Теперь прикоснитесь пальцем к поверхности. Вы увидите отпечаток пальца. Выпуклости кожи на пальце, соприкасаясь с полностью отражающей поверхностью стекла, нарушают полное отражение. Впадины кожи не касаются стекла и не нарушают полного отражения. Это выглядит, как серебряные завитки, разделяющие гребни. Глубина этих впадин имеет порядок нескольких длин волн, т. е. порядок глубины проникновения $\delta=\varkappa^{-1}$. Если глубина впадин меньше δ, поле будет в заметной степени проникать через «барьер» между стеклом и кожей, и полное внутреннее отражение будет нарушено. Этот опыт можно выполнить с прозрачным, наполненным водой прямоугольным сосудом вместо куба или призмы.

7.3. Волны в воде

Водяные волны наблюдать нетрудно. В детстве мы следили за ними в ванне, в пруду, озере или море, наслаждаясь их красотой и сложностью. Теперь мы сможем получить интеллектуальное наслаждение, поняв их природу. Это понимание требует упрощений. Поэтому пренебрежем некоторыми свойствами реальной воды. Например, пренебрежем вязкостью, которая является результатом внутреннего трения. (Профессор Ричард Фейнман дал такой идеализированной воде название «сухой» воды.) Ограничимся также рассмотрением волн с небольшой амплитудой.

Будем изучать геометрическую структуру и дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для волн в воде в рамках рассмотренных упрощений. Все результаты, которые мы получим, можно проверить на опытах в аквариуме или в другом подходящем сосуде. (См. домашний опыт 7.11.)

Прямые волны. Рассмотрим волны в воде, имеющие определенную длину. Пусть гребни и впадины этих волн образуют параллельные прямые. Такие волны называются *прямыми*. Они представляют собой двухмерный аналог трехмерных плоских волн.

Предположим, что у нас есть бесконечный водоем постоянной глубины h. Когда нет волны, поверхность воды плоская. Пусть для этой плоскости $y=0$ и ось y направлена вверх, а волна распространяется горизонтально вдоль оси x, так что гребни и впадины расположены вдоль линий, перпендикулярных $\hat{\mathbf{x}}$.

Обозначим через x и y *равновесные координаты* данной частицы воды. Величина x может быть любой в пределах от $x=-\infty$ до $+\infty$, а y лежит в пределах от $y=-h$ (дно озера) до $y=0$ (поверхность).

В волне частица совершает движение, которое является комбинацией движения вверх — вниз (вдоль y) и движения вперед — назад (вдоль x). Вектор смещения в прямой волне имеет только x- и y-компоненты:

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, t)=\hat{\mathbf{x}}\psi_x(x, y, t)+\hat{\mathbf{y}}\psi_y(x, y, t). \tag{50}$$

Мгновенная скорость частицы воды с равновесными координатами x, y равна частной производной ψ по t:

$$\mathbf{v}(x, y, t)=\frac{\partial\psi(x, y, t)}{\partial t}=\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\psi_x}{\partial t}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\psi_y}{\partial t}. \tag{51}$$

Свойства идеальной воды. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства идеальной воды.

1. *Сохранение массы.* При изучении электрического тока (том II, п. 4.2) было показано, что *сохранение электрического заряда* выражается *уравнением непрерывности*

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{52}$$

из которого следует, что изменение заряда в бесконечно малом объеме связано с током через поверхность, ограничивающую этот объем. В нашем случае следует заменить плотность заряда ρ на плотность воды. Тогда уравнение (52) выражает закон сохранения массы. Далее, с хорошей степенью точности воду можно считать *несжимаемой.* Тогда плотность ρ постоянна и не зависит ни от времени, ни от координат. Поэтому правая часть уравнения (52) равна нулю. Воспользовавшись выражением (51) для скорости $\mathbf{v}$, мы получаем

$$0=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=\rho\nabla\cdot\mathbf{v}$$

или

$$0=\nabla\cdot\mathbf{v}=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\psi),$$

