пропорционален весу Mg, т. е. ρg. Таким образом, следует предположить, что относительный вклад в ω^2 сил поверхностного натяжения и сил тяжести определяется безразмерным отношением $Tk^2/\rho g$. Это предположение справедливо. (См. задачу 7.33.)

Бегущие волны в воде. Покажите сами (задача 7.31), что бегущие волны в воде описываются уравнениями

$$\psi_y = A\cos(\omega t - kx)(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}), \tag{75}$$

$$\psi_x = A\sin(\omega t - kx)(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}). \tag{76}$$

Из этих уравнений сразу следует, что у бегущих волн в глубокой воде данная частица воды движется по кругу в плоскости xy, смещаясь вперед, когда она на гребне волны, и назад, когда она находится во впадине. В общем случае любой глубины h частицы воды движутся по эллипсу. Движение по эллипсу аналогично круговому движению в глубокой воде, с той лишь разницей, что между поверхностью и дном сосуда (озера, океана) происходит постепенное «сплющивание» окружности.

Все это справедливо, если можно пренебречь трением о дно. В противном случае воде будет легче продвигаться вперед на гребнях, чем смещаться назад во впадинах. В результате будет происходить перенос воды, и в этом случае волны «ломаются». Действительно, около берега можно наблюдать, как на волнах образуются буруны, которые опрокидываются вперед по ходу волны. Именно поэтому в сильное волнение (в случае больших длин волн) пловец должен держаться вдали от каменистого берега, в противном случае волна может с большой скоростью выбросить его на берег.

7.4. Электромагнитные волны

В этом пункте мы используем уравнения Максвелла, чтобы дать общее описание явлений, с которыми мы познакомились при рассмотрении передающей линии из плоскопараллельных пластин. Таким образом, мы подготовимся к лучшему пониманию поведения электромагнитных волн в трехмерном пространстве.

Уравнение Максвелла для вакуума. Эти уравнения имеют вид (см. том II, стр. 264)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B}, \tag{77а}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \tag{77б}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{77в}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{77г}$$

Классическое уравнение для электромагнитных волн в вакууме. Мы получим дифференциальное уравнение в частных производных для $\mathbf{E}$, исключая $\mathbf{B}$ из уравнений (77). Сначала продифференцируем уравнение (77а) по времени, а затем используем уравнение (77б). Получим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) =$$

$$= c\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} =$$

$$= c\nabla \times (-c\nabla \times \mathbf{E}) =$$

$$= -c^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \tag{77д}$$

Можно показать, что для любого вектора $\mathbf{C}$ [см. П. 4, уравнение (39)]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{C}. \tag{78}$$

Подставляя $\mathbf{E}$ в уравнение (78) и помня, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ [уравнение (77в)], получаем из уравнения (77д)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z, t). \tag{79а}$$

Это векторное уравнение состоит из трех отдельных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_x; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_z. \tag{79б}$$

Итак, составляющие электрического поля E_x, E_y и E_z в отдельности удовлетворяют классическому волновому уравнению для недиспергирующих волн [см. уравнение (18), п. 7.2]. Исключив $\mathbf{E}$ из уравнений Максвелла, мы получим классическое волновое уравнение для трех компонент $\mathbf{B}$. (Задача 7.12.)

Электромагнитные плоские волны в вакууме. Электромагнитная *плоская волна* состоит из электрического $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и магнитного $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ полей, обладающих следующими свойствами:

1. Существует единственное направление распространения. Мы совместим его с осью $\hat{\mathbf{z}}$. (Волны могут быть любой комбинацией бегущих или стоячих волн.)

