

(поляризацию) и дисперсию. (В конце главы приведено несколько опытов, которые легко позволяют получить закон дисперсии волн в воде.) В п. 7.4 при помощи уравнений Максвелла будут объяснены явления, которые мы изучали в главе 4 при рассмотрении волн в передающей линии, образованной параллельными пластинами. В п. 7.5 мы рассмотрим излучение колеблющегося точечного заряда. Полученные результаты позволят решить вопрос о естественной ширине линий видимого света, испускаемого атомом, и объяснить синий цвет неба.

7.2. Гармонические плоские волны и вектор распространения

Рассмотрим *гармоническую плоскую бегущую волну*, распространяющуюся в однородной среде вдоль положительного направления оси z . Предположим, что в плоскости $z'=0$ волновая функция следующим образом зависит от времени:

$$\psi(0, t) = A \cos \omega t. \quad (1)$$

Тогда в любой плоскости, заданной фиксированным значением z' , волновая функция будет иметь вид

$$\psi(z', t) = A \cos(\omega t - kz'). \quad (2)$$

Выразим эту функцию через обычные декартовы координаты x, y, z . Будем считать, что начало координат совпадает с плоскостью $z'=0$. Пусть вектор $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ определяет положение точки в пространстве относительно начала координат. Плоскость $z' = \text{const}$ в системе координат x, y, z определяется уравнением $z' = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}}' = \text{const}$, где $\hat{\mathbf{z}}'$ — единичный вектор, задающий направление оси z' . Поэтому в уравнении (2) величина kz' может быть записана следующим образом:

$$kz' = k(\hat{\mathbf{z}}' \cdot \mathbf{r}) = (k\hat{\mathbf{z}}') \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \quad (3)$$

Вектор распространения. Величина $k\hat{\mathbf{z}}'$ называется *вектором распространения* \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{z}}'. \quad (4)$$

Величина вектора \mathbf{k} равна k , а направление совпадает с направлением распространения волны. Уравнение (3) можно переписать так:

$$kz' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (5)$$

С физической точки зрения волновое число k представляет собой число радиан фазы на единицу смещения вдоль направления распространения $\hat{\mathbf{z}}'$, так что kz' равно фазе, приобретенной на расстоянии z' . Величина k_x соответствует *числу радиан, отнесенному к единице смещения вдоль оси x* , т. е. вдоль $\hat{\mathbf{x}}$; аналогичный смысл имеют k_y и k_z . Предположим, например, что $\hat{\mathbf{x}}$ составляет угол θ с $\hat{\mathbf{z}}'$ и что длина волны равна λ . Если продвинуться вдоль направления $\hat{\mathbf{z}}'$ на расстояние λ , то фаза возрастет на 2π . Если перемещение

происходит вдоль \hat{x} , то, чтобы z' увеличилось на одну длину волны, мы должны пройти расстояние $\lambda/\cos \theta$. На направлении вдоль \hat{x} фаза увеличилась на 2π на участке, большем чем λ в $(\cos \theta)^{-1}$ раз, т. е. можно сказать, что увеличение фазы, приходящееся на единицу длины вдоль \hat{x} , меньше чем k в $\cos \theta$ раз. Таким образом, проекция вектора \mathbf{k} на направление \hat{x} (т. е. $k_x = \mathbf{k} \cdot \hat{x}$) всегда будет меньше длины вектора в отношении, определяемом косинусом соответствующего угла.

Почему нет вектора длины волны? Выясним это на примере. Приведем кажущееся правдоподобным (однако неверное) рассуждение. Фазовая скорость бегущей волны равна $v_\phi = \lambda v$. Мы хотим описать волну, распространяющуюся в трехмерном пространстве в направлении \hat{z}' . Вектор длины волны можно было бы определить так:

$$\mathbf{v}_\phi = \lambda v \hat{z}' = (\lambda \hat{z}') v = \lambda v.$$

Длина волны λ определяется как расстояние между двумя соседними гребнями вдоль z' . Эта величина будет определять модуль «вектора» λ . Аналогично λ_x соответствует расстоянию между соседними гребнями волны смещения вдоль x . Однако у вектора λ есть следующее «ужасное» свойство: λ_x больше, чем λ . Так, если \hat{x} перпендикулярно \hat{z}' , то величина λ_x бесконечно велика, в то время как в случае обычного вектора составляющая по x должна равняться нулю. Итак, мы можем сказать, что λ не может быть вектором, ибо составляющие вектора не могут быть больше его величины.