т. е.

$$\nabla\cdot\psi=\text{const}. \tag{53}$$

2. *Отсутствие пузырьков.* Константа в уравнении (53) должна быть равна нулю. В противном случае, в соответствии с теоремой Гаусса, интеграл от ψ по поверхности маленькой сферы не будет равен нулю, что может означать только наличие пузырьков. Но мы предположим, что пузырьков нет. Таким образом, мы нашли, что «сохраняющаяся» и несжимаемая вода, в которой нет пузырьков, удовлетворяет уравнению

$$\nabla\cdot\psi=\frac{\partial\psi_x(x, y, t)}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y(x, y, t)}{\partial y}=0. \tag{54}$$

3. *Отсутствие водоворотов.* Линейный интеграл от скорости по окружности воронки водоворота не равен нулю. В бесконечно малом масштабе наличие маленьких завихрений приведет к тому (закон Стокса), что ротор от вектора $\mathbf{v}$ не будет равен нулю. (Чтобы вспомнить понятие ротора вектора, см. т. II, пп. 2.15—2.18.) Мы предполагаем, что завихрений нет, т. е.

$$0=\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\psi)$$

и

$$\nabla \times \boldsymbol{\psi} = \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_y - \frac{\partial}{\partial y}\psi_x\right) = \text{const}. \qquad (55)$$

Стоячие волны в воде. Мы хотим найти форму водяных волн без алгебраических выкладок, с помощью интуиции. Рассмотрим, например, прямоугольный аквариум или другой сосуд в этом роде. Наполним его на 15—20 *см* водой и потрясем осторожно вдоль x, стараясь вызвать синусоидальные моды. Мы обнаружим, что самая низкая мода выглядит, как показано на рис. 7.5.

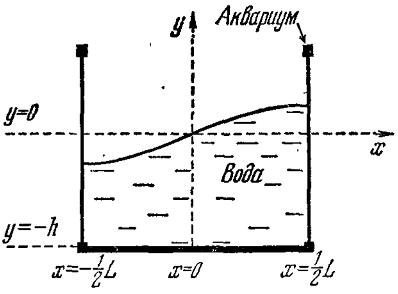

Рис. 7.5. Низшая синусоидальная мода в прямоугольном аквариуме.

Кинув в воду несколько кофейных зерен, можно наблюдать за движением воды. Нетрудно заметить, что все кофейные зерна покоятся в один и тот же момент времени и что смещения x и y равны нулю в одно и то же время. Этого и следует ожидать для нормальной моды, т. е. для стоячей волны. Все степени свободы (движущиеся элементы) колеблются в фазе. Поэтому мы можем предположить, что для достаточно малых колебаний временная зависимость ψ_x и ψ_y определяется гармоническим колебанием с одинаковой фазовой константой, т. е. членом $\cos \omega t$.

Далее предположим, что зависимость вертикального смещения ψ_y от x соответствует синусоидальной стоячей волне. Если мода выглядит, как показано на рис. 7.5, то ψ_y имеет узел в $x=0$. Поэтому ψ_y содержит член $\sin kx$. Таким образом, можем записать

$$\psi_y(x, y, t) = \cos \omega t \sin kx\, f(y), \qquad (56)$$

где $f(y)$ пока неизвестная функция от y.

Граничные условия на стенках. Как ψ_x зависит от x? На краях аквариума частицы воды могут смещаться только вниз или вверх. Поэтому те места, где ψ_y имеет максимум (стенка), соответствуют узлам ψ_x. Таким образом, мы должны иметь $\cos kx$ для ψ_x, тогда как для ψ_y мы имеем $\sin kx$:

$$\psi_x(x, y, t) = \cos \omega t \cos kx\, g(y), \qquad (57)$$

где $g(y)$ пока неизвестная функция от y.