2. Ни одна из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ не зависит от поперечных координат x и y.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}E_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}E_z(z, t), \tag{80}$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}B_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}B_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}B_z(z, t). \tag{81}$$

То, что мы имеем дело с плоскими волнами [выражения (80) и (81)], накладывает определенные ограничения на источник волн, на то, как они образуются, и т. д. Однако здесь нас не интересуют источники. Мы просто предполагаем, что волны откуда-то пришли и их форма определяется уравнениями (80) и (81), *Электромагнитные плоские волны поперечны.* Применим уравнения Максвелла к волнам (80) и (81). Вначале используем закон Гаусса: $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$. В вакууме плотность зарядов ρ равна нулю. Так как любые компоненты поля $\mathbf{E}$ не зависят от x или y, то частные производные по x и y равны нулю. Окончательно имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} = 0. \tag{82}$$

Это означает, что E_z не зависит от z. Кроме того, E_z не зависит и от времени t. Действительно, рассмотрим уравнение Максвелла для тока смещения

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B}. \tag{83}$$

Возьмем z-компоненту уравнения (83). В правую часть уравнения войдут производные $\partial B_y/\partial x$ и $\partial B_x/\partial y$, равные нулю. Таким образом, $\partial E_z/\partial t$ равно нулю, и мы получили, что величина E_z постоянна. Для простоты можем положить эту постоянную составляющую равной нулю. (Сделав так, мы не нарушим общности рассуждений, а поступим в согласии с принципом суперпозиции, позволяющим не рассматривать постоянную составляющую. Ее действие в случае необходимости может быть учтено.)

Аналогично, уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ показывает, что составляющая $B_z(z, t)$ не зависит от z. Независимость $B_z(z, t)$ от t следует из закона индукции Фарадея

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}. \tag{84}$$

Таким образом, B_z можно также положить равным нулю без потери общности. Предположение, что B_z и E_z равны нулю, эквивалентно тому, что мы не рассматриваем статические поля, которые не влияют на переменное поле.

Таким образом, *электромагнитные плоские волны являются поперечными волнами*, т. е. у этих волн векторы электрических и магнитных полей перпендикулярны направлению распространения $\hat{\mathbf{z}}$.

Связь E_x и B_y. У нас остались поля E_x, E_y, B_x и B_y, а также x- и y-компоненты уравнений (83) и (84). Для x-компоненты уравнения (83) и y-компоненты уравнения (84) имеем

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{85}$$

Аналогично, y-компонента уравнения (83) и x-компонента уравнения (84) дадут

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \tag{86}$$

В соответствии с уравнениями (85) составляющие E_x и B_y не являются независимыми. Они «связаны» двумя дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка (85). Если E_x — известная функция z и t, то B_y полностью определено (с точностью до константы). Аналогичная связь существует между E_y и B_x [уравнения (86)]. Если E_y известно, то B_x можно определить; если E_y равно нулю, то B_x равно нулю (или постоянно).

Линейная и эллиптическая поляризация. Поля E_x и E_y не связаны уравнениями Максвелла. Они независимы. Это значит, что можно создать электромагнитную плоскую волну с составляющей E_x, отличной от нуля, и составляющей E_y, равной нулю для всех z и t. В этом случае говорят, что волны *линейно поляризованы* по оси $\hat{\mathbf{x}}$. В случае линейно-поляризованных волн электрическое поле E_x и магнитное поле B_y — единственные ненулевые (или непостоянные) составляющие. Аналогично, можно иметь электромагнитные волны, линейно-поляризованные по $\hat{\mathbf{y}}$, тогда ненулевыми компонентами будут E_y и B_x. Возможна также и любая комбинация E_x и E_y (для данной частоты) с произвольной относительной фазой. В этом случае говорят об *эллиптической поляризации*. Мы будем изучать поляризацию в главе 8.

Легко заметить, что уравнения (86) также связывают E_y и B_x, как уравнения (85) связывают E_x и *минус* B_y. Наличие минуса связано вот с чем. Если вы имеете линейно-поляризованные волны с E_x и B_y положительными, то, повернув оси координат на 90°, чтобы совместить новую ось y с электрическим полем, вы обнаружите, что проекция магнитного поля на новую ось x будет отрицательной величиной. (Задача 7.34.) Поэтому уравнения (86) физически эквивалентны уравнениям (85), и мы ничего не потеряем, если ограничимся рассмотрением уравнений (85).