Плоскость постоянной фазы. Бегущая волна, заданная уравнением (2), может быть записана в следующих эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= A \cos(\omega t - kz') = \\ &= A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = \\ &= A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6)$$

Аргумент синусоидальной волновой функции называется *фазой* $\varphi(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \omega t - kz' = \\ &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \\ &= \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

В фиксированный момент времени t точки пространства, имеющие одинаковые значения φ , образуют плоскость равной фазы, называемую *волновым фронтом*:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}, \\ d\varphi &= 0 - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \text{ в данный момент,} \\ d\varphi &= 0, \text{ только если } d\mathbf{r} \text{ перпендикулярно } \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В заданный момент времени значение фазы будет постоянно во всех точках, образованных смещением на вектор $d\mathbf{r}$, перпендикулярный

направлению распространения \mathbf{k} . Для всех этих точек $d\varphi=0$, и их геометрическое место образует плоскость. Поэтому такие волны называются *плоскими*.

Фазовая скорость. Фазовая скорость равна dz'/dt при фиксированном φ :

$$d\varphi = \omega dt - k dz' = 0, \\ r_{\varphi} = \frac{dz'}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (9)$$

Дисперсионные соотношения для трехмерного случая. Ниже приведены знакомые вам дисперсионные соотношения, переписанные для трех измерений.

Пример 1. Электромагнитные волны в вакууме:

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (10)$$

Пример 2. Электромагнитные волны в диспергирующей среде:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2 = \frac{c^2}{n^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (11)$$

Пример 3. Электромагнитные волны в ионосфере:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 = \omega_p^2 + c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (12)$$

Дисперсионные соотношения не зависят от граничных условий. Однако граничные условия определяют тип волн, с которыми нам приходится иметь дело: это могут быть стоячие волны, бегущие волны или (как мы увидим) волны смешанного типа.

Стоячие волны. Суперпозиция двух бегущих плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях и имеющих одинаковую амплитуду (и частоту), дает стоячую волну

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha). \quad (13)$$

Вспомнив, что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, и воспользовавшись тригонометрическими тождествами, мы можем записать выражение (13) в виде

$$\psi(x, y, z, t) = \\ = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(k_x x + \alpha_1) \cos(k_y y + \alpha_2) \cos(k_z z + \alpha_3). \quad (14)$$

Когда мы выражаем гармоническую волну через стоячие волны (14), то для k_x , k_y и k_z можно взять положительные значения. Действительно, в стоячей волне колебания не распространяются в одном направлении (как это имеет место в бегущей волне), а «распространяются в двух направлениях сразу». Очевидно, что функция $\psi(x, y, z, t)$ не изменится, если, например, заменить k_x на $-k_x$ и α_1 , на $-\alpha_1$. Таким образом, мы можем оставить все три значения k_x , k_y , k_z положительными и (в случае необходимости) изменить соответствующим образом константы α_1 , α_2 и α_3 .

Смесь бегущей и стоячей волн. В одномерном пространстве суперпозиция двух стоячих волн может дать бегущую волну. Аналогично, стоячую волну можно представить в виде суперпозиции

двух бегущих волн. Возможна суперпозиция более общего характера, которая не образует ни чисто бегущей, ни чисто стоячей волны. Все это справедливо и для трехмерного пространства. Здесь, однако, возникает дополнительная свобода, связанная с тем, что три координаты «независимы». Так, например, возможна волна, которая по оси x имеет постоянную составляющую, по оси y представляет собой стоячую волну, а по оси z — бегущую:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(y, z, t) = A \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t). \quad (15)$$

Позже мы встретимся с различными примерами таких смешанных волн.

Трехмерные волновые уравнения и классическое волновое уравнение. Любая трехмерная синусоидальная гармоническая волна независимо от того, является ли она стоячей, бегущей или волной смешанного типа, удовлетворяет следующим уравнениям (вы легко можете это доказать):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 \psi(x, y, z, t), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -k_x^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Приведем примеры волновых уравнений, соответствующих дисперсионным соотношениям (10), (11) и (12).