Связь между горизонтальным и вертикальным движением. Теперь воспользуемся тем, что div и rot вектора смещения $\boldsymbol{\psi}$ равны нулю. Легко показать, что из уравнений (56) и (57) следует:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0: \qquad -kg(y) + \frac{df(y)}{dy} = 0; \qquad (58)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\psi} = 0: \qquad \frac{dg(y)}{dy} - kf(y) = 0. \qquad (59)$$

Продифференцировав по y уравнение (58) и сложив полученное выражение с (59), мы исключим dg/dy и получим

$$\frac{d^2f}{dy^2}=k^2f(y). \tag{60}$$

Это уравнение имеет общее решение

$$f(y)=Ae^{ky}+Be^{-ky}. \tag{61}$$

Аналогичное решение легко получить и для $g(y)$:

$$g(y)=Ae^{ky}-Be^{-ky}. \tag{62}$$

Граничное условие на дне. Теперь воспользуемся тем граничным условием, что на дне аквариума (озера) нет вертикального движения воды. Условие $\psi_y=0$ при $y=-h$ эквивалентно условию $f(y)=0$ при $y=-h$. Из уравнения (61) получим $B=-A\exp(-2kh)$. Таким образом, имеем окончательный результат для стоячей синусоидальной волны в аквариуме (озере) с постоянной глубиной h:

$$\psi_y=A\cos\omega t\sin kx\,(e^{ky}-e^{-2kh}e^{-ky}), \tag{63}$$

$$\psi_x=A\cos\omega t\cos kx\,(e^{ky}+e^{-2kh}e^{-ky}). \tag{64}$$

Уравнения (63) и (64) дают мгновенные значения смещений частицы воды с *равновесными* координатами x, y. Как легко показать из этих уравнений, движение данной частицы в стоячей волне в воде состоит из гармонического колебания вдоль прямой линии в плоскости xy. Это легко увидеть, наблюдая за кофейными зернами в аквариуме.

Волны в глубокой воде. Если глубина h велика по сравнению с длиной волны, то член $\exp(-2kh)$ практически равен нулю и мы можем пренебречь вторым членом в выражениях для $g(y)$ и $f(y)$. В этом случае уравнения (63) и (64) примут вид

$$\psi_y=A\cos\omega t\sin kx\,e^{ky}, \tag{65}$$

$$\psi_x=A\sin\omega t\cos kx\,e^{ky}. \tag{66}$$

Мы видим, что волны синусоидальны в направлении x и экспоненциальны в направлении y. Глубина проникновения амплитуды δ равна $1/k$ или, что то же, $\lambda/2\pi$. Величина $\lambda/2\pi$ называется *приведенной длиной волны* и обозначается символом $\lambdabar$. Таким образом, для волн в глубокой воде имеем

$$f(y)=e^{ky}=e^{-k|y|}=e^{-|y|/\lambdabar}. \tag{67}$$

Глубина проникновения для амплитуды (расстояние, на котором амплитуда уменьшается в e раз) *равна приведенной длине волны.* Поэтому амплитуда колебаний частицы воды, находящейся в состоянии равновесия под водой на глубине одной длины волны от поверхности, меньше амплитуды колебаний частицы на поверхности в $\exp(-2\pi)\approx 1/500$ раз. Мы видим, что колебания почти полностью затухают на глубине порядка одной длины волны. На такой глубине движение будет пренебрежимо мало, и мы можем считать, что имеем дело с волнами в глубокой воде.

Волны в неглубокой воде. Под такими волнами понимают волны, которые возникают в сосуде (водоеме), равновесная глубина h которого мала по сравнению с $\lambdabar$. В этом случае мы можем аппроксимировать зависимость ψ_x и ψ_y от y, оставив в разложении в ряд Тейлора функций $f(y)$ и $g(y)$ только первые члены. Легко показать, что для $h \ll \lambdabar$ уравнения (63) и (64) примут вид

$$\psi_y = 2A \cos \omega t \sin kx \,[k(y+h)], \tag{68}$$

$$\psi_x = 2A \cos \omega t \cos kx. \tag{69}$$

Мы видим, что для такой волны горизонтальное смещение частицы ψ_x не зависит от ее равновесной координаты y. Вертикальное смещение ψ_y меняется линейно с глубиной частицы, достигая нуля на дне и максимума на поверхности. На поверхности максимальное вертикальное смещение меньше максимального горизонтального в $h/\lambdabar \ll 1$ раз.

