

Задачи и домашние опыты

6.1. Покажите, что суперпозиция двух гармонических бегущих волн $A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ и $A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$, распространяющихся в направлении $+z$ и имеющих одинаковую частоту ω , представляет собой гармоническую бегущую волну того же типа. Покажите, что эта сумма может быть записана в виде $A \cos(\omega t - kz + \varphi)$. Найдите, как A и φ связаны с A_1, A_2, φ_1 и φ_2 . (С о́зв. т. Удобно воспользоваться комплексными числами или векторной диаграммой.)

6.2. Рассмотрим электромагнитное излучение в среде с диэлектрической постоянной $\epsilon(\omega)$. Положим, что магнитная проницаемость $\mu=1$. Тогда $n(\omega)=[\epsilon(\omega)]^{1/2}$. В соответствии с теорией относительности сигнал не может распространяться со скоростью, большей чем $c=3,0 \cdot 10^{10}$ см/сек. Какое ограничение накладывает это условие на возможную зависимость ϵ от ω ? (Считаем, что $\epsilon(\omega)$ положительно для всех ω .)

О т в е т. $\omega(dn/d\omega) + (n-1) \geq 0$.

6.3. Опыт. Определите приблизительно полосу частот в широкополосном диапазоне вашего приемника, работающего на АМ, поворачивая настроенный лимб и наблюдая крайние значения шкалы для приема данной станции. Как согласуется полученный вами результат с тем, что для перекрытия обеих боковых полос, необходимого для высококачественного воспроизведения звука, нужна полоса частот $\Delta\nu \approx 40$ кГц?

6.4. Труба (большая басовая труба) может издавать очень низкие звуки, например звук C_1 с частотой 32,7 гц. (Самое низкое C у рояля обозначается C_1 .) На флейте можно взять очень высокий звук; самая высокая нота у флейты — это нота C_7 с частотой 2093 гц (это на одну октаву ниже самой высокой ноты рояля). Каждая нота, при равномерной настройке инструмента, отличается по частоте от предыдущей в 1,06 раза (т. е. на 6%). На флейте можно играть очень быстро, на трубе нельзя. Зависит ли это от того, кто играет на трубе, или от свойств самой трубы? Можно ли переладить трубу так, чтобы на ней можно было играть так же быстро, как на флейте? Оцените максимальную скорость, с которой можно играть на трубе в районе ноты $C_{32,7}$ и на флейте в районе ноты C_{2093} ? Очевидно, вы должны вначале «запасться» разумным музыкальным критерием, а потом уже решать задачу.

О т в е т. 2 ноты/сек для трубы; 120 нот/сек для флейты.

6.5. Человек приносит свой АМ-приемник в мастерскую и жалуется на то, что настройка недостаточно хорошая. Он хочет, чтобы положение данной станции было очень «резко» определено на лимбе. Его просьбу удовлетворяют. Через некоторое время он опять приносит свой приемник. На что он жалуется теперь?

6.6. а) Одним из способов определения скорости звука в воздухе является измерение интервала времени между хлопком и эхом от известного отражателя. Другой способ — это определение длины картонной трубы, резонирующей на известной частоте (с учетом краевых эффектов). Какая скорость определяется этими способами: фазовая или групповая?

б) Одним из способов измерения скорости света является определение времени прохождения прерывающимся лучом известного расстояния от одного пункта до другого и обратно (после отражения от зеркала). Другой способ — это нахождение длины полости, резонансная частота и мода колебаний которой известны. Какая скорость определяется этими методами: фазовая или групповая?

6.7. Покажите, что если показатель преломления света равен $n(\lambda)$, то

$$\frac{1}{v_{гр}} = \frac{1}{v_{ф}} - \frac{1}{c} \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda},$$

где λ — длина волны света в вакууме.

6.8. В таблицах для скорости света в вакууме дано значение $c = (2,997925 \pm 0,000001) \cdot 10^{10}$ см/сек. Предположим, что вы измеряете скорость света, определяя время прохождения прерывающимся лучом расстояния от одного пункта до другого и обратно (после отражения от зеркала). Вначале вы пренебрегали тем, что луч распространяется в воздухе, а не в вакууме. Теперь определите поправку, которую нужно ввести, чтобы из измеренной скорости получить скорость света в вакууме, предполагая, что свет распространяется в воздухе с фазовой скоростью. (Для показателя преломления воздуха возьмите значение $n = 1 + 0,3 \cdot 10^{-3}$.) Пов-

торите вычисление поправки, предполагая, что свет распространяется в воздухе с групповой скоростью. Чтобы оценить поправку в этом случае, воспользуйтесь результатами задачи 6.7 и предположите, что молекула воздуха неотличима от молекулы стекла. Если бы плотность числа молекул в воздухе и стекле была одинаковой, вы могли бы получить значение $dn/d\lambda$ из табл. 4.2 п. 4.3. В действительности для воздуха плотность равна $N \approx 2,7 \cdot 10^{19}$ молекул/см³, а для стекла $N \approx 2,6 \times 10^{23}$ молекул/см³. Найдите $dn/d\lambda$ для воздуха (для желтого света), используя табл. 4.2 и соответствующую поправку для плотности. Зависит ли результат от того, какую из двух поправок вы используете (имея в виду точность определения скорости света)? Какую поправку следует использовать?

6.9. Покажите, что для затухающего гармонического осциллятора время затухания τ равно

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{E_{\text{запас}}} \frac{dE_{\text{потер}}}{dt}.$$

6.10. Предположим, что вы ударили по картонной трубке. В течение короткого времени вы слышите ноту, соответствующую самой первой моде. Предположим, что мы имеем дело с затухающими гармоническими колебаниями и можем говорить о некотором времени затухания τ . Удвоим длину трубки. Частота моды уменьшится в два раза. Предположим, однако, что вы возбуждаете трубку так, что в ней происходят колебания с первоначальной частотой (эта частота соответствует теперь второй моде удлиненной трубки). Считаем, что после быстрого возбуждения воздух совершает свободные затухающие колебания.

а) Предположим, что все потери энергии определяются излучением с концов трубки. Сравните новое время затухания со старым.

б) Предположим, что диаметр трубки настолько мал, что потеря энергии на концах трубки пренебрежимо мала по сравнению с потерей на трение вдоль стенок трубки и излучением от боковых поверхностей трубки. Сравните новое и старое время затухания.

в) Предположим, что, воздействуя на новую и старую трубки одинаковым параметром (частота колебаний которого соответствует частоте самой низкой моды первоначальной короткой трубки) и изменяя длину трубки с помощью бумажного «тронбона», вы измеряете ширину резонансной полосы новой и старой трубок. Сравните полосу длины ΔL для двух случаев, упомянутых выше. Найдите связь между ΔL и полной полосой частот. Используйте результаты задачи 6.9.

6.11. Опыт. *Волновые пакеты на воде.* Лучшим способом уяснения разницы между групповой и фазовой скоростями является наблюдение волновых пакетов на поверхности воды. Чтобы образовать расходящиеся круговые волновые пакеты с преобладающей длиной волны 3—4 см или больше, бросьте в бассейн или пруд большой камень. Чтобы создать прямые волны (двухмерный аналог трехмерных плоских волн), опустите в ванну или большой таз деревянный прут и резко ударьте по нему несколько раз в вертикальном направлении. После некоторой практики вы заметите, что для этих пакетов фазовая скорость больше групповой. (См. табл. 6.1, п. 6.2.) Вы увидите небольшие волны, возникающие на заднем конце пакета, проходящие через пакет и исчезающие впереди. (Это требует небольшой практики, так как волны распространяются достаточно быстро.) Такие волны можно также образовать, поместив на конце ванны доску и постукивая по ней.