Будем считать, что мы имеем дело с линейно-поляризованной волной, которой соответствуют отличные от нуля значения E_x и B_y [уравнения (85)]. Мы начнем с рассмотрения гармонической бегущей волны, распространяющейся в направлении $+z$, и затем перенесем полученный результат на волны, распространяющиеся в противоположном направлении $-z$. Суперпозиция этих волн с произвольными амплитудами и фазовыми константами даст наиболее общее решение (для данной частоты) и как частный случай будет включать стоячие волны.

Бегущая гармоническая волна. Пусть E_x определяется уравнением

$$E_x = A\cos(\omega t - kz). \tag{87}$$

Используя уравнения (85) и соотношение $\omega = ck$, имеем

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c}A\sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{88}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ckA\sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{89}$$

В соответствии с уравнениями (88) и (89) величина B_y зависит от z и t, так же, как и величина E_x. Таким образом, в бегущей гармонической плоской волне, распространяющейся в направлении $+z$, компоненты поля B_y и E_x равны с точностью до констант, которые мы положили равными нулю.

Для гармонической бегущей волны, распространяющейся в направлении $-z$, B_y равно $-E_x$, что легко можно получить, заменив k на $-k$ в приведенных выше уравнениях. Напишем уравнения, справедливые для обоих направлений распространения бегущей волны:

$$\text{Бегущая волна:}\quad \begin{cases} |\mathbf{E}(z,t)| = |\mathbf{B}(z,t)|, \\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0, \\ \hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{v}}. \end{cases} \tag{90}$$

Стоячая гармоническая волна. Предположим, что составляющая E_x равна

$$E_x(z,t) = A\cos\omega t\cos kz. \tag{91}$$

Покажите (задача 7.36), что в этом случае

$$B_y(z,t) = A\sin\omega t\sin kz = E_x\left(z - \frac{1}{4}\lambda,\ t - \frac{1}{4}T\right). \tag{92}$$

Из уравнений (91) и (92) следует, что в электромагнитной стоячей плоской волне в вакууме $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны друг другу и $\hat{\mathbf{z}}$, имеют одинаковую амплитуду и сдвинуты на 90° по фазе как в пространстве, так и во времени. (Аналогично ведут себя давление и скорость в стоячей звуковой волне или поперечное натяжение и скорость для стоячей волны в струне.)

Поток энергии в плоской волне. Плотность энергии электромагнитного поля в вакууме равна

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \tag{93}$$

(Это выражение дано в томе II, стр. 116 и 258, для статических полей, но можно показать, что оно справедливо в общем случае.) Нас интересует энергия любой линейной суперпозиции бегущих и стоячих плоских волн. В частности, нас интересует поток энергии. Найдем выражение для энергии в бесконечно малом элементе объема с площадью A, перпендикулярной оси z, и бесконечно малой толщиной Δz вдоль этой оси. (Затем мы найдем, как меняется эта энергия со временем.) Энергия $W(z,t)$ в элементе объема равна плотности энергии, умноженной на объем $A\,\Delta z$:

$$W(z,t) = \frac{A\,\Delta z}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2). \tag{94}$$

Дифференцируя $W(z,t)$ по времени, получим

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{A\,\Delta z}{4\pi}\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial t} + B_y\frac{\partial B_y}{\partial t}\right). \tag{95}$$

Чтобы исключить $\partial E_x/\partial t$ и $\partial B_y/\partial t$, используем уравнения Максвелла (85):

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = -\frac{Ac\,\Delta z}{4\pi}\left(E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{Ac\,\Delta z}{4\pi}\frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} =$$

$$= -\frac{Ac\,\Delta z}{4\pi}\left[\frac{(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z}{\Delta z}\right]. \quad (96)$$

Последнее преобразование в уравнении (96) эквивалентно вычислению частной производной произведения $E_x B_y$ по z (для фиксированного времени), и мы находим, что скорость изменения энергии в объеме $A\,\Delta z$ равна

$$\frac{1}{A}\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} E_x(z, t) B_y(z, t) - \frac{c}{4\pi} E_x(z+\Delta z, t) B_y(z+\Delta z, t) =$$

$$= S_z(z, t) - S_z(z+\Delta z, t), \quad (97)$$

где

$$S_z(z, t) \equiv \frac{c}{4\pi} E_x(z, t) B_y(z, t) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z. \quad (98)$$