В нашей модели идеализированной воды мы пренебрегли трением воды о грубую поверхность дна. Для волн в глубокой воде это упущение несущественно. Для волн в мелкой воде трение играет важную роль, в чем можно убедиться, возбудив стоячие волны в прямоугольной ванночке (см. домашний опыт 7.11). Другое приближение заключается в том, что мы пренебрегли внутренним трением, т. е. вязкостью. Чтобы понять, как сказывается вязкость, выполните какой-нибудь из домашних опытов с маслом вместо воды.

Дисперсионное соотношение для гравитационных волн в воде. Мы рассмотрели геометрию идеальных волн в воде, но еще ничего не знаем о соотношении между «формой» (длиной волны и глубиной) и частотой. Чтобы изучить эту связь, нужно рассмотреть возвращающую силу, которая действует на воду в волне. (Напомним, что возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, равна ω^2. Это — общий результат, справедливый как для гармонических водяных волн, так и для любых других гармонических волн.)

При изучении мод в главе 1 мы пришли к выводу, что в данной моде все движущиеся элементы имеют одно значение ω^2 и чтобы найти соотношение между частотой моды и ее формой (если она известна), достаточно рассмотреть движение для одной степени свободы движущегося элемента. В нашей задаче форма волны определяется уравнениями (63) и (64). Поэтому мы можем рассматривать движение отдельной частицы только в направлении оси x (или y). Будем рассматривать движение по x бесконечно малого объема воды, расположенного очень близко к поверхности.

Рассмотрим небольшой объем воды (рис. 7.6), имеющий в равновесии размеры Δx и Δy и длину L (по оси z). Пусть размеры Δx и Δy малы по сравнению с длиной волны. Возвращающая сила F_x, действующая на объем воды, равна площади $L\,\Delta y$, умноженной на разность давлений в точках x и $x+\Delta x$. Разность давлений определяется произведением ρg (плотность воды на ускорение силы тяжести) на разность высот в точках x и $x+\Delta x$, т. е. на разность $\psi_y(x+\Delta x)-\psi_y(x)$. Эта разность равна произведению производной $\partial\psi_y/\partial x$ на равновесное значение Δx. Окончательно имеем

$$F_x = -L\,\Delta y\,[p(x+\Delta x)-p(x)] = -L\,\Delta y\,\rho g\,[\psi_y(x+\Delta x)-\psi_y(x)] =$$
$$= -L\,\Delta y\,\Delta x\,\rho g\,\frac{\partial\psi_y}{\partial x} = -(\Delta M)g\left[\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right]_{y=0}, \quad (70)$$

где $\Delta M=\rho L\,\Delta y\,\Delta x$ — масса воды в объеме рассматриваемого элемента. Сила F_x создает ускорение, направленное по оси x. Его величина равна $\partial^2\psi_x/\partial t^2$, и так как движение гармоническое, то $\partial^2\psi_x/\partial t^2=-\omega^2\psi$. Второй закон Ньютона для массы ΔM

$$F_x = (\Delta M)\,\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2},$$

дает, если воспользоваться выражением (70) для F_x,

$$(\Delta M)\,g\left[\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right]_{y=0} =$$
$$= (\Delta M)\,\omega^2\,[\psi_x]_{y=0}. \quad (71)$$

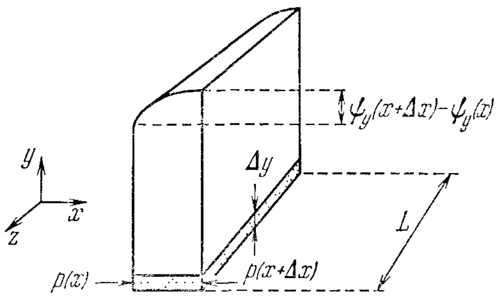

Рис. 7.6. Гравитационная возвращающая сила вдоль оси x для элемента объема воды.