Чтобы создать волны миллиметровой длины (волны поверхностного натяжения), используйте глазную пипетку, наполненную водой. Пусть на поверхность воды в тазу падает капля из пипетки с высоты в несколько миллиметров. В этом случае будут возникать волны с доминирующей длиной в несколько миллиметров. Чтобы убедиться в том, что эти волны возникают благодаря поверхностному натяжению, добавьте в воду немного мыла и повторите опыт. Вы заметите уменьшение групповой скорости. Чтобы убедиться в том, что более длинные волны вызваны не поверхностным натяжением, можно повторить этот опыт с длинными волнами. Для увеличения длины основной волны в группе капля должна падать с большей высоты.

Покажем, как убедиться (без сложных измерений), что миллиметровые волны имеют большую групповую скорость, чем сантиметровые или еще более длинные волны.

Образуйте пакет, содержащий как миллиметровые, так и сантиметровые волны, капнув в круглый таз, до краев наполненный водой, каплю с высоты примерно 30 см. Обратите внимание на то, что после отражения от края таза группа приходит в фокус, находящийся в точке, сопряженной с точкой, в которую упала капля. (Под двумя сопряженными точками мы подразумеваем точки на диаметре круга, расположенные по обе стороны от центра, на равных расстояниях от него.) Когда пакет проходит через сопряженный фокус, то образуется временная стоячая волна (точно так же, как образуется временная стоячая волна, когда волновой пакет распространяется по «пружине», конец которой привязан к стене, а на другом конце возбуждаются волновые пакеты). Это дает вам возможность оценить среднее время прибытия пакета (в фокус). Есть ли разница во временах прибытия коротковолновых и длинноволновых составляющих пакета? Этот эффект трудно измерить, но легко наблюдать.

Опыт, который мы не сделали, должен был бы заключаться в образовании волновых пакетов с определенной длиной волны и групповой скоростью в равномерно текущем потоке, скорость которого равна групповой скорости пакета. В этом случае пакет будет оставаться практически на одном месте относительно покоящегося наблюдателя. Конечно, это наиболее наглядный способ изучения волновых пакетов.

6.12. Опыт. Волновые пакеты в мелкой воде; приливные волны. В задаче 2.31 вы изучали закон дисперсии для пилообразных стоячих волн в мелкой воде и получили, что $v_{\phi} \approx 1,1 \sqrt{gh}$. Для синусоидальных волн в мелкой воде фазовая скорость равна $v_{\phi} = \sqrt{gh}$. Таким образом, волны в мелкой воде не имеют дисперсии. (Фазовая скорость не зависит от длины волны). Теперь вместо стоячих волн рассмотрим волновые пакеты, распространяющиеся по мелкой воде. Так как волны недиспергирующие, то одна «отдельная волна» или «приливная волна» будет распространяться без изменения своей формы (в первом приближении). Такие волны могут быть возбуждены подводными землетрясениями в океане. В этом случае они называются «цунами». Средняя глубина океана близка к 5 км ($h = 5 \cdot 10^3$ см). Поэтому приливные волны с длиной, много большей 5 км, можно считать волнами в мелкой воде. В океане цунами распространяется со скоростью

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{980 \cdot 5 \cdot 10^3} = 2,2 \cdot 10^4 = 220 \text{ м/сек} = 790 \text{ км/ч},$$

что несколько меньше скорости обычного реактивного самолета. Сколько времени нужно такой волне, чтобы пройти расстояние от Аляски до Гавайев?

В 1883 г. произошло извержение вулкана Кракатау, сопровождавшееся самым большим в мире взрывом. (Кракатау расположен в Зондском проливе, между островами Суматрой и Явой. Описание этого взрыва можно найти в энциклопедии.) Образовались огромные приливные и атмосферные волны. Недавно было обнаружено существование воздушных бегущих волн, распространяющихся со скоростью 220 м/сек. (Напомним, что скорость звука при 0 °C равна 332 м/сек.) Существование этих воздушных волн, возможно, объясняет, почему приливные водяные волны от взрыва появлялись с обратной стороны материков, которые должны были бы блокировать прохождение водяных волн. По-видимому, приливные волны «перепрыгивали» материковые массивы, будучи связанными с воздушными волнами, имеющими ту же скорость (и то же время возбуждения)*).

Вы можете создать свои собственные мелководные приливные волны. Возьмите квадратный сосуд со стороной около 50 см. Наполните его водой на глубину $\frac{1}{2} \div 1$ см. Резко толкните сосуд (или поднимите один конец сосуда и неожиданно бросьте его). Таким образом вы создадите два бегущих волновых пакета на двух концах сосуда, распространяющихся в противоположных направлениях. Следите за большим из двух пакетов. Измерьте скорость пакета, засекая время прохождения пакетом нескольких длин сосуда. Воспользуйтесь секундомером. Можно также считать хлопки, которые соответствуют удару пакета о стенки сосуда, запоминая «музыкальный темп» и измеряя его с помощью часов. Насколько хорошо согласу-

*) См. статью: F. P r e s s, D. H a r k r i d e r, Air-Sea Waves from the Explosion of Krakatoa, Science 154, 1325 (Dec. 9, 1966).

ются ваши результаты со значением скорости $v = \sqrt{gh}$? Увеличивая глубину воды, вы постепенно дойдете до глубины, когда волны уже не будут мелководными. В этом случае дисперсионное соотношение постепенно переходит в дисперсионное соотношение для глубоководных гравитационных волн $\omega^2 = gk$, т. е.

$$v_{\phi} = \lambda v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

(Мы выведем это соотношение в главе 7.) Таким образом, волновой пакет будет распространяться, не сохраняя свою форму. Для достаточно мелкой воды (глубина меньше 1 см) форма пакета сохраняется очень хорошо на нескольких метрах.

Наконец, возбудите бегущую приливную волну в ванне, «толкнув с помощью доски сразу всю воду на одном конце ванны. Измерьте время распространения волны «туда и обратно» и определите скорость. Равна ли она \sqrt{gh} ?

6.13. Опыт. Музыкальные трели и полоса частот. Для этого опыта необходим рояль. Возьмите трель на двух соседних нотах (отличающихся на полтона). Начните с двух высоких нот. Перебирайте две соседние клавиши медленно, затем так быстро, как только можете. Оцените частоту трели. Можете ли вы еще различить обе ноты в трели? Теперь возьмите трель на двух соседних басовых нотах, перебирая клавиши вначале очень медленно, затем все более быстро. Существует ли частота трели, начиная с которой звучание двух нот переходит в беспорядочную, неразличимую смесь? Оцените эту частоту. Теперь сделайте расчет и решите, насколько хорошо ваше ухо и мозг различают два отдельных максимума в разложении Фурье в том случае, когда ширина пиков по частоте (измеренная на уровне половинной мощности) не мала по сравнению с расстоянием (по частоте) между максимумами пиков.

6.14. Групповая скорость за граничными частотами. Покажите, что для системы связанных маятников групповая скорость на частотах, меньших нижней граничной частоты и больших верхней граничной частоты, равна нулю. Чему равна фазовая скорость на двух этих частотах? Нарисуйте график дисперсионного соотношения, т. е. график зависимости ω от k . Покажите, как из этой диаграммы можно определить фазовую и групповую скорости.

