ГЛАВА 7

ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХ И ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

7.1. Введение

Волны, которые мы рассматривали до сих пор, были почти всегда одномерными. Это означает, что они распространялись вдоль прямой, которую мы обычно принимали за ось z. В п. 7.2 мы познакомимся с трехмерными волнами. Для этого будет достаточно совершить поворот координатной системы, используемой для описания плоской одномерной бегущей волны. Таким образом, мы получим трехмерное представление плоской гармонической бегущей волны.

Мы увидим, что введение дополнительных координат может означать нечто большее, чем простую замену переменных. Действительно, увеличение числа измерений означает увеличение числа степеней свободы. Например, в трехмерном вакууме электромагнитная волна может быть бегущей волной для одного направления, чисто стоячей для другого и экспоненциальной волной для третьего направления! В одномерном случае экспоненциальную электромагнитную волну в вакууме получить невозможно, так как дисперсионное соотношение $\omega^2=c^2k^2$ не может превратиться в соотношение $\omega^2=-c^2\varkappa^2$ для некоторого диапазона частот. Для получения экспоненциальной волны в одномерном случае нам необходимо наличие граничной частоты, т. е. дисперсионное соотношение должно иметь вид соотношения для ионосферы: $\omega^2=\omega_0^2+c^2k^2$, которое для достаточно низких частот может превратиться в соотношение $\omega^2=\omega_0^2-c^2\varkappa^2$.

Мы покажем, что в трехмерном случае k — это величина вектора, который называется вектором распространения. Таким образом, дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в вакууме имеет вид $\omega^2=c^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$. В некоторых случаях можно заменять компоненты k_x^2 и т. д. на $-k_x^2$ и т. д., но всегда следует сохранить положительное значение величины ω^2, имеющей смысл возвращающей силы на единицу смещения и на единицу массы. В качестве примера мы рассмотрим электромагнитные волны в волноводах и полное отражение света. В п. 7.3 мы рассмотрим волны в воде (для идеальной воды) и найдем их пространственную зависимость (поляризацию) и дисперсию. (В конце главы приведено несколько опытов, которые легко позволяют получить закон дисперсии волн в воде.) В п. 7.4 при помощи уравнений Максвелла будут объяснены явления, которые мы изучали в главе 4 при рассмотрении волн в передающей линии, образованной параллельными пластинами. В п. 7.5 мы рассмотрим излучение колеблющегося точечного заряда. Полученные результаты позволят решить вопрос о естественной ширине линий видимого света, испускаемого атомом, и объяснить синий цвет неба.

7.2. Гармонические плоские волны и вектор распространения

Рассмотрим *гармоническую плоскую бегущую волну*, распространяющуюся в однородной среде вдоль положительного направления оси z. Предположим, что в плоскости $z'=0$ волновая функция следующим образом зависит от времени:

$$\psi(0,\ t) = A\cos\omega t. \qquad (1)$$

Тогда в любой плоскости, заданной фиксированным значением z', волновая функция будет иметь вид

$$\psi(z',\ t) = A\cos(\omega t - kz'). \qquad (2)$$

Выразим эту функцию через обычные декартовы координаты x, y, z. Будем считать, что начало координат совпадает с плоскостью $z'=0$. Пусть вектор $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ определяет положение точки в пространстве относительно начала координат. Плоскость $z' = \text{const}$ в системе координат x, y, z определяется уравнением $z' = \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}}' = \text{const}$, где $\hat{\mathbf{z}}'$ — единичный вектор, задающий направление оси z'. Поэтому в уравнении (2) величина kz' может быть записана следующим образом:

$$kz' = k(\hat{\mathbf{z}}'\cdot\mathbf{r}) = (k\hat{\mathbf{z}}')\cdot\mathbf{r} \equiv \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}. \qquad (3)$$

Вектор распространения. Величина $k\hat{\mathbf{z}}'$ называется *вектором распространения* $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{z}}'. \qquad (4)$$

Величина вектора $\mathbf{k}$ равна k, а направление совпадает с направлением распространения волны. Уравнение (3) можно переписать так:

$$kz' = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \qquad (5)$$

С физической точки зрения волновое число k представляет собой число радиан фазы на единицу смещения вдоль направления распространения $\hat{\mathbf{z}}'$, так что kz' равно фазе, приобретенной на расстоянии z'. Величина k_x соответствует *числу радиан, отнесенному к единице смещения вдоль оси* $+x$, т. е. вдоль $\hat{\mathbf{x}}$; аналогичный смысл имеют k_y и k_z. Предположим, например, что $\hat{\mathbf{x}}$ составляет угол θ с $\hat{\mathbf{z}}'$ и что длина волны равна λ. Если продвинуться вдоль направления $\hat{\mathbf{z}}'$ на расстояние λ, то фаза возрастет на 2π. Если перемещение