Таким образом, скорость изменения энергии в элементе объема $A\,\Delta z$ равна значению $AS_z(z, t)$, вычисленному в точке z, минус значение этой величины в точке $z+\Delta z$. Поэтому величина $S_z(z, t)$ должна соответствовать мгновенному значению потока энергии через единичную площадь в направлении $+z$. Увеличение энергии в элементе объема определяется разностью величин втекающего (слева) и вытекающего (справа) потоков; z-компонента $S_z(z, t)$ *вектора потока* $\mathbf{S}$ определяется как поток энергии в направлении $+z$ через единичную площадь (в *эрг·см*$^{-2}$·*сек*$^{-1}$) с координатами z, t. (В нашей задаче это единственное направление потока энергии, так как ось z совпадает с направлением распространения волны.)

Вектор Пойнтинга. В общем случае вектор потока энергии имеет вид

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}.} \quad (99)$$

Он не зависит от выбора координат. Вектор потока энергии называется *вектором Пойнтинга.*

Плотность энергии и ее поток в бегущей волне. Для линейно-поляризованной бегущей волны, распространяющейся в направлении $+z$, можно положить $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x$ и $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} B_y$, причем $B_y = E_x$ для всех z, t. Таким образом, мы имеем (E измерено в ед. СГСЭ$_v$/*см*)

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad B_y = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad (100)$$

$$\text{Плотность энергии} = \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz), \quad (101)$$

$$\text{Поток энергии} = S_z = \frac{c}{4\pi} E_x B_y = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (102)$$

Заметим, что поток энергии S_z (в *эрг·см*$^{-2}$·*сек*$^{-1}$) для бегущей волны равен плотности энергии (в *эрг/см*^{3}), умноженной на скорость света (в *см/сек*).

Средний во времени поток энергии (при фиксированном z) равен среднему в пространстве потоку энергии (при фиксированном t). Обе эти величины не зависят ни от z, ни от t и получаются из уравнения (102) заменой $\cos^2(\omega t - kz)$ средним значением $^1/_2$.

Плотность энергии и ее поток в стоячей волне. Для стоячей волны имеем

$$E_x = E_0 \cos \omega t \cos kz, \quad B_y = E_0 \sin \omega t \sin kz. \tag{103}$$

Максимумы для плотности электрической энергии и плотности магнитной энергии сдвинуты во времени на $^1/_4$ периода и в пространстве на $^1/_4$ длины волны. Покажите сами (задача 7.36), что в любой области длиной $^1/_4\lambda$ полная энергия постоянна. Энергия электрического поля совершает гармонические колебания относительно среднего значения с частотой 2ω, достигая предельных значений — нуля и двойного среднего значения. То же происходит с энергией магнитного поля. Таким образом, энергия колеблется от чисто электрической, имеющей максимум плотности в одном месте, до чисто магнитной с максимумом плотности энергии, смещенным на $^1/_4\lambda$. Это напоминает поведение гармонического осциллятора (колебательного контура). Полная энергия осциллятора постоянна, но колеблется, переходя из чисто потенциальной энергии в одном положении массы в чисто кинетическую энергию в другом положении массы. Как потенциальная, так и кинетическая энергии гармонически колеблются относительно их среднего значения с частотой 2ω. Двойка появляется потому, что потенциальная энергия дважды (за период) положительна и дважды достигает максимального значения (то же справедливо и для кинетической энергии). Электрическое поле E_x в стоячей волне аналогично смещению массы гармонического осциллятора от положения равновесия, в то время как магнитное поле B_y аналогично скорости этой массы.