6.15. Фурье-анализ экспоненциальной функции. Рассмотрим функцию $f(t)$, которая равна нулю для отрицательных t и равна $\exp(-t/2t)$ для $t \geq 0$. Найдите коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$ этой функции в случае представления $f(t)$ непрерывной суперпозицией (интегралом Фурье):

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega.$$

6.16. Фурье-анализ одного колебания синусоидальной волны. Предположим, что функция $f(t)$ равна нулю всюду, за исключением интервала от $t = t_1$ до $t = t_2$. Предположим далее, что на интервале $\Delta t = t_2 - t_1$ функция $f(t)$ совершает точно одно синусоидальное колебание с угловой частотой ω_0 (т. е. $\Delta t = T_0 = 2\pi/\omega_0$), причем на концах интервала функция имеет нулевые значения. Найдите коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$ в случае представления этой функции интегралом Фурье:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega(t - t_0) + B(\omega) \cos \omega(t - t_0)] d\omega.$$

Нарисуйте примерный график зависимости коэффициентов Фурье от ω . Нарисуйте также функцию $f(t)$.

6.17. Струна с грузами. Выведите выражения для групповой скорости бегущих волн в струне с грузами. Нарисуйте (грубо) график дисперсионного соотношения для струны с грузами при изменении k от $k=0$ до максимального значения. Нарисуйте (грубо) график зависимости групповой скорости от k и график зависимости фазовой скорости от k для $0 < k < k_{\text{макс}}$.

6.18. *Фазовая и групповая скорости света в стекле.* Предположим, что дисперсия определяется одним резонансом. Пренебрегая затуханием, имеем

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m},$$

где N — число резонирующих электронов в единице объема.

а) Нарисуйте график зависимости квадрата показателя преломления n^2 от ω для $0 \leq \omega < \infty$. Важными параметрами этого графика являются его значения и наклон при $\omega=0$, при ω , чуть меньшем и чуть большем ω_0 , при $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ и при ω , равном бесконечности. Как вы объясните область, где n^2 отрицательно? область около ω_0 ?

б) Выведите следующую формулу для квадрата групповой скорости:

$$\left(\frac{v_{гр}}{c} \right)^2 = \frac{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}{\left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right]^2}.$$

Постройте зависимость $(v_{гр}/c)^2$ от ω . Покажите, что $(v_{гр}/c)^2$ всегда меньше, чем единица, что является требованием теории относительности. Покажите, что $v_{гр}^2$ отрицательно в том же диапазоне частот, где n^2 отрицательно. Для какой частоты групповая скорость максимальна? Чему равна групповая скорость на этой частоте?

6.19. *Фазовая и групповая скорости в глубокой воде.* Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho},$$

где $g=980$, $T=72$ и $\rho=1,0$ (все в единицах СГС). Выведите формулу для групповой и фазовой скорости. Покажите, что групповая скорость равна фазовой, когда gk и Tk^3/ρ равны, и что это имеет место для длины волны $1,7$ см и скорости $23,1$ см/сек. Покажите, что для волн *поверхностного натяжения*, т. е. волн с длиной, значительно меньшей $1,7$ см, групповая скорость равна фазовой, умноженной на $1,5$. Покажите, что для *гравитационных волн*, т. е. волн с длиной волны значительно большей, чем $1,7$ см, групповая скорость равна половине фазовой. Продолжите табл. 6.1 из п. 6.2, включив в нее волны с длиной 128 м и 256 м. Значение скоростей дайте в км/ч.

6.20. *Фурье-анализ одиночного прямоугольного импульса.* Рассмотрим прямоугольный импульс $\psi(t)$, равный нулю для всех t , кроме интервала от t_1 до t_2 . Внутри этого интервала $\psi(t)$ имеет постоянное значение $1/\Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$. Пусть t_0 — время в центре этого интервала. Покажите, что функция $\psi(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega(t - t_0) d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega,$$

где

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta t \omega}{\frac{1}{2} \Delta t \omega}.$$

Постройте график зависимости B от ω . В пределе, когда Δt стремится к нулю, $\psi(t)$ стремится к дельта-функции, которую обозначим $\delta(t - t_0)$. Чему равно $B(\omega)$ для дельта-функции?

6.21. *Фурье-анализ цуга синусоидальных колебаний.* Пусть функция $\psi(t)$ равна нулю вне интервала, простирающегося от t_1 до t_2 . Длина интервала равна $\Delta t = t_2 - t_1$, а центральное значение $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Положим, что $\psi(t) = \cos \omega(t - t_0)$ внутри этого интервала.

а) Покажите, что $\psi(t)$ может быть записана в виде

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega,$$

$$\pi B(\omega) = \frac{\sin[(\omega_0 + \omega) \frac{1}{2} \Delta t]}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin[(\omega_0 - \omega) \frac{1}{2} \Delta t]}{\omega_0 - \omega}.$$

б) Покажите, что если Δt значительно меньше любого периода, которым мы интересуемся, то $\pi B(\omega)$ имеет постоянное значение, равное Δt .

в) Покажите, что если Δt содержит много колебаний, т. е. если $\omega_0 \Delta t \gg 1$, то для ω , достаточно близкого к ω_0 , коэффициент $B(\omega)$ практически определяется одним вторым членом:

$$\pi B(\omega) \approx \frac{\sin[(\omega_0 - \omega) \frac{1}{2} \Delta t]}{\omega_0 - \omega}, \quad |\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|.$$

г) Постройте графики $\psi(t)$ и $B(\omega)$ для случая в). Эта задача поможет вам понять *расширение* спектральных линий *из-за столкновений*. Невозмущенный атом, испускающий почти монохроматический видимый свет, имеет среднее время высвечивания порядка 10^{-8} сек. Поэтому спектр Фурье этого излучения занимает полосу частот шириной $\Delta\nu \sim 10^8$ *гц*. Если атомы находятся в газоразрядной лампе, то полоса частот испускаемого света (или «ширина линии» в оптической терминологии) оказывается порядка 10^9 *гц*, а не 10^8 *гц*. Такое *расширение спектральной линии* отчасти связано с тем, что атомы претерпевают *столкновения*, которые приводят к резкому изменению амплитуды и фазы. Действие столкновения аналогично внезапному прекращению гармонического колебания. Данный атом может провести большую часть времени «невозмущенным». Несождачно он возбуждается, и колебания элементов в возбужденном атоме соответствуют колебаниям затухающего гармонического осциллятора с временем затухания порядка 10^{-8} сек (мы рассуждаем классически; более точная картина требует знания квантовой механики). Однако в течение времени Δt , равного примерно 10^{-9} сек (в типичном газоразрядном световом источнике), атом испытывает столкновение, в результате которого колебание обрывается случайным образом. Если сложить свет от многих атомов, то полоса частот $\Delta\nu$ определится как $\Delta\nu \approx (1/\Delta t) \approx 10^9$ *гц*.

6.22. Фурье-анализ почти периодически повторяющегося прямоугольного импульса. Одиночный прямоугольный импульс длительностью Δt имеет непрерывный частотный спектр. Наиболее важная его часть заключена в пределах частот от нуля до $\nu_{\max} = \Delta\nu$, где $\Delta\nu = 1/\Delta t$. (См. задачу 6.20.) Периодически повторяющийся прямоугольный импульс длительностью Δt , с периодом повторения T_1 ($T_1 > \Delta t$), дает *дискретный* частотный спектр, состоящий из *гармоник* (целых кратных) частоты $\nu_1 = 1/T_1$. Наиболее важная часть этого спектра простирается от нуля до $\nu_{\max} = \Delta\nu$, где $\Delta\nu \approx 1/\Delta t$. (См. задачу 2.30.)

Теперь рассмотрим «почти периодически» повторяющийся прямоугольный импульс длительностью Δt с периодом T_1 . Время $T_{\text{повт}}$, в течение которого происходит многократное повторение импульсов, конечно, больше периода T_1 . Если бы $T_{\text{повт}}$ было бесконечно, то мы имели бы периодически повторяющийся прямоугольный импульс, что соответствует рассмотренному выше случаю. При этом каждая гармоника была бы бесконечно узкой (по частоте).