Пример 1. *Электромагнитные волны в вакууме.* Используя уравнения (16) и (10), мы находим, что волновая функция для отдельной гармонической составляющей с частотой ω и волновым числом k удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\}. \quad (17)$$

Так как c не зависит от частоты, то волновое уравнение (17) справедливо для каждой гармонической составляющей, а также для произвольной суперпозиции стоячих и бегущих электромагнитных волн в вакууме. Уравнение (17) представляет собой трехмерное *классическое волновое уравнение для недиспергирующих волн*. Аналогичное уравнение справедливо для любой другой трехмерной недиспергирующей волны, например звуковой волны в воздухе. Правая часть уравнения (17) представляет собой произведение c^2 на $\text{div grad } \psi$, что иначе можно записать в виде $\nabla \cdot \nabla \psi$ или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi. \quad (18)$$

Пример 2. *Электромагнитные волны в однородной диспергирующей среде.* Если принять во внимание дисперсионное соотношение (11), то волновое уравнение для гармонической волны частоты ω будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2(\omega)} \nabla^2 \psi. \quad (19)$$

В этом уравнении n зависит от частоты, и можно, например, разложить решение в ряд или интеграл Фурье и воспользоваться дисперсионным соотношением для каждой данной частоты. Классическое волновое уравнение (18) отличается от (19) тем, что его можно использовать для импульсов или других негармонических волн, не прибегая к фурье-анализу.

Пример 3. Электромагнитные волны в ионосфере. Используя дисперсионное соотношение (12) и уравнения (16), мы получаем трехмерное уравнение Клейна — Гордона:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \nabla^2 \psi. \quad (20)$$

Приведем несколько примеров двумерных синусоидальных гармонических волн.

Пример 1. Электромагнитные волны в прямоугольном волноводе. Чтобы получить прямоугольный волновод, достаточно добавить к передающей линии из плоскопараллельных проводящих пластин две проводящие боковые пластины, как это показано на рис. 7.1. Внутри волновода — вакуум. Мы рассмотрим лишь те

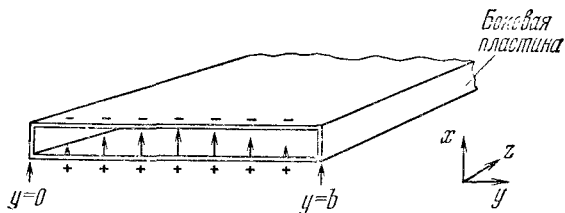


Рис. 7.1. Прямоугольный волновод. Получен из передающей линии с параллельными пластинами добавлением проводящих боковых пластин в $y=0$ и $y=b$.

Стрелками показано мгновенное электрическое поле на входе волновода.

волновые моды, для которых магнитное и электрическое поля не зависят от x (для фиксированного y и z и для любого x внутри волновода).

Волновое уравнение для этого случая будет двумерным вариантом уравнения (17). Пусть ψ соответствует электрическому полю E_x , мы имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (21)$$

Для определенной частоты ω имеем

$$-\omega^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (22)$$

Наличие проводящих боковых пластин означает, что E_x равно нулю в плоскостях $y=0$ и $y=b$. Поэтому функция $\psi(y, z, t)$ должна быть стоячей волной относительно оси y с постоянными узлами в точках $y=0$ и $y=b$. Таким образом, электромагнитные волны распространяются по волноводу в направлении $+z$ и относительно оси z мы имеем бегущие волны.

Мы видим, что уравнению (22) удовлетворяет смешанная волна, которая является стоячей по оси y и бегущей по оси z волной:

$$\psi(y, z, t) = A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t). \quad (23)$$

Для этой волны справедливо дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + c^2 k_z^2. \quad (24)$$

Множитель $\sin k_y y$ в (23) удовлетворяет условию $E_x = 0$ в $y = 0$. Однако нам нужно, чтобы $\sin k_y y = 0$ и при $y = b$, т. е. чтобы

$$k_y b = \pi, 2\pi, \dots, m\pi, \dots \quad (25)$$

Такие волны называются ТЕ-модами (поперечные моды электрического поля). Поскольку магнитное поле однозначно связано с электрическим, то рассматривать его отдельно нет необходимости.