Поток импульса в бегущей волне; давление электромагнитного излучения. Когда электромагнитное излучение поглощается без отражения веществом, последнему передается энергия W, а также импульс (вдоль направления распространения). Мы покажем, что величина передаваемого импульса равна W/c. Если пучок отражается на 180° от зеркала (без какого-либо поглощения), то зеркалу передается удвоенное значение импульса, равное $2W/c$. Таким образом, излучение оказывает давление на предметы, которые поглощают или отражают его. Это давление называется *давлением излучения*. Бегущей электромагнитной плоской волне с энергией W соответствует импульс $\mathbf{P}$, равный

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{W}{c}\hat{\mathbf{z}},} \tag{104}$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ совпадает с направлением распространения.

Уравнение (104) легко получить, если принять, что свет в бегущей волне состоит из частиц, называемых фотонами. Фотоны подобны частицам, но их масса покоя равна нулю. Релятивистская частица с массой покоя M и импульсом P имеет энергию W, равную

$$W=[(cP)^2+(Mc^2)^2]^{1/2}. \tag{105}$$

Положив массу M равной нулю, получим уравнение (104).

Этот краткий вывод может ввести в заблуждение. Известно, что электромагнитное излучение квантовано в том смысле, что оно переносит энергию порциями, величина которых равна $\hbar\omega$. Однако это еще ничего не говорит о давлении излучения, т. е. об уравнении (104). Поэтому мы приведем чисто классический вывод уравнения (104), не связанный с корпускулярным представлением о свете. (В томе IV вы познакомитесь с квантовыми идеями о свете.)

Рассмотрим частицу с зарядом q, на которую действует бегущая плоская волна. Будем считать, что заряд q положителен, и предположим, что частица приходит в движение в момент $t=0$. Сила $\mathbf{F}$, действующая на частицу, — это сила Лоренца:

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}. \tag{106}$$

Сначала (например, в течение первых нескольких колебаний) величина скорости $\mathbf{v}$ мала. Поэтому движение заряда в основном определяется вектором $\mathbf{E}$. Таким образом, $\mathbf{v}$ направлено по $\mathbf{E}$ и изменяет направление вместе с изменением направления $\mathbf{E}$. Но всякий раз при изменении направления $\mathbf{E}$ меняет направление $\mathbf{B}$. Поэтому вектор $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ всегда имеет один и тот же знак. Сила, действующая на заряд q благодаря $\mathbf{B}$, всегда совпадает с направлением распространения, определяемым вектором $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. Таким образом, заряд совершает движение, являющееся суперпозицией поперечных колебаний с частотой поля, плюс движение с медленно возрастающей скоростью вдоль направления распространения поля. Покажем теперь, что средняя по времени скорость, с которой заряд приобретает импульс вдоль z, равна произведению $1/c$ на среднюю по времени скорость, с которой заряд поглощает энергию из бегущей волны. (Заряд не «удерживает» поглощенную им энергию. Если заряд связан с веществом, то он постоянно преобразует полученную энергию в тепло благодаря наличию сил сопротивления, действующих на заряд при его движении. Если заряд находится в свободном пространстве, то энергия, поглощенная им, испускается во всех направлениях. Величина энергии, излученной в направлении падения бегущей волны, пренебрежимо мала, так что обратно в бегущую волну возвращается ничтожная часть поглощенной энергии.)

Теперь рассмотрим вывод. Имеем обычную бегущую волну $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}E_x$, $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{y}}B_y$ и $B_y=E_x$. Скорость $\mathbf{v}$ заряженной частицы равна $\mathbf{v}=\hat{\mathbf{x}}\dot{x}+\hat{\mathbf{y}}\dot{y}+\hat{\mathbf{z}}\dot{z}$. Подставляя эти значения поля и скорости в уравнение (106) и имея в виду, что $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}}=0$ и $\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$, мы получаем

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} qE_x + \frac{q}{c}\dot{x}B_y\hat{\mathbf{z}} - \frac{q}{c}\dot{z}B_y\hat{\mathbf{x}}. \tag{107}$$