а) Покажите, что для конечного значения $T_{\text{повт}}$ спектр Фурье почти периодического прямоугольного импульса представляется суперпозицией почти дискретных гармоник основной частоты $\nu_1 = 1/T_1$. В действительности каждая гармоника представлена узкой полосой частот шириной $\delta\nu \approx 1/T_{\text{повт}}$. Наиболее «важные» гармоники лежат между нулем и $\nu_{\max} \approx 1/\Delta t$. Нет необходимости заниматься интегрированием, используйте качественные рассуждения.

б) Нарисуйте графики, передающие форму $\psi(t)$ и фурье-коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$.

6.23. Фиксация мод лазера для получения узких импульсов видимого света. (Сначала сделайте задачу 6.22.) Схематически лазер можно представить в виде некоторой области длиной L , на концах которой установлены зеркала для отражения света «туда и обратно». При соответствующих условиях, когда область L запол-

нена возбужденными атомами, излучение от каждого атома стимулирует излучение других возбужденных атомов, причем фазовые соотношения между всеми излучающими атомами таковы, что в сумме для излучения по длине лазера имеет место конструктивная интерференция. При этом все атомы колеблются в фазе и колебания атомов плюс излучение (имеется в виду излучение между зеркалами) соответствуют *нормальной моде* всей системы в целом. Частоты возможных нормальных мод свободных колебаний являются гармониками основной частоты ν_1 . Период $T_1 = 1/\nu_1$ определяет время, необходимое для прохождения света туда и обратно между зеркалами, т. е. $T_1 = 2L/(c/n)$, где n — показатель преломления. Тогда $\nu_1 = 1/T_1$ и возможные моды имеют частоты $\nu = m\nu_1$, где $m = 1, 2, 3$ и т. д. Далее, если бы не было зеркал, то возбужденные атомы независимо испускали бы свое обычное излучение (свет). Для лазера, наполненного газовой смесью гелий — неон, это излучение соответствует красному свету с длиной волны 6328 Å. Время затухания для отдельного атома в этом случае составляет примерно 10^{-9} сек, что дает полосу частот $\Delta\nu$ порядка 10^9 гц. Однако если возбуждена нормальная мода всей системы (атомы плюс излучение, т. е. присутствуют зеркала), то время затухания для этой моды значительно больше, чем время затухания τ отдельного атома. Затухание моды вызвано утечкой света (излучения) через зеркала, отклонением пучка света от параллельности и другими причинами. Время затухания $T_{\text{затух}}$ может быть в сотни и тысячи раз больше времени высвечивания свободного атома. Это означает, что каждая мода имеет полосу частот $\delta\nu = 1/T_{\text{затух}}$, которая в сотни и тысячи раз уже естественной ширины линии $\Delta\nu$. Однако естественная ширина линии $\Delta\nu$ играет важную роль. Поскольку именно свободно высвечивающиеся атомы возбуждают всю систему, то в значительной степени будут возбуждаться только те моды, для которых частота моды $m\nu_1$ лежит где-то внутри полосы $\Delta\nu$. Для видимого света и при длине L порядка метра номер моды m будет очень большим числом.

а) Каков порядок величины m ?

б) Нарисуйте форму частотного спектра важных мод лазера. Другими словами, представьте графически то, что мы только что обсудили. Отметьте на этом графике интервал ν_1 между соседними модами, ширину $\delta\nu$ каждой моды и ширину $\Delta\nu$ наиболее легко возбужденных мод.

Теперь продолжим наши рассуждения. Если возбуждается какая-нибудь система, которая затем начинает колебаться, то колебания соответствуют более или менее сложной суперпозиции нормальных мод. Если система возбуждена достаточно грубым образом, то ее колебания будут представлены большим количеством мод с произвольными фазовыми соотношениями между ними. Такую суперпозицию мы можем назвать «некогерентной» суперпозицией мод. Обычно она имеет место при возбуждении нескольких мод лазера. Например, нетрудно возбудить лазер таким образом, чтобы практически все моды в диапазоне $\Delta\nu$ оказались возбужденными. Фазовые соотношения между различными модами «случайны» в следующем смысле: если вы посмотрите на систему в данный момент времени и зафиксируете относительные фазы мод, а затем посмотрите в более позднее время, много большее, чем время $T_{\text{затух}}$, то относительные фазы отдельных мод изменятся непредсказуемым образом. Это происходит потому, что в течение времени порядка $T_{\text{затух}}$ вся энергия, соответствующая данной моде и определяемая энергией возбуждения одной группы атомов, ослабнет (рассеется), но восполнится энергией других, вновь возбужденных атомов. Таким образом, в течение интервала $T_{\text{затух}}$ происходит по крайней мере одно вторичное возбуждение моды, т. е. «включение». «Время включения» случайно. Поэтому фазы меняются непредсказуемым образом (произвольно) в течение времени порядка $T_{\text{затух}}$. Отметим, что частотный спектр главных мод, который вы нарисовали, очень похож на частотный фурье-спектр почти периодически повторяющегося прямоугольного импульса (задача 6.22). Однако есть одно крайне важное различие. В случае почти периодической прямоугольной волны имеют место вполне определенные фазовые соотношения между частотными компонентами суперпозиции. Для некогерентной смеси мод лазера фазовые соотношения не определены.

в) Покажите, что суперпозиция некогерентной смеси мод лазера, каждая из которых имеет ширину по частоте $\delta\nu = 1/T_{\text{затух}}$ при ширине всей суперпозиции $\Delta\nu$, соответствует функции $\psi(t)$, являющейся почти периодической функцией t с периодом T_1 . Покажите, что эта почти периодическая функция будет сохранять

подобие самой себе в течение последовательных временных интервалов T_1 , содержащихся во временных интервалах порядка $T_{затух}$. Покажите, что, хотя и может случиться так, что в течение данного временного интервала порядка $T_{затух}$ почти периодическая функция $\psi(t)$ будет иметь вид периодически повторяющейся прямоугольной волны длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$, это будет редкой случайностью. Обычно мы ожидаем, что $\psi(t)$ значительно отличается от нуля в течение целого периода T_1 . Таким образом, мы должны иметь $\Delta t \gg 1/\Delta\nu$. Теперь мы подготовлены для понимания красивого изобретения, которое обеспечивает фиксацию моды. Положим, что каким-либо способом (каким именно, пока нас не интересует) нам удалось получить все главные моды лазера в фазе друг с другом. Тогда мы можем ожидать, что когерентная суперпозиция мод с одинаковыми фазовыми постоянными даст почти периодическую функцию $\psi(t)$, состоящую из повторяющихся с периодом T_1 импульсов длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$, форма которых остается примерно постоянной в течение времени порядка $T_{затух}$. Это наше предположение может быть подтверждено опытным путем. Вот описание остроумного метода фиксации мод. Включим лазер. Какая-то мода около центра полосы $\Delta\nu$ возбуждается первой. Назовем эту моду ν_0 . Теперь сделаем так, что (например) прозрачность среды (или зеркал, или каких-либо предметов, через которые проходит свет) изменяется или «модулируется» по синусоиде относительно некоторого среднего значения. Частота модуляции выбрана равной основной частоте $\nu_1 = 1/T_1$, где T_1 — время прохождения излучения «туда и обратно» (между зеркалами). Таким образом, амплитуда колебаний первой моды окажется модулированной, а частота модуляции будет равна ν_1 :

$$\Psi_{\text{мода 1}} = [A_0 + A_{\text{мод}} \cos \omega_1 t] \cos \omega_0 t.$$

Это «почти гармоническое» колебание может быть записано как суперпозиция гармонических колебаний с частотами ω_0 , $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$:

$$\Psi_{\text{мода 1}} = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} A_{\text{мод}} \cos (\omega_0 + \omega_1) t + \frac{1}{2} A_{\text{мод}} \cos (\omega_0 - \omega_1) t.$$

Члены с $\cos (\omega_0 + \omega_1) t$ и $\cos (\omega_0 - \omega_1) t$ действуют теперь как возмущающие силы. Они помогают «включиться» модам $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$. Эти моды возбуждаются возмущающими силами, а не включаются в колебания системы случайным образом. Моды имеют определенную фазу относительно центральной моды ω_0 . Как только моды $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$ включатся, будет происходить модуляция их амплитуд, вследствие того же физического эффекта, который определял модуляцию амплитуды моды ω_0 . Фаза модулированных колебаний будет одинакова. Далее, эти модулированные по амплитуде моды будут содержать компоненты, которые действуют как вынуждающие силы для мод $\omega_0 + 2\omega_1$ и $\omega_0 - 2\omega_1$. Таким образом, будут включаться моды с частотами, все больше отличными от ω_0 , и с определенными фазовыми соотношениями.