Граничная частота со стороны низких частот. Рассмотрим наименьшую моду. Мы получим ее, если в уравнении (25) положим $m = 1$. Электрическое поле для этой моды показано на рис. 7.1. Подставляя уравнение (25) в уравнение (24), для $m = 1$ имеем

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{b^2} + c^2 k_z^2. \quad (26)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение между ω и k_z (для моды, у которой $k_y b = \pi$) по внешнему виду аналогично дисперсионному соотношению для плоских волн, распространяющихся в направлении z в ионосфере:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (27)$$

или дисперсионному соотношению для связанных маятников (в длинноволновом пределе):

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K a^2}{M} k^2. \quad (28)$$

Поэтому следует ожидать, что величина $c^2 \pi^2 / b^2$ определяет нижнюю граничную частоту (точнее, квадрат этой частоты) и для вынуждающей частоты ω , меньшей этой граничной частоты, дисперсионное соотношение (26) примет вид

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{b^2} - c^2 \kappa_z^2. \quad (29)$$

Это предположение справедливо. Для частоты $\omega < \pi c / b$ волновое уравнение (21) имеет решение

$$\psi(y, z, t) = A \sin k_y y \cos \omega t \cdot e^{-\kappa_z z} \quad (30)$$

при условии, что ω , k_y и κ_z связаны уравнением

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 - c^2 \kappa_z^2, \quad (31)$$

что равенства (25) удовлетворяются и что ω^2 меньше $c^2 \pi^2 / b^2$ (для $m = 1$), так что равенство (29) удовлетворяется при положительном κ_z^2 . [Заметим, что в уравнение (30) мы могли бы включить член, пропорциональный $\exp(+\kappa_z z)$. Однако граничное условие,

закрывающееся в том, что волновод простирается до $z = +\infty$, обращает в нуль коэффициенты при этом члене.]

Физическая природа граничной частоты для волновода. Предположим, что частота фиксирована, а ширина b волновода меняется. Если b бесконечно велико, то уравнение (26) переходит в дисперсионное соотношение для плоских электромагнитных волн в вакууме, распространяющихся в направлении $+z$. Волнам «кажется», что они распространяются в передающей линии из плоскопараллельных пластин. Для конечного b величина k_y (которая равна π/b) не равна нулю. Таким образом, если рассматривать волновую функцию как суперпозицию плоских бегущих волн (мы это всегда можем сделать, даже если имеем чисто стоячую волну), то мы видим, что уменьшение b от бесконечности до некоторого конечного значения изменяет волну от чисто бегущей волны, распространяющейся вдоль $+z$, до суперпозиции с ненулевой компонентой вектора распространения k_y вдоль \hat{y} . В действительности мы должны иметь две бегущие волны, распространяющиеся в направлениях $+y$ и $-y$, суперпозиция которых дает стоячую волну вдоль \hat{y} . Величина k всегда определяется дисперсионным соотношением для вакуума:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + k_y^2. \quad (32)$$

Поэтому, если y -я компонента k увеличилась от нуля до какого-то конечного значения, то это должно привести к уменьшению z -й компоненты вектора k . При дальнейшем уменьшении b компонента по y будет возрастать, а по z уменьшаться дальше. Для любого фиксированного b волновая функция может быть представлена суперпозицией плоских волн, бегущих «крест-накрест» вдоль волновода и накладывающихся друг на друга так, чтобы удовлетворить граничному условию на боковых пластинах. (Мы можем сказать, что токи, генерированные в боковой пластине приходящей волной, создают зеркально отраженную волну, бегущую в обратном направлении оси y .) При b , достаточно малом, z -я компонента k станет равной нулю и волны не будут распространяться вдоль волновода, а будут лишь отражаться туда и обратно между боковыми пластинами. Периодом $T_{\text{гр}}$ (соответствующую граничной частоте) будет время, необходимое плоской волне в вакууме, чтобы пройти расстояние от одной боковой полосы до другой и обратно:

$$T_{\text{гр}} = \frac{2b}{c}.$$

Тогда

$$\omega_{\text{гр}} = 2\pi\nu_{\text{гр}} = \frac{2\pi}{T_{\text{гр}}} = \frac{2\pi}{2b/c} = \frac{c\pi}{b}. \quad (33)$$

Сравнивая уравнения (33) и (26), мы видим, что уравнение (33) действительно определяет граничную частоту.