Далее, усредним уравнение (107) за один цикл. Первый член $\hat{\mathbf{x}} qE_x$ при таком усреднении даст нуль. То же справедливо и для последнего члена $\dot{z}B_y$, поскольку мы предполагаем, что приращение скорости вдоль z в течение одного цикла пренебрежимо мало, т. е. считаем скорость $\dot{z}$ постоянной в течение одного цикла, а среднее по времени за один цикл от поля B_y дает нуль. Среднее от оставшегося члена $\frac{q}{c}\dot{x}B_y\hat{\mathbf{z}}$ не будет равно нулю, так как поперечная скорость $\dot{x}$ колеблется с такой же частотой, что и B_y. Вспоминая, что сила равна скорости изменения импульса, мы получаем для усредненных по времени значений (обозначаемых скобками $\langle \ \rangle$)

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{q}{c}\langle \dot{x}B_y \rangle. \tag{108}$$

Теперь рассмотрим работу, которую бегущая волна совершает над зарядом q. Мгновенное значение этой работы, совершаемой за единицу времени, равно

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{v}\cdot\left(q\mathbf{E} + q\,\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} + 0 = q\dot{x}E_x.$$

Беря среднее за один цикл, имеем

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q\,\langle \dot{x}E_x \rangle. \tag{109}$$

Сравнивая уравнения (108) и (109) и имея в виду, что $B_y = E_x$ (для бегущей волны), получаем

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{1}{c}\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle. \tag{110}$$

Итак, за интервал времени, в течение которого электрону передается от бегущей волны энергия W, он также приобретает импульс, равный $\hat{\mathbf{z}}(W/c)$. Нельзя передать энергию W и не передать при этом импульс $\hat{\mathbf{z}}(W/c)$. Это равносильно утверждению, что излучение обладает импульсом, определяемым из уравнения (104). В задачах 7.13, 7.14 и 7.15 рассматривается давление излучения от Солнца.

Момент импульса в бегущей плоской волне. Покажем, что бегущая плоская волна может передавать заряду q не только энергию или импульс, но и момент импульса. Для этого нужно показать, что заряд участвует в круговом движении. Очевидно, это невозможно в случае линейно-поляризованного поля. Круговое движение заряда может происходить в поле с «круговой поляризацией». Рассмотрим бегущую волну, распространяющуюся в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$. Пусть вектор электрического поля $\mathbf{E}$ имеет постоянную величину и вращается (при фиксированном z) с угловой скоростью ω вокруг оси z, образуя с ней правый винт. Таким образом, E_x и E_y — гармонические функции времени (при фиксированном z) и E_x опережает E_y по фазе на 90°. Магнитное поле $\mathbf{B}$ (как всегда в бегущей волне) $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}$. Так как электрическое поле ускоряет электрон в своем направлении (а магнитное искривляет его траекторию), мы можем предположить, что в установившемся состоянии заряд q совершает движение по окружности с угловой скоростью ω. (Заряд также медленно движется в направлении $+z$ благодаря воздействию на него давления излучения. Однако этим движением мы можем пренебречь.) На рис. 7.7 показана конфигурация полей, положение заряда $\mathbf{r}$ и скорость заряда $\mathbf{v}$. Заметим, что $\omega\mathbf{r}$ имеет ту же величину, что и $\mathbf{v}$. Взаимное расположение векторов $\mathbf{v}$ и $\omega\mathbf{r}$ указано на рис. 7.7.

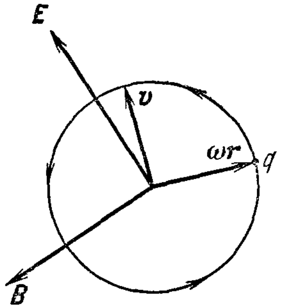

Рис. 7.7. Свет, поляризованный по кругу, вызывает движение заряда q по круговой траектории.
Ось $\mathbf{z}$ выходит из плоскости рисунка.