Для газового лазера естественное время распада τ порядка 10^{-9} сек, чему отвечает собственная ширина линии $\Delta\nu$ порядка 10^9 гц. Поэтому при помощи газового лазера с фиксацией моды можно генерировать импульсы длительностью $\Delta t \approx 10^{-9}$ сек. Для «твердого» лазера, сделанного, например, из полупроводящего рубина, собственное время затухания отдельных атомов порядка 10^{-11} сек или 10^{-12} сек. (Вследствие столкновений с соседними атомами в твердом теле колебания затухают быстрее.) Поэтому излучение от возбужденных атомов рубина занимает полосу частот примерно равную 10^{12} сек $^{-1}$. Эта полоса соответствует также легко возбуждаемым модам лазера. Таким образом, используя твердый лазер, можно генерировать ультракороткие световые импульсы длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu \approx 10^{-11}$ сек или 10^{-12} сек. Конечно, в соответствии с классической механикой, эта длительность просто равна длительности светового импульса от высвечивания одного атома в твердом теле. Тогда почему мы с таким энтузиазмом говорим о полученном результате? Лишь потому, что один атом не может дать много света, а в лазере мы имеем огромное число атомов, испускающих излучение одновременно. В результате возникает необычайно *мощный* световой импульс малой длительности. Следует также отметить, что, в соответствии с квантовой механикой, отдельный атом не испускает свет непрерывным потоком, как в классической модели. Вместо этого световой «фотон» испускается в дискретном сгустке энергии. Для отдельного атома невозможно предсказать точно, когда этот сгусток энергии будет испущен. Известна

только зависимость вероятности испускания от времени. Таким образом, используя отдельный атом, нельзя получить синхронизированные короткие световые импульсы.

Ультракороткие световые импульсы могут быть использованы для многих интересных экспериментов*).

6.24. Частотная дельта-функция. В п. 6.4 мы рассмотрели суперпозицию

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

для «прямоугольного» спектра частот, имеющего форму $B(\omega) = 1/\Delta\omega$ для ω в интервале от ω_1 до $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ и $B(\omega) = 0$ для всех других частот. Мы нашли, что суперпозиция имеет вид

$$\psi(t) = \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega t}{\frac{1}{2} \Delta\omega t} \right] \cos \omega_0 t,$$

где ω_0 — частота, отвечающая центру интервала $\Delta\omega$. Пусть время $t_{\text{макс}}$ будет больше длительности любого задуманного вами опыта. Покажите, что если $\Delta\omega$ достаточно мало, так что $\Delta\omega t_{\text{макс}} \ll 1$, то $\psi(t)$ представляет точно гармоническое колебание с постоянными амплитудой и фазой. В этом случае коэффициент Фурье $B(\omega)$ называется «дельта-функцией частоты». Дельта-функция частоты равна нулю всюду, за исключением малой области $\Delta\omega$. Интеграл от дельта-функции по частоте ω равен единице. Покажите, что выражение для $B(\omega)$, данное выше, обладает этими свойствами при условии $\Delta\omega \ll 1/t_{\text{макс}}$ и поэтому является примером дельта-функции частоты.

6.25. Резонанс в приливных волнах. Допустим, что глубина океана постоянна и равна 5 км. (Это примерно средняя глубина океана.) Покажите, что приливные волны, образованные (например) землетрясением, распространяются со скоростью порядка 200 м/сек. Теперь предположим, что на Земле нет континентов, а вода заключена в «каналы», идущие по параллелям, так что она может смещаться только на запад или на восток. Но какой широте должна распространяться приливная волна (образованная землетрясением), чтобы обогнуть земной шар за 25 часов? Обозначим эту широту θ_0 . (На экваторе $\theta_0 = 0$, а на полюсе $\theta_0 = 90^\circ$.)

Солнце и Луна являются источниками возмущающих гравитационных сил, которые вызывают приливы. Рассмотрим Луну. (Солнце создает в два раза меньшую вынуждающую силу.) Лунные сутки длятся 25 ч. Если считать, что Земля не вращается вокруг своей оси, то приливы, вызываемые Луной, будут возникать прямо под Луной и в диаметрально противоположной точке земной поверхности. В новолуние и полнолуние суммарное действие Солнца и Луны будет приводить к очень большим подъемам воды. Поэтому в эти дни месяца можно ожидать высокой воды точно в полдень и полночь и низкой воды на рассвете и на закате (для «статической модели» невращающейся Земли). Так, по крайней мере, будет вести себя вода у островов в океане. Следует ожидать, что в гавани вода будет втекать или вытекать. Теперь рассмотрим нашу модель с каналами и будем считать, что Земля вращается. Когда в этом случае следует ожидать появления приливов в канале на экваторе, в полнолуние или новолуние? Когда приливы будут возникать на широтах, больших чем θ_0 ? (У к а з а н и е. Рассмотрите вынужденное движение осциллятора.)

Дальнейшие сведения о приливных волнах, о сейшах в Женевском озере, об эволюции системы Земля — Луна и о других связанных с проблемой приливов явлениях можно получить в популярной классической книге «Приливы», написанной Джорджем Дарвином (сыном Чарльза Дарвина) в 1882 г. В этой книге описаны также простые и остроумные машины для фурье-анализа, разработанные в то время.

6.26. Нездиспергирующие волны. Покажите, что любая дифференцируемая функция $f(t')$, где $t' = t - (z/v)$, удовлетворяет классическому волновому уравнению,

*) См. A. de Maria, D. Stetser, W. Glenn, Jr., *Ultrashort Light Pulse*, Science **156**, 1557 (June 23, 1967).

т. е.

$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial t'^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t')}{\partial z'^2}.$$

Покажите, что любая дифференцируемая функция $g(t'')$, где $t'' = t + (z/v)$, также удовлетворяет классическому волновому уравнению. Укажите пример функции $f(t')$ и проверьте, что она удовлетворяет классическому волновому уравнению.

6.27. Амплитудная модуляция и нелинейность.

а) Одним из способов амплитудной модуляции несущей волны является пропускание тока $I = I_0 \cos \omega_0 t$ (ω_0 — частота несущей волны) через сопротивление R , которое меняется с частотой модуляции, т. е. $R = R_0 (1 + a_m \cos \omega_{\text{мод}} t)$. (В усильном микрофоне сопротивление модулируется при движении мембраны, сжимающей угольный порошок.) Напряжение $V = IR$, приложенное к сопротивлению, будет в этом случае модулированным по амплитуде. Получите выражение для V как суперпозиции несущей (частота ω_0), верхней боковой (частота $\omega_0 + \omega_{\text{мод}}$) и нижней боковой (частота $\omega_0 - \omega_{\text{мод}}$) полос.