Для частот, меньших граничной частоты, амплитуда волны с возрастанием z экспоненциально уменьшается, несмотря на то что мы имеем дело с вакуумом. Физический смысл уменьшения элект-

рического поля состоит в следующем. Благодаря наличию проводящих боковых пластин заряды на верхней и нижней пластинах могут стекать, нейтрализуя друг друга. В области $z=0$ внешний источник все время «доставляет» новые заряды, поддерживая электрическое поле постоянным. С ростом z влияние вынуждающей силы уменьшается, и при очень малой частоте заряды успевают нейтрализоваться.

Бегущие «крест-накрест» волны. Смешанная стоячая и бегущая волна, выражаемая уравнением (23), эквивалентна суперпозиции пересекающихся плоских волн, бегущих вдоль волновода. Это можно показать (см. задачу 7.1) с помощью равенства

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin k_y y \cos (k_z z - \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} A \sin (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \frac{1}{2} A \sin (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\mathbf{k}_1 = \hat{z}k_z + \hat{y}k_y, \quad \mathbf{k}_2 = \hat{z}k_z - \hat{y}k_y.$$

Пересечение бегущих волн объясняется тем, что y -компоненты \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 имеют противоположные знаки.

Фазовая скорость, групповая скорость и с. Картина пересекающихся бегущих волн весьма наглядна, и с ее помощью легко найти соотношения между фазовой и групповой скоростями. Обратимся лишь к одной из двух бегущих волн из уравнения (34), как это показано на рис. 7.2. Рассмотрим небольшой участок волнового фронта, распространяющегося по диагонали через волновод на расстояние ct за время t . На рис. 7.2 этот волновой фронт

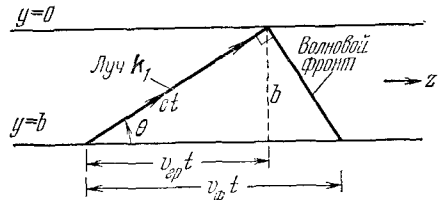


Рис. 7.2. Одна из бегущих волн в волноводе.

перпендикулярен направлению, обозначенному «луч \mathbf{k}_1 ». Нас интересуют фазовая и групповая скорости в направлении z . (Мы знаем, что только в этом направлении существует бегущая волна. Составляющая \mathbf{k}_2 приведет к уничтожению бегущей волны вдоль y , но внесет тот же вклад, что и \mathbf{k}_1 , в направление z .) В то время как луч пробегает расстояние ct , пересечение волнового фронта с любым фиксированным значением y (например, $y=b$) переносится на расстояние, обозначенное $v_\phi t$. Это дает нам фазовую скорость вдоль z , которая равна скорости, с которой распространяется вдоль z гребень волны. Заметим, что, когда θ (см. рис. 7.2) становится равным 90° , фазовая скорость устремляется к бесконечности. Имеем

$$v_\phi = \frac{c}{\cos \theta}. \quad (35)$$

Групповая скорость определяет скорость переноса энергии в направлении z . Если мы «нанесем метку» на волну, то она будет

распространяться с групповой скоростью. Луч, обозначенный \mathbf{k}_1 , будет переносить импульс со скоростью c по диагонали волновода. Волна с вектором \mathbf{k}_2 дает импульс, y -я часть которого уничтожится с y -й частью волны с вектором \mathbf{k}_1 . «Метки» волн \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 пройдут за время t расстояние, показанное на рис. 7.2. Таким образом, мы имеем

$$v_{\text{гр}} = c \cos \theta. \quad (36)$$

Мы могли бы показать, используя дисперсионное соотношение, что выражения для $v_{\text{ф}}$ и $v_{\text{гр}}$, определяемые формулами (35) и (36), справедливы. Вместо этого решим обратную задачу, т. е. выведем дисперсионное соотношение из равенств (35) и (36):

