ное состояние. Это возможно как для струны рояля, так и для некоторых возбужденных состояний атома, если измерять частоты испускаемого атомом света. Легче всего измерить интенсивность излучения в зависимости от частоты. Эта величина пропорциональна интенсивности $I(\omega)$, получаемой из фурье-анализа. Зная функцию $I(\omega)$, мы можем получить частоту ω_0 и ширину полосы Γ. На рис. 6.11 показаны затухающие колебания гармонического осциллятора и коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$. Для того чтобы в произведении ширины полосы на интервал времени $\Delta\omega\,\Delta t \geqslant 2\pi$ получить точное равенство, мы должны определить длительность Δt как произведение 2π на среднее время жизни τ. Тогда равенство (120) примет вид $\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi$.

6.5. Фурье-анализ бегущих волновых пакетов

Предположим, что передатчик в точке $z=0$ воздействует на непрерывную, однородную, одномерную открытую систему таким образом, что волновая функция $\psi(z, t)$ бегущих волн в точке $z=0$ имеет известную зависимость от времени $f(t)$:

$$\psi(0, t) = f(t). \tag{121}$$

Любая «разумная» функция $f(t)$ может быть представлена суперпозицией гармонических колебаний. Если $f(t)$ не периодическая функция времени, то суперпозиция непрерывна (по частоте) и выражается через интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_0^\infty [A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega. \tag{122}$$

Бегущие волны в однородной диспергирующей среде. Каждая гармоническая составляющая суперпозиции (122) определяет свою собственную гармоническую бегущую волну с волновым числом k, значение которого следует из дисперсионного соотношения

$$k = k(\omega). \tag{123}$$

Каждая частотная составляющая бегущей волны распространяется со своей собственной фазовой скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{k(\omega)}. \tag{124}$$

Вся бегущая волна $\psi(z, t)$ является суперпозицией этих гармонических бегущих волн. Это значит, что мы получим $\psi(z, t)$ и $\psi(0, t)$ заменой ωt на $\omega t - kz = \omega t - k(\omega)z$ в каждой гармонической составляющей суперпозиции (122):

$$\psi(0, t) = \int_{\omega=0}^\infty [A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega, \tag{125}$$

$$\psi(z, t) = \int_{\omega=0}^\infty \{A(\omega)\sin[\omega t - k(\omega)z] + B(\omega)\cos[\omega t - k(\omega)z]\}\,d\omega. \tag{126}$$

В общем случае диспергирующих сред фазовая скорость $v_ф$ зависит от частоты ω. Поэтому форма $\psi(z, t)$ не остается постоянной с течением времени.

Недиспергирующие волны (*специальный случай*). Для особого случая, когда фазовая скорость $v_ф$ не зависит от частоты, волновая функция $\psi(z, t)$ имеет одну и ту же форму для всех t. Этот результат можно получить из общего выражения (126) следующим образом. Пусть v — фазовая скорость, одинаковая для всех гармоник:

$$v=\frac{\omega}{k(\omega)}, \quad \text{т. е.} \quad k(\omega)=\frac{\omega}{v}. \tag{127}$$

Тогда уравнение (126) примет вид

$$\psi(z, t)=\int_0^\infty\left[A(\omega)\sin\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+B(\omega)\cos\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]d\omega, \tag{128}$$

где v постоянна (по предположению), т. е. не зависит от частоты. Мы видим, что каждый член суперпозиции (128) получается из суперпозиции (125), соответствующей $\psi(0, t)$, простой заменой t в $\psi(0, t)$ на $t-(z/v)$. Таким образом, для недиспергирующих волн имеем

$$\psi(z, t)=\psi(0, t'), \quad t'\equiv t-\frac{z}{v}. \tag{129}$$

Заметим, что в этом случае нет необходимости иметь дело с преобразованием Фурье. Зная $\psi(0, t)$, мы всегда сможем получить $\psi(z, t)$, используя равенство (129). Смысл этого равенства заключается в том, что бегущая волна в недиспергирующей среде не изменяет свою форму. Это значит, что смещение (или электрическое поле, или какой-нибудь другой параметр) в какой-то точке имеет то же значение во время t, что и смещение в $z=0$ во время $t-(z/v)$.