б) Имеем два напряжения, одно из них меняется с несущей частотой, а второе — с частотой модуляции. Задача в том, что сделать с этими напряжениями $V_0 = A_m \cos \omega_0 t$ и $V_m = A_m \cos \omega_{\text{мод}} t$, чтобы получить модулированное по амплитуде напряжение? Вначале предположим, что вы просто сложили эти напряжения, подав их на одну широкополосную антенну. Получится ли у вас что-нибудь?

в) Предположим, что после сложения двух этих напряжений мы подаем результирующее напряжение на вход усилителя, например, между сеткой и катодом радиолампы. Считаем, что *усилитель линейный*, т. е. напряжение на выходе пропорционально напряжению на входе. Получим ли мы на выходе амплитудно-модулированные колебания?

г) Предположим, что выходное напряжение усилителя содержит как первую, так и вторую степень входного напряжения:

$$V_{\text{вых}} = A_1 V_{\text{вх}} + A_2 (V_{\text{вх}})^2.$$

Пусть $V_{\text{вх}} = V_0 + V_m$ [см. часть б)]. Покажите, что благодаря нелинейному (квадратичному) члену $A_2 (V_{\text{вх}})^2$ выходное напряжение усилителя, наряду с другими членами, содержит модулированную по амплитуде несущую волну.

д) Модулированная по амплитуде несущая волна в г) содержит компоненты с частотами ω_0 , $\omega_0 + \omega_{\text{мод}}$ и $\omega_0 - \omega_{\text{мод}}$. Какие еще частотные компоненты присутствуют в $V_{\text{вых}}$? Нарисуйте полный частотный спектр выходного напряжения усилителя. Как избавиться от нежелательных частотных компонент, используя полосовые фильтры? Положим, что $\omega_{\text{мод}}$ мало по сравнению с ω_0 . Насколько избирательны должны быть фильтры?

6.28. Амплитудная демодуляция и нелинейность. Предположим, что принимающая антенна «уловила» волну, модулированную по амплитуде:

$$V = V_0 (\cos \omega_0 t) (1 + a_m \cos \omega_{\text{мод}} t).$$

Как выделить из этого напряжения напряжение модуляции $a_m \cos \omega_{\text{мод}} t$? В вашем распоряжении любые полосовые фильтры, а также нелинейный усилитель, описанный в задаче 6.27, для которого

$$V_{\text{вых}} = A_1 V_{\text{вх}} + A_2 (V_{\text{вх}})^2.$$

(У к а з а н и е. Представьте модулированную по амплитуде несущую волну как суперпозицию волн, затем пропустите эту суперпозицию через нелинейный усилитель и воспользуйтесь фильтрами.)

6.29. Частотная модуляция. Модулированное по частоте напряжение может быть записано в виде

$$V = V_0 \cos [\omega_0 (1 + a_m \cos \omega_{\text{мод}} t) t] = V_0 \cos \omega t,$$

где

$$\omega = \omega_0 + \omega_0 a_m \cos \omega_{\text{мод}} t.$$

Одним из способов образования модулированной по частоте несущей волны является использование емкостного микрофона. Звуковые волны воздействуют на мембрану, которая связана с одной из пластин конденсатора. Емкость

конденсатора равна

$$C = C_0 (1 + c_m \cos \omega_{\text{мод}} t).$$

Предположим, что эта емкость входит в LC -цепочку, у которой собственная частота колебаний равна $\omega = \sqrt{1/LC}$. Пусть напряжение на емкости равно, например, $V = V_0 \cos \omega t$. Покажите, что, если c_m меньше единицы, мы получаем модулированное по частоте напряжение с амплитудой a_m , пропорциональной c_m . Найдите коэффициент пропорциональности между c_m и a_m .

6.30. Фазовая модуляция (ФМ). Модулированное по фазе напряжение имеет вид

$$V = V_0 \cos (\omega_0 t + a_m \sin \omega_{\text{мод}} t) = V_0 \cos (\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$\varphi = a_m \sin \omega_{\text{мод}} t.$$

Мгновенное значение частоты можно получить, продифференцировав по t выражение для фазы в круглых скобках:

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + a_m \omega_{\text{мод}} \cos \omega_{\text{мод}} t.$$

Сравнение этого результата с задачей 6.29 показывает, что фазовая и частотная модуляции тесно связаны.

а) Покажите, что модулированное по фазе колебание может быть представлено суперпозицией гармонических колебаний с частотами ω_0 , $\omega_0 \pm \omega_{\text{мод}}$, $\omega_0 \pm 2\omega_{\text{мод}}$, $\omega_0 \pm 3\omega_{\text{мод}}$ и т. д. (Укажите a и φ). Воспользовавшись тригонометрическим тождеством, разложите $\cos (\omega_0 t + \varphi)$. Затем разложите $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в ряд Тейлора. Далее воспользуйтесь тригонометрическими соотношениями, выведенными в задаче 1.13.)

б) Покажите, что если амплитуда модуляции a_m мала по сравнению с единицей, то мы можем пренебречь всеми членами суперпозиции, за исключением членов с частотами ω_0 и $\omega_0 \pm \omega_{\text{мод}}$. Таким образом, для малой амплитуды модуляции имеем только несущую и одну верхнюю и одну нижнюю боковые полосы. Поэтому для малых a_m необходима полоса частот для передачи информации такая же, как и для АМ (амплитудной модуляции). При больших a_m необходимая полоса становится больше, так как появляются дополнительные боковые полосы на частотах $\omega_0 \pm 2\omega_{\text{мод}}$ и т. д.

в) Сравните относительную фазу несущей и двух ближайших боковых полос при ФМ с фазовыми соотношениями между несущей и боковыми полосами при АМ в задаче 6.27. Вы увидите, что фазовые соотношения различны. Надо сказать, что это дает возможность отличить ФМ (а также ЧМ) от АМ.

г) Предположим, что мы хотим преобразовать АМ-напряжение в ФМ-напряжение. В нашем распоряжении любые полосовые фильтры, а также схема, которая обеспечивает желаемый фазовый сдвиг. Придумав, как это сделать, посмотрите задачу 9.58. Задача рассмотрена в главе 9 в связи с обсуждением фазово-контрастного микроскопа (задача 9.59).

6.31. Передача одной боковой полосы. Если информация, которую необходимо передать, занимает полосу частот от $\omega_{\text{мод}}$ (мин) до $\omega_{\text{мод}}$ (макс), то АМ- или ФМ-широковещательный диапазон простирается от $\omega_0 - \omega_{\text{мод}}$ (макс) до $\omega_0 + \omega_{\text{мод}}$ (макс), где ω_0 — частота несущей волны. Таким образом, полоса частот составляет $2\omega_{\text{мод}}$ (макс). Полоса частот, необходимая для работы станции, является «драгоценностью», поскольку полосы частот различных станций в данном районе не должны перекрываться, во избежание взаимных помех.

а) Предположим, что мы ведем передачу на АМ-радиоволнах, причем используем полосовой фильтр для отделения несущей и верхней боковой полосы от нижней (т. е. нижняя полоса не передается). Придумайте, как восстановить нижнюю полосу в приемнике, пропуская принимаемый сигнал (несущую и верхнюю полосу) через нелинейный усилитель, описанный в задачах 6.27 и 6.28. Обсудите фазовые и амплитудные соотношения, необходимые для того, чтобы получить сигнал, пропорциональный первоначальному АМ-сигналу.

б) Можно еще больше уменьшить передаваемую полосу частот, если отфильтровать не только нижнюю боковую полосу, но и несущую. Предположим, что в

эфир передается только верхняя боковая полоса. Предположим далее, что приемник имеет свой собственный генератор, который выдает сигнал $V=A \cos \omega_0' t$, где ω_0' максимально близко к ω_0 (ω_0' никогда не будет точно равно ω_0 вследствие неизбежных дрейфов, вызванных различными причинами). Придумайте способ, с помощью которого, используя сигнал от генератора и сигнал от передатчика (т. е. верхнюю боковую полосу), можно восстановить нижнюю боковую полосу. Используйте нелинейные усилители, фильтры, фазосдвигающие цепочки, т. е. все, что покажется необходимым.