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos \theta},$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_z} = c \cos \theta.$$

Перемножив $v_{\text{ф}}$ и $v_{\text{гр}}$, получим

$$v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = \frac{\omega}{k_z} \frac{d\omega}{dk_z} = c^2, \quad (37)$$

или

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k_z^2)} = c^2, \quad \text{т. е.} \quad d(\omega^2) = c^2 d(k_z^2).$$

Интегрирование дает

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \text{const.} \quad (38)$$

Константу можно определить, положив $k_z = 0$ (при этом $\omega = \omega_{\text{ср}}$) и потребовав, чтобы время пробега волной расстояния «туда и обратно» (от одной боковой полосы до другой и обратно) $T_{\text{ср}}$ равнялось $2b/c$. Таким образом, мы получим дисперсионное соотношение (26). Более высокие моды ($m = 2, 3, \dots$) мы получим, полагая граничную частоту гармоникой самой низкой граничной частоты ($m = 1$):

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \frac{c^2 \pi^2 m^2}{b^2}. \quad (39)$$

Пример 2. Отражение и прохождение света, падающего из стекла в воздух. Это еще один пример двумерной волны. Предположим, что пространство от $z = -\infty$ до $z = 0$ заполнено стеклом. При $z = 0$ стекло кончается, и начинается вакуум (или воздух), который простирается до $z = +\infty$. Можно было бы думать, что вакуум всегда будет вести себя как не реактивная, т. е. дисперсионная, среда. Однако в примере 1 (прямоугольный волновод) было показано, что, когда у нас нет плоских волн (E_x изменялось вдоль оси y и вдоль оси распространения z), волновод при некоторых условиях становится реактивным (либо он слишком узок, либо, что то же самое, частота слишком мала) даже в вакууме. Нечто подобное может происходить при падении света из стекла в воздух, если угол падения становится слишком большим. Это имеет большое практическое значение в оптическом приборостроении, где явление полного внут-

ренного отражения позволяет получить 100%-ное отражение света. Соответствующий пример показан на рис. 7.3.

Рассмотрим подробно, в чем заключается это явление. Волны света удовлетворяют волновому уравнению как в стекле, так и в вакууме (рассматриваем одну частоту ω). Граница между стеклом и вакуумом находится в плоскости $z=0$. Вектор распространения \mathbf{k}_1 падающей волны имеет компоненты k_z вдоль \hat{z} и k_y вдоль \hat{y} . Таким образом, мы имеем двухмерную задачу (примерно ту же, что и для волновода). Геометрические условия показаны на рис. 7.4. В стекле

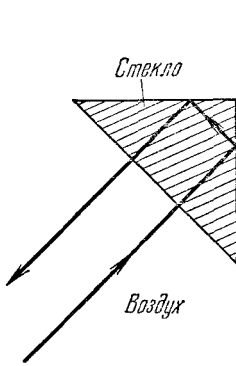


Рис. 7.3. Призма обратного хода, используемая для отклонения светового пучка на 180° без потери интенсивности.

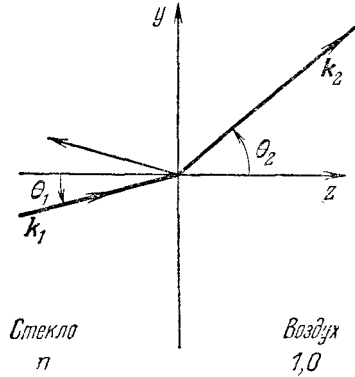


Рис. 7.4. Отражение и прохождение лучей, падающих из стекла в воздух.