Выделенная часть объема испытывает силу, пропорциональную разности давлений $p(x+\Delta x)-p(x)$. Эта разность пропорциональна разности высот воды $\psi_y(x+\Delta x)-\psi_y(x)$.

Теперь, используя ψ_y и ψ_x из уравнений (63) и (64), получим

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\frac{(1-e^{-2kh})}{(1+e^{-2kh})}.} \quad (72)$$

Выражение (72) и есть искомое дисперсионное соотношение. Из него легко получить дисперсионное соотношение и соответствующие фазовые скорости для гравитационных волн в глубокой и мелкой воде:

$$\text{Волны в глубокой воде:}\quad \omega^2=gk, \qquad v_\text{ф}=\sqrt{g\lambdabar}, \quad (73)$$
$$\text{Волны в мелкой}\quad\text{боде:}\quad \omega^2=gk\,(h/\lambdabar), \qquad v_\text{ф}=\sqrt{gh}. \quad (74)$$

Таким образом, гравитационные волны в мелкой воде не диспергируют. Глубинные гравитационные волны имеют дисперсию: фазовая скорость удваивается, если длина волны возрастает в четыре раза.

Волны поверхностного натяжения. При выводе дисперсионного соотношения (72) мы пренебрегли возвращающей силой, возникающей от поверхностного натяжения. Для данного элемента соответствующий вклад в возвращающую силу пропорционален произведению коэффициента поверхностного натяжения T на кривизну поверхности. Последняя пропорциональна k^2. Поэтому вклад от сил поверхностного натяжения пропорционален Tk^2. Гравитационный вклад пропорционален весу Mg, т. е. ρg. Таким образом, следует предположить, что относительный вклад в ω^2 сил поверхностного натяжения и сил тяжести определяется безразмерным отношением $Tk^2/\rho g$. Это предположение справедливо. (См. задачу 7.33.)

Бегущие волны в воде. Покажите сами (задача 7.31), что бегущие волны в воде описываются уравнениями

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx)(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}), \tag{75}$$

$$\psi_x = A \sin(\omega t - kx)(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}). \tag{76}$$

Из этих уравнений сразу следует, что у бегущих волн в глубокой воде данная частица воды движется по кругу в плоскости xy, смещаясь вперед, когда она на гребне волны, и назад, когда она находится во впадине. В общем случае любой глубины h частицы воды движутся по эллипсу. Движение по эллипсу аналогично круговому движению в глубокой воде, с той лишь разницей, что между поверхностью и дном сосуда (озера, океана) происходит постепенное «сплющивание» окружности.

Все это справедливо, если можно пренебречь трением о дно. В противном случае воде будет легче продвигаться вперед на гребнях, чем смещаться назад во впадинах. В результате будет происходить перенос воды, и в этом случае волны «ломаются». Действительно, около берега можно наблюдать, как на волнах образуются буруны, которые опрокидываются вперед по ходу волны. Именно поэтому в сильное волнение (в случае больших длин волн) пловец должен держаться вдали от каменистого берега, в противном случае волна может с большой скоростью выбросить его на берег.

7.4. Электромагнитные волны

В этом пункте мы используем уравнения Максвелла, чтобы дать общее описание явлений, с которыми мы познакомились при рассмотрении передающей линии из плоскопараллельных пластин. Таким образом, мы подготовимся к лучшему пониманию поведения электромагнитных волн в трехмерном пространстве.

Уравнение Максвелла для вакуума. Эти уравнения имеют вид (см. том II, стр. 264)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B}, \tag{77а}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \tag{77б}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{77в}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{77г}$$

Классическое уравнение для электромагнитных волн в вакууме. Мы получим дифференциальное уравнение в частных производных