в) Предположим, что частота несущей волны равна 100 МГц ($1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$) и частота ω_0' собственного генератора в приемнике, используемая при передаче с помощью одной боковой полосы, превышает ω_0 (например) на 30 Гц . Таким образом, ошибка по частоте составляет одну трехмиллионную. Предположим, что флейта играет ноту А 440 (т. е. 440 Гц). Какая нота будет звучать из громкоговорителя после того, как вы восстановите боковые полосы и произведете демодуляцию? Результат показывает, почему коммерческое телевидение пользуется передачей одной боковой полосы и несущей. При передаче речи (голоса) несущая полоса может быть подавлена, так как никого не волнует неточное воспроизведение тона речи.

6.32. Модуляция с помощью субчастот. Часто мы хотим иметь два или более независимых канала информации, используя для каждого одну и ту же несущую частоту ω_0 . По этим каналам информация может передаваться в виде полос частот модуляции $\omega_{\text{мод}}(1)$, $\omega_{\text{мод}}(2)$ и т. д. Если эти полосы не перекрываются, то можно модулировать несущую частоту сразу всеми частотами модуляции. Например, можно сложить колебания несущей частоты и частот модуляции от всех каналов на входе нелинейного усилителя, как было сделано для одного канала в задаче 6.27. На выходе усилителя (наряду с другими членами) будем иметь модулированную по амплитуде несущую частоту, что эквивалентно суперпозиции колебаний, содержащих частоты ω_0 , $\omega_0 \pm \omega_{\text{мод}}(1)$, $\omega_0 \pm \omega_{\text{мод}}(2)$ и т. д.

а) Докажите это утверждение.

В приемнике мы должны произвести демодуляцию (например, как в задаче 6.28), чтобы восстановить полосы частот модуляции $\omega_{\text{мод}}(1)$, $\omega_{\text{мод}}(2)$ и т. д. Затем, если полосы не перекрываются, их можно разделить с помощью полосовых фильтров. В результате мы получим раздельный выход информации для каналов 1, 2 и т. д., т. е. каналы не будут перекрываться.

Однако очень часто полосы частот модуляции отдельных каналов перекрываются и описанный способ не годится. Например, при стереофоническом радиовещании с ФМ используются два канала. Один канал связан с микрофоном, установленным, например, около деревянных духовых инструментов, а другой канал — с микрофоном, расположенным около медных духовых инструментов. Поскольку частоты, передаваемые по этим каналам, соответствуют музыкальным частотам, то естественно, что каналы перекрываются.

Другим примером является телефонная линия дальней связи или радиосвязь, осуществляемые с одной несущей частотой. В этих случаях различные каналы представлены различными одновременными телефонными разговорами и частотами модуляции являются частоты человеческого голоса. Примерно та же проблема имеет место при передаче показаний приборов, установленных на спутниках, на Землю («телетелетрия»). Каждый прибор имеет отдельный канал. Частоты модуляции зависят от того, как сконструирован прибор. (Например, термометр может представлять собой конденсатор, емкость которого меняется с температурой. Эта емкость, включенная в LC-цепь генератора, может определять $\omega_{\text{мод}}$.) Полосы частот модуляции могут сильно перекрываться.

Очевидно, необходимо как-то «пометить» каналы, чтобы иметь возможность их разделять. Одним из способов может быть использование различных несущих частот для каждого канала. Именно этот способ используется различными радиоприемными станциями. Однако существует более удобный способ, называемый *методом субчастот*. При этом способе каждый канал помечается своей собственной «субчастотой» следующим образом. Назовем ω_1 , ω_2 и т. д. субчастотами для каналов 1, 2 и т. д. (Субчастоты значительно больше частот модуляции. Основная несущая частота ω_0 , в свою очередь, значительно больше любой субчастоты.) Для канала 1 осуществляется амплитудная (или частотная) модуляция субчастоты ω_1

частотой $\omega_{\text{мод}}(1)$. В результате на выходе канала 1 имеет место суперпозиция с частотами $\omega_1, \omega_1 + \omega_{\text{мод}}(1)$ и $\omega_1 - \omega_{\text{мод}}(1)$. Точно так же на выходе канала 2 будем иметь суперпозицию с частотами (т. е. в суперпозицию будут входить члены с этими частотами) $\omega_2, \omega_2 + \omega_{\text{мод}}(2)$ и $\omega_2 - \omega_{\text{мод}}(2)$. Субчастоты ω_1 и ω_2 выбраны так, что найдется достаточно далеко друг от друга и перекрытия двух полос с центром в этих субчастотах не происходит, т. е., например, если ω_1 меньше ω_2 , то самая верхняя боковая полоса $\omega_1 + \omega_{\text{мод}}(1)$ меньше, чем самая нижняя боковая полоса $\omega_2 - \omega_{\text{мод}}(2)$. (Полос $\omega_{\text{мод}}(1)$ и $\omega_{\text{мод}}(2)$ имеется в виду некоторый диапазон частот.) Например, для стереорадиопередатч при ФМ типичные значения субчастот: $\nu_1 = 20 \text{ кГц}$ и $\nu_2 = 40 \text{ кГц}$. Если частоты модуляции (музыка) занимают диапазон от нуля до 10 кГц , то канал 1 будет иметь полосу от 10 до 30 кГц , а канал 2 — от 30 до 50 кГц . Пока что мы имеем две несущие частоты для двух каналов. Однако мы еще не подали сигналы на передающую антенну! Сложим сигналы на выходе всех каналов и будем рассматривать эту многоканальную, многополосную суперпозицию как один большой диапазон частот модуляции, простирающийся от самой нижней частоты в нижней боковой полосе канала 1 до самой верхней частоты в верхней боковой полосе самого большого канала (т. е. канала с максимальной подчастотой). Весь этот диапазон используем для модулирования основной несущей частоты ω_0 , подав эту суперпозицию на вход нелинейного усилителя (см. задачу 6.27).

б) Возьмем такой же нелинейный усилитель, как и в задаче 6.27. Что будет на его выходе? Не пользуясь формулами, постройте приблизительный график зависимости интенсивности (т. е. напряжения на выходе усилителя) от частоты. Отметьте полосы около ω_0 , которые вы будете подавать в передающую антенну. Отметьте также другие частоты, которые будут появляться на выходе усилителя и которые нужно будет сфилтровать.

в) В приемнике демодуляцию можно произвести следующим образом. Подадим сигнал, состоящий из несущей частоты ω_0 и боковых полос (т. е. сигнал, который вы пропустили на передающую антенну), на вход нелинейного усилителя, как в задаче 6.28. Выходное напряжение усилителя среди многих составляющих будет содержать составляющие с субчастотой ω_1 и ее боковые полосы $\omega_1 \pm \omega_{\text{мод}}(1)$. То же будет справедливо и для других каналов. Докажите это утверждение. Различные субчастоты и их боковые полосы не перекрываются и могут быть разделены с помощью полосовых фильтров. Таким образом, каждому каналу соответствует свой собственный выходной сигнал, причем выходные сигналы разных каналов не перекрываются.

6.33. Новый метод инфракрасной спектроскопии: модуляционная спектроскопия. В 1967 г. в технике инфракрасной астрономии произошла революция. Новый метод повышал разрешение по частоте в 100 раз и в 60 000 раз уменьшал время, необходимое для частотного анализа света. В этом методе остроумно использованы основные идеи метода субчастот, рассмотренные в задаче 6.32.