величина k_z вектора \mathbf{k}_1 равна произведению показателя преломления n на отношение ω/c , а величина k_y вектора \mathbf{k}_2 равна отношению ω/c :

$$k_z = n \frac{\omega}{c}, \quad k_y = \frac{\omega}{c}. \quad (40)$$

Дисперсионное соотношение для среды 2 (вакуум) имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2. \quad (41)$$

Покажем, что k_{2y} должно равняться k_{1y} . Мы знаем, что k_{1y} равно произведению 2π на число гребней волны, приходящееся на единицу длины вдоль оси y в среде 1. То же справедливо и для k_{2y} , только в среде 2. Будем двигаться вдоль оси y в плоскости $z=0$. Число гребней, мимо которых мы пройдем, в стекле и в вакууме должно быть одинаковым. Таким образом, имеем

$$k_{2y} = k_{1y} = k_1 \sin \theta_1 = n \frac{\omega}{c} \sin \theta_1. \quad (42)$$

Подставляя уравнение (42) в (41), получим

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 + k_{2z}^2, \quad (43)$$

т. е. имеем дисперсионное соотношение

$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_1). \quad (44)$$

Критический угол полного внутреннего отражения. При увеличении угла падения θ_1 z -я компонента вектора \mathbf{k}_2 будет уменьшаться. В конце концов мы достигнем угла падения, при котором k_{2z} равно нулю (предполагаем, что n больше единицы, что имеет место, например, для видимого света в стекле или воде). Такой угол называется *критическим углом падения*. В соответствии с уравнением (44) критический угол падения определяется из условия

$$n \sin \theta_{\text{кр}} = 1. \quad (45)$$

(Для стекла с показателем преломления $n = 1,52$ получим $\theta_{\text{кр}} = 41,2^\circ$.) При критическом угле падения преломившийся пучок света касателен поверхности стекла.

Закон Снеллиуса. Для углов θ между нулем и $\theta_{\text{кр}}$ пучок света частично отражается и частично преломляется и проходит в вакуум. В этом случае существует угол θ_2 (рис. 7.4) и соотношение $k_{2y} = k_{1y}$ эквивалентно *закону Снеллиуса* (в п. 4.3 мы ввели его другим способом):

$$k_{2y} = k_2 \sin \theta_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_2,$$

$$k_{1y} = k_1 \sin \theta_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_1.$$

Положив $k_{2y} = k_{1y}$, получим

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (46)$$

Полное внутреннее отражение. Для углов падения, больших критических, дисперсионное соотношение получается заменой в уравнении (44) k_{2z}^2 на $-k_{2z}^2 = -\kappa^2$:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [n^2 \sin^2 \theta_1 - 1], \quad (47)$$

где

$$n \sin \theta_1 > 1.$$

В этом случае волновая функция (электрическое или магнитное поле) в среде 2 является бегущей волной в направлении y , но экспоненциальной в направлении z :

$$\psi(y, z, t) = A \cos(\omega t - k_y y) e^{-\kappa z}, \quad (48)$$

где κ определяется уравнением (47), а k_y равно $k_1 \sin \theta = n(\omega/c) = \sin \theta_1$. Средняя во времени плотность энергии пропорциональна среднему во времени квадрату $\psi(y, z, t)$:

$$\text{Плотность энергии} \propto e^{-2\kappa z}. \quad (49)$$

В качестве приложения уравнения (47) рассмотрим призму (см. рис. 7.3), меняющую направление пучка на обратное. На боковых гранях призмы свет падает на границу стекло — воздух под углом $\theta_1 = 45^\circ$. Этот угол превышает критический угол $\theta_{кр} = 41,2^\circ$ (для стекла $n = 1,52$). Поэтому луч света полностью отразится. Для поля, проникающего в вакуум (оно уменьшается по экспоненте), найдем

$$\delta = \kappa^{-1} = \frac{c}{\omega} [n^2 \sin^2 \theta_1 - 1]^{-1/2} = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{(1,52)^2}{2} - 1 \right]^{-1/2} = 0,4\lambda,$$

т. е. на расстоянии нескольких длин волн поле в вакууме станет пренебрежимо малым.

Наглядную демонстрацию полного внутреннего отражения можно получить, плавая с маской под водой. Если вы будете смотреть из воды вперед на границу вода — воздух, то увидите, что она блестит, как жидкая ртуть. Это происходит потому, что угол, под которым вы смотрите, превышает критический.

Проникновение света через барьер. Если вакуум не простирается до бесконечности, а ограничен второй пластиной из стекла, то в уравнение (48) нужно добавить второй член с положительной экспонентой $\exp(+\kappa z)$. Таким образом, мы имеем здесь дело с типичной задачей проникновения через барьер.