Момент вращения $\boldsymbol{\tau}$, действующий на заряд q, равен $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$. Умножая на ω, получим

$$\omega\boldsymbol{\tau}=\omega\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\omega\mathbf{r}\times q\mathbf{E}+\omega\mathbf{r}\times\frac{q}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \qquad (111)$$

Найдем среднее за один цикл. Из рис. 7.7 мы видим, что вектор $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ направлен вдоль $\mathbf{z}$, поэтому вектор $\mathbf{r}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ направлен вдоль $-\mathbf{v}$. Так как среднее за один цикл от каждой компоненты $\mathbf{v}$ дает нуль, то магнитное поле не внесет никакого вклада в среднюю во времени величину момента вращения. Из рис. 7.7 мы также видим, что $\omega\mathbf{r}\times\mathbf{E}$ направлен вдоль $\hat{z}$ и имеет ту же величину, что и $\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$. Поэтому можем записать

$$\omega\mathbf{r}\times\mathbf{E}=\hat{\mathbf{z}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}. \qquad (112)$$

Таким образом, среднее значение (за один цикл) момента вращения, действующего на заряд q, равно

$$\langle\boldsymbol{\tau}\rangle=\left\langle\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right\rangle=\frac{\hat{\mathbf{z}}}{\omega}\langle q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\rangle=\frac{\hat{\mathbf{z}}}{\omega}\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle. \qquad (113)$$

Мы учли тот факт, что момент вращения представляет собой скорость изменения момента импульса $\mathbf{J}$ и что $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$ представляет собой скорость, с которой совершается работа над зарядом q. В соответствии с уравнением (113) заряд q, поглощающий энергию W от поляризованной по кругу бегущей волны, в которой вращение поля происходит вокруг оси $+\hat{\mathbf{z}}$, поглощает также и момент импульса $\mathbf{J}$, равный

$$\mathbf{J}=\hat{\mathbf{z}}\frac{W}{\omega}.$$

Введя единичный вектор $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ для направления вращения, мы можем представить наш результат в виде

$$\boxed{\mathbf{J}=\hat{\boldsymbol{\omega}}\frac{W}{\omega},} \qquad (114)$$

т. е. поляризованная по кругу плоская бегущая волна переносит момент импульса, определяемый уравнением (114), где $\hat{\omega}$ либо совпадает, либо противоположно направлению распространения.

В главе 8 будет показано, что линейно-поляризованная бегущая плоская волна с амплитудой A может быть представлена суперпозицией двух поляризованных по кругу бегущих плоских волн, каждая с амплитудой $A/2$, но с противоположным направлением вращения. Поэтому в сумме для такой суперпозиции момент импульса отсутствует.

Как вы узнаете в томе IV, электромагнитные плоские бегущие волны переносят энергию порциями, или квантами, равными $\Delta W = \hbar\omega$. В соответствии с уравнением (114) такая волна при поглощении должна передавать квантованное значение момента импульса $\Delta J = \hbar$. Важно понимать, что уравнение (114) справедливо только для плоских бегущих волн. Поэтому оно справедливо на достаточно больших расстояниях от излучающего точечного источника.

Оказывается, что если поляризованный по кругу и образующий правый винт с направлением распространения свет проходит через прозрачную «полуволновую задерживающую пластинку» (пластинку, обеспечивающую задержку в полдлины волны), то направление винта изменится на обратное, т. е. изменится направление вращения поля. При этом пластинке будет передан момент импульса *в два раза* больше того, который следует из (114). Подробно этот вопрос рассмотрен в задаче 8.19.

Электромагнитные волны в однородной среде. Мы использовали уравнения Максвелла для изучения электромагнитных плоских волн в вакууме. В Д. 9 мы рассмотрим электромагнитные волны в однородной среде, которая не является вакуумом. Мы получим, что в такой среде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu, \tag{115}$$

где ε — диэлектрическая постоянная и μ — магнитная проницаемость. Этот результат аналогичен тому, который мы получили в п. 4.3 для электромагнитных волн в передающей линии из параллельных пластин [уравнение (4.66)].

7.5. Излучение точечного заряда

В этом пункте мы будем рассматривать электрические и магнитные поля в *сферической бегущей волне*, образованной колеблющимся точечным зарядом. Полученные результаты помогут нам понять свойства электромагнитного излучения, испускаемого атомами, радиостанциями, звездами, и ответить на вопрос о причине голубого цвета неба.

Уравнения Максвелла в присутствии источников. В этом случае мы должны воспользоваться уравнениями Максвелла с членами,