Частотный спектр звезды, испускающей видимый свет, может быть получен с помощью дифракционной решетки, за которой на соответствующем расстоянии расположена фотопластинка. На ней сразу получается весь спектр, так как волны, в зависимости от длины, дифрагируют в разных направлениях и попадают на разные части фотопластины. Почернение фотопластины при данном угле дифракции определяет интенсивность компоненты с данной длиной волны.

Для инфракрасного света (длины волн порядка 10^{-4} см) нет соответствующих фотоматериалов, однако дифракционная решетка может быть использована и для этих волн. Вместо фотопластины здесь можно взять фотоумножитель с передвижной щелью. Положение щели определяет угол дифракции и, таким образом, определяет длину волны. Выходной ток фотоумножителя определяет интенсивность. Если мы хотим иметь полный частотный спектр инфракрасного излучения, то должны при одном положении щели, подождав достаточно время (процесс должен установиться), определить интенсивность излучения данной длины волны, затем, переместив щель на расстояние, равное ширине щели, сделать то же самое для нового положения щели и т. д. Для получения полного спектра в частотном диапазоне $\nu_1 \div \nu_2$ с шагом $\Delta\nu$ необходимо сделать $(\nu_2 - \nu_1) / \Delta\nu$ отдельных замеров интенсивности. Для диапазона длин волн от 1 до 3 мкм ($1 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ см}$) имеем диапазон волновых чисел от $1 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ до $(1/3) \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, что дает $\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1} = (2/3) \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Типичная разрешающая способность системы с фотоумножите-

лем равна $\Delta(\lambda^{-1}) = \Delta(v/c) \approx 0,1 \text{ см}^{-1}$. Таким образом, для получения полного спектра излучения нам понадобится $(2/3) \cdot 10^9 \approx 60\,000$ независимых измерений. Так как каждое измерение может занимать одну ночь, все измерения могут длиться несколько сотен лет!

Конечно, имея 60 000 фотоумножителей, можно сразу промерить (за одну ночь) весь спектр, но так, очевидно, никто не делает. Если же на один фотоумножитель падают сразу все дифрагировавшие лучи, то напряжение на его выходе будет пропорционально общей интенсивности излучения, усредненной по всему спектру, и мы не сможем определить интенсивность, соответствующую той или иной длине.

Это можно сравнить со случаем, когда все телефонные разговоры между Нью-Йорком и Сан-Франциском передавались бы по одному каналу и не были бы разделены друг от друга. Задача разделения отдельных телефонных разговоров в одном канале была решена с помощью «маркировки» каждого разговора своей собственной «субнесущей» (см. задачу 6.32). Конечно, если бы существовал способ «маркировки» каждой отдельной инфракрасной волны с помощью какой-либо субнесущей частоты, позволяющий промаркировать все длины волн в излучении, то задача была бы решена. Все инфракрасное излучение можно было бы сфокусировать на одном фотоумножителе. К его выходному току можно было бы применить анализ Фурье для выделения отдельных субнесущих полос. Интенсивность каждой субнесущей частоты соответствовала бы интенсивности определенной длины волны инфракрасного излучения.

а) Придумайте способ маркировки субнесущей частоты каждой длины волны излучения, используя механический прерыватель, состоящий из вращающегося колеса с отверстиями или щелями, которые пропускают падающее излучение. Вашей основной задачей будет придумать, как сделать так, чтобы частота прерывания зависела от длины волны инфракрасного излучения.

В новом методе инфракрасной спектроскопии используется следующий красивый способ. Не применяется ни дифракционная решетка, ни механический прерыватель. Вместо этого используется интерферометр Майкельсона с одним подвижным зеркалом. (Этот тип интерферометра показан на прилагаемом рисунке.)

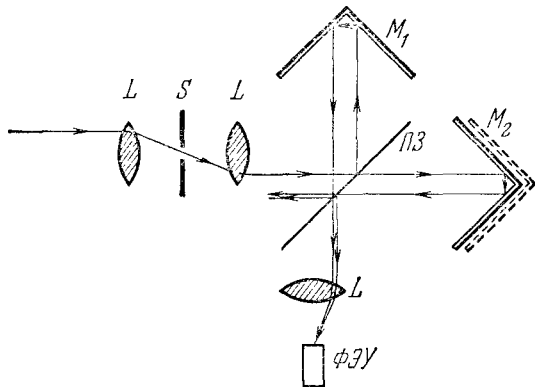


Рис. к задаче 6.33.

Свет от звезды падает (например) в направлении x на полупосеребренную стеклянную пластинку, наклоненную под углом 45° к падающему пучку и расщепляющую его на два пучка. Часть падающего пучка отражается от пластинки в направлении y , а часть проходит в направлении x . Зеркала отражают падающие на них пучки света, и отраженные пучки вновь попадают на полупрозрачную пластинку, причем пучок, распространяющийся в направлении $-y$, частично проходит и частично отражается в направлении $-x$; аналогично, пучок, распространяющийся в направлении $-x$, частично проходит и частично отражается в направлении $-y$. Фотоумножитель регистрирует лучи, идущие в направлении $-y$. (Лучи, отраженные и проходящие в направлении $-x$, не рассматриваются.) Для данной длины

волны λ ток фотоумножителя будет максимальным или минимальным в зависимости от относительной фазы двух пучков в направлении $-y$. Относительная фаза двух пучков будет зависеть от приобретенной в интерферометре разности хода.

б) Теперь предположим, что одно зеркало движется со скоростью v . Покажите, что если в интерферометр входит инфракрасный свет частоты ν , то на выходе фотоумножителя возникает ток с компонентой, меняющейся по гармоническому закону $\cos 2\nu\nu_{\text{мод}}t$ с частотой модуляции $\nu_{\text{мод}}=2(v/c)\nu$. Покажите также, что если положение зеркала меняется произвольным образом, а выходной ток фотоумножителя измеряется как функция координаты x , то выходной ток фотоумножителя включает компоненту, изменяющуюся пропорционально $\cos k_{\text{мод}}x$ с модуляционным волновым числом $k_{\text{мод}}=4\pi/\lambda$. Если в пучке много волн разной длины, то на выходе фотоумножителя будет суперпозиция, состоящая из постоянной составляющей (среднее по всему спектру) плюс компоненты Фурье для каждого модуляционного волнового числа $k_{\text{мод}}$. Таким образом, если мы произведем фурье-анализ (т. е. получим спектр) выходного тока фотоумножителя, то интенсивность, полученная для каждого $k_{\text{мод}}$, будет определять интенсивность соответствующей длины волны инфракрасного излучения. Важнейшей особенностью метода является одновременное измерение всего спектра инфракрасного излучения по зависимости выходного тока фотоумножителя от x . Каждая длина волны «маркируется» частотой модуляции (или волновым числом), которая появляется на выходе фотоумножителя. Таким образом, частота модуляции действует как «субнесущая», позволяя различать при помощи анализа Фурье выходного тока фотоумножителя одновременную запись многих длин волн.

С помощью описанного прибора можно, например, находясь на Земле, определить, «есть ли жизнь на Марсе».

Анализ инфракрасного излучения атмосферы Марса укажет на ее состав, после чего можно поставить вопрос о компонентах, ответственных за протекание жизненных процессов.

Описанный метод чрезвычайно чувствителен*), и телескопы, которые сейчас проектируются, смогут определять столь незначительные компоненты газа в атмосфере звезд как, например, одну часть на 10^9 .

*) Более подробное описание метода модуляционной спектроскопии можно найти в английском журнале «Science Journal» for April 1967: «Detecting Planetary Life from Earth», by J. Lovelock, D. Hitchcock, P. Fellgett, J. and P. Connes, L. Kaplan, J. Ring, p. 56. См. также книгу М. Кардона «Модуляционная спектроскопия», «Мир», 1972.