Красивый и остроумный опыт, доказывающий экспоненциальное уменьшение плотности энергии, был выполнен студентом-дипломником Куном из Принстона *). Хотя этот опыт относится к области квантовой механики, он подтверждает результаты классической оптики. Это один из многих результатов классической оптики, которые сохраняются и в квантовой механике. Кун установил две призмы с воздушным зазором между ними так, что свет (зеленая линия ртути) падал через одну призму на границу стекло — воздух под углом, большим критического. Энергия света, переносимая через воздушный зазор ко второй призме, пропорциональна плотности энергии на поверхности второй призмы. Из квантовой механики мы знаем, что свет частоты ω переносится неделимыми частицами-фотонами и энергия каждого фотона равна $\hbar\omega$. Таким образом, для данной частоты ω энергия пропорциональна числу фотонов. Кун измерил плотность энергии, подсчитывая число испущенных фотонов в зависимости от толщины воздушного зазора, и подтвердил предсказанную экспоненциальную зависимость (49).

Качественная демонстрация проникновения через барьер и быстрого уменьшения поля в световой волне с удалением от стекла в вакуум легко осуществима с помощью стеклянной призмы или куба. Рассмотрим некоторую точку поверхности (через стекло) под углом, дающим полное отражение для линии вашего взгляда. Поднесите палец и расположите его над точкой на некотором расстоянии. Палец будет невидим, так как лежит в запрещенной области.

*) D. D. Coon, Am. J. Phys. 34, 240 (1966).

Теперь прикоснитесь пальцем к поверхности. Вы увидите отпечаток пальца. Выпуклости кожи на пальце, соприкасаясь с полностью отражающей поверхностью стекла, нарушают полное отражение. Впадины кожи не касаются стекла и не нарушают полного отражения. Это выглядит, как серебряные завитки, разделяющие гребни. Глубина этих впадин имеет порядок нескольких длин волн, т. е. порядок глубины проникновения $\delta = \lambda^{-1}$. Если глубина впадин меньше δ , поле будет в заметной степени проникать через «барьер» между стеклом и кожей, и полное внутреннее отражение будет нарушено. Этот опыт можно выполнить с прозрачным, наполненным водой прямоугольным сосудом вместо куба или призмы.

7.3. Волны в воде

Водяные волны наблюдать нетрудно. В детстве мы следили за ними в ванне, в пруду, озере или море, наслаждаясь их красотой и сложностью. Теперь мы сможем получить интеллектуальное наслаждение, поняв их природу. Это понимание требует упрощений. Поэтому пренебрежем некоторыми свойствами реальной воды. Например, пренебрежем вязкостью, которая является результатом внутреннего трения. (Профессор Ричард Фейнман дал такой идеализированной воде название «сухой» воды.) Ограничимся также рассмотрением волн с небольшой амплитудой.

Будем изучать геометрическую структуру и дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для волн в воде в рамках рассмотренных упрощений. Все результаты, которые мы получим, можно проверить на опытах в аквариуме или в другом подходящем сосуде. (См. домашний опыт 7.11.)

Прямые волны. Рассмотрим волны в воде, имеющие определенную длину. Пусть гребни и впадины этих волн образуют параллельные прямые. Такие волны называются *прямыми*. Они представляют собой двухмерный аналог трехмерных плоских волн.

Предположим, что у нас есть бесконечный водоем постоянной глубины h . Когда нет волны, поверхность воды плоская. Пусть для этой плоскости $y = 0$ и ось y направлена вверх, а волна распространяется горизонтально вдоль оси x , так что гребни и впадины расположены вдоль линий, перпендикулярных \hat{x} .

Обозначим через x и y *равновесные координаты* данной частицы воды. Величина x может быть любой в пределах от $x = -\infty$ до $+\infty$, а y лежит в пределах от $y = -h$ (дно озера) до $y = 0$ (поверхность).

В волне частица совершает движение, которое является комбинацией движения вверх — вниз (вдоль y) и движения вперед — назад (вдоль x). Вектор смещения в прямой волне имеет только x - и y -компоненты:

$$\psi(x, y, t) = \hat{x}\psi_x(x, y, t) + \hat{y}\psi_y(x, y, t). \quad (50)$$