Примером недиспергирующих волн являются, например, слышимые звуковые волны или волны света в вакууме. Пусть в точке $z=0$ смещение равно

$$\psi(0, t)=Ae^{-(1/2)t^2/\tau^2}. \tag{130}$$

Выражение (130) представляет собой *импульс в форме гауссовской кривой*. Он имеет максимум при $t=0$ и очень быстро уменьшается для $t<0$ и $t>0$ (уменьшение практически до нуля происходит в пределах нескольких значений τ). Мы могли бы применить преобразование Фурье к уравнению (130), однако в этом нет необходимости, поскольку, по предположению, среда недиспергирующая, и мы можем сразу же написать выражение для бегущей волны:

$$\psi(z, t)=\psi(0, t')=Ae^{-(1/2)(t')^2/\tau^2}=Ae^{-(1/2)[t-(z/v)]^2/\tau^2}. \tag{131}$$

Недиспергирующие волны и классическое волновое уравнение. Любая гармоническая бегущая волна вида

$$\psi(z, t)=A\cos[\omega t-k(\omega)z] \tag{132}$$

удовлетворяет (покажите это) дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial t^2}=\frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial z^2}=v_ф^2(\omega)\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial z^2}. \tag{133}$$

Для специального случая (недиспергирующих волн) имеем $v_ф=v$, т. е. скорость постоянна и не зависит от частоты. В этом случае каждый член в суперпозиции бегущих гармонических волн [см., например, разложение (128)] удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2},} \tag{134}$$

где через $\psi(z,\ t)$ обозначена любая из гармонических бегущих волн суперпозиции (128). Так как каждый член суперпозиции (128) удовлетворяет уравнению (134), то оно справедливо и для всей суперпозиции, т. е. общая волновая функция $\psi(z,\ t)$ удовлетворяет уравнению (134). Это уравнение в частных производных называется *классическим волновым уравнением для недиспергирующих волн* или просто *классическим волновым уравнением*.

Волны, сохраняющие свою форму, удовлетворяют классическому волновому уравнению. Любая бегущая волна, сохраняющая свою форму по мере распространения, должна удовлетворять уравнению (134). Предположим, что задано $\psi(0,\ t)=f(t)$ и мы знаем, что волна распространяется, сохраняя свою форму, т. е.

$$\psi(z,\ t)=f(t'),\quad t'\equiv t-\frac{z}{v}. \tag{135}$$

Можно показать, что функция $\psi(z,\ t)$, определяемая выражением (135), удовлетворяет классическому волновому уравнению (задача 6.26). Очевидно, что любая недиспергирующая бегущая волна, распространяющаяся в направлении $-z$, также удовлетворяет этому уравнению. Это видно, если заменить v на $-v$ в производных. Далее, любая суперпозиция недиспергирующих бегущих волн, распространяющихся в обоих направлениях, также удовлетворяет классическому волновому уравнению, поскольку все члены суперпозиции удовлетворяют ему.

Гармоническая стоячая волна вида

$$\psi(z,\ t)=A\cos k(z-z_0)\cos\omega(t-t_0)$$

также удовлетворяет уравнению (133), что легко показать. Если среда недиспергирующая, то все гармонические стоячие волны удовлетворяют уравнению (134). Это следует из уравнения (135), если $v_ф=v$ для всех частот. (Для стоячих волн $v_ф$ означает ω/k, хотя понятие фазовой скорости не будет естественным параметром для описания стоячих волн.) Это также следует из того факта, что стоячая волна может быть представлена суперпозицией бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Напомним, что впервые с классическим волновым уравнением мы встретились в п. 2.2 при изучении стоячих волн в непрерывной струне.