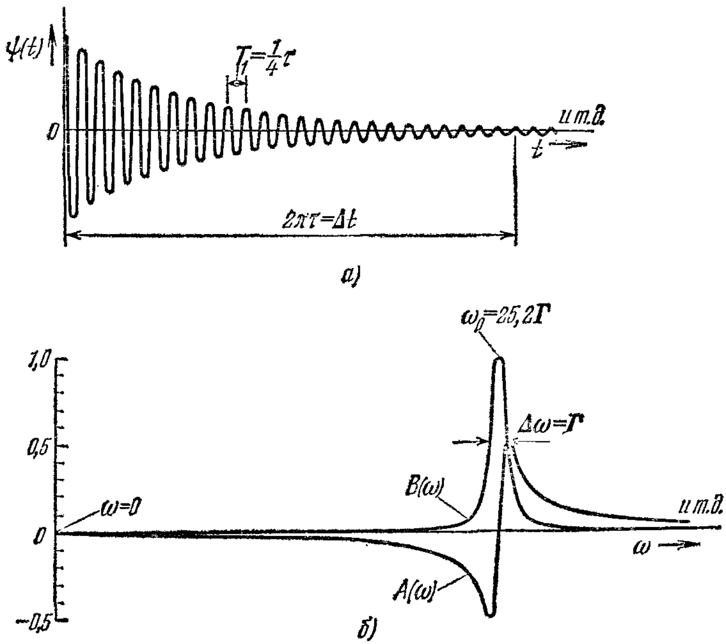

Рис. 6.11. Слабо затухающий гармонический осциллятор.

а) Импульс $\psi(t)=\exp[-{}^1/_2\, t/\tau] \cos \omega t$ при $\omega_1=8\pi\Gamma$, т. е. $\tau=4T_1$; *б)* фурье-коэффициенты для непрерывной суперпозиции гармонических членов.

$$\int_0^\infty [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t]\, d\omega.$$

сделать не только для струны рояля, но и для некоторых возбужденных состояний атомов, если на них действует установившееся электромагнитное излучение. Снимая зависимость P от ω, можно найти ω_0 и Γ.

3. *Фурье-анализ испускаемого спектра.* Выполним фурье-анализ излучения для системы, внезапно приведенной в возбужден-

ное состояние. Это возможно как для струны рояля, так и для некоторых возбужденных состояний атома, если измерять частоты испускаемого атомом света. Легче всего измерить интенсивность излучения в зависимости от частоты. Эта величина пропорциональна интенсивности $I(\omega)$, получаемой из фурье-анализа. Зная функцию $I(\omega)$, мы можем получить частоту ω_0 и ширину полосы Г. На рис. 6.11 показаны затухающие колебания гармонического осциллятора и коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$. Для того чтобы в произведении ширины полосы на интервал времени $\Delta\omega\,\Delta t \geqslant 2\pi$ получить точное равенство, мы должны определить длительность Δt как произведение 2π на среднее время жизни τ. Тогда равенство (120) примет вид $\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi$.

6.5. Фурье-анализ бегущих волновых пакетов

Предположим, что передатчик в точке $z=0$ воздействует на непрерывную, однородную, одномерную открытую систему таким образом, что волновая функция $\psi(z, t)$ бегущих волн в точке $z=0$ имеет известную зависимость от времени $f(t)$:

$$\psi(0, t) = f(t). \tag{121}$$

Любая «разумная» функция $f(t)$ может быть представлена суперпозицией гармонических колебаний. Если $f(t)$ не периодическая функция времени, то суперпозиция непрерывна (по частоте) и выражается через интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_0^\infty [A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega. \tag{122}$$

Бегущие волны в однородной диспергирующей среде. Каждая гармоническая составляющая суперпозиции (122) определяет свою собственную гармоническую бегущую волну с волновым числом k, значение которого следует из дисперсионного соотношения

$$k = k(\omega). \tag{123}$$

Каждая частотная составляющая бегущей волны распространяется со своей собственной фазовой скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{k(\omega)}. \tag{124}$$

Вся бегущая волна $\psi(z, t)$ является суперпозицией этих гармонических бегущих волн. Это значит, что мы получим $\psi(z, t)$ и $\psi(0, t)$ заменой ωt на $\omega t - kz = \omega t - k(\omega)z$ в каждой гармонической составляющей суперпозиции (122):

$$\psi(0, t) = \int_{\omega=0}^\infty [A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega, \tag{125}$$

$$\psi(z, t) = \int_{\omega=0}^\infty \{A(\omega)\sin[\omega t - k(\omega)z] + B(\omega)\cos[\omega t - k(\omega)z]\}\,d\omega. \tag{126}$$