

т. е. поляризованная по кругу плоская бегущая волна переносит момент импульса, определяемый уравнением (114), где $\hat{\omega}$ либо совпадает, либо противоположно направлению распространения.

В главе 8 будет показано, что линейно-поляризованная бегущая плоская волна с амплитудой A может быть представлена суперпозицией двух поляризованных по кругу бегущих плоских волн, каждая с амплитудой $A/2$, но с противоположным направлением вращения. Поэтому в сумме для такой суперпозиции момент импульса отсутствует.

Как вы узнаете в томе IV, электромагнитные плоские бегущие волны переносят энергию порциями, или квантами, равными $\Delta W = \hbar\omega$. В соответствии с уравнением (114) такая волна при поглощении должна передавать квантованное значение момента импульса $\Delta J = \hbar$. Важно понимать, что уравнение (114) справедливо только для плоских бегущих волн. Поэтому оно справедливо на достаточно больших расстояниях от излучающего точечного источника.

Оказывается, что если поляризованный по кругу и образующий правый винт с направлением распространения свет проходит через прозрачную «полуволновую задерживающую пластинку» (пластинку, обеспечивающую задержку в полдлины волны), то направление винта изменится на обратное, т. е. изменится направление вращения поля. При этом пластинке будет передан момент импульса *в два раза* больше того, который следует из (114). Подробно этот вопрос рассмотрен в задаче 8.19.

Электромагнитные волны в однородной среде. Мы использовали уравнения Максвелла для изучения электромагнитных плоских волн в вакууме. В Д. 9 мы рассмотрим электромагнитные волны в однородной среде, которая не является вакуумом. Мы получим, что в такой среде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\mu, \quad (115)$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная и μ — магнитная проницаемость. Этот результат аналогичен тому, который мы получили в п. 4.3 для электромагнитных волн в передающей линии из параллельных пластин [уравнение (4.66)].

7.5. Излучение точечного заряда

В этом пункте мы будем рассматривать электрические и магнитные поля в *сферической бегущей волне*, образованной колеблющимся точечным зарядом. Полученные результаты помогут нам понять свойства электромагнитного излучения, испускаемого атомами, радиостанциями, звездами, и ответить на вопрос о причине голубого цвета неба.

Уравнения Максвелла в присутствии источников. В этом случае мы должны воспользоваться уравнениями Максвелла с членами,

соответствующими наличием источников:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (116)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (118)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (119)$$

Выше мы работали с этими четырьмя уравнениями в случае вакуума (когда плотности заряда ρ и тока \mathbf{J} равнялись нулю). Мы нашли (в п. 7.4), что в этих условиях \mathbf{E} и \mathbf{B} подчиняются классическому волновому уравнению для недиспергирующих волн, распространяющихся со скоростью c . Далее, мы нашли соотношение между \mathbf{E} и \mathbf{B} для больших расстояний от источника, полагая, что при достаточном удалении волны можно считать плоскими. Чтобы найти, как излучение зависит от движения источника, нужно рассмотреть уравнения Максвелла с членами, определяющими наличие источника. В уравнениях Максвелла имеются два источника. Один из них — это плотность заряда ρ и второй — плотность тока \mathbf{J} . Эти источники зависят друг от друга, и связь между ними выражается законом сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (120)$$

Уравнение (120) легко проверить, если воспользоваться уравнениями (116) и (119) и тем фактом, что $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0$ (см. том II, уравнение (4.9)). Рассматривая движение точечного заряда q , мы автоматически пользуемся фактом сохранения заряда и поэтому можем не иметь дела с током \mathbf{J} в явной форме, а сконцентрировать наше внимание на уравнении (116) с источником в виде заряда.

Закон Гаусса и сохранение потока \mathbf{E} . Уравнение (116) эквивалентно закону Гаусса (см. том II, пп. 1.10 и 2.10). Для заряда, находящегося в покое, закон Гаусса или (116) дают обычное поле, обратно пропорциональное квадрату расстояния (том II, п. 1.11):

$$\mathbf{E} = q \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (121)$$

Здесь $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ — вектор, соединяющий точку наблюдения с зарядом. Для движущегося заряда мы можем использовать понятие силовых линий и закон сохранения потока \mathbf{E} (что эквивалентно закону сохранения заряда). (См. том II, пп. 5.3 и 5.4.)

Движение заряда. Используем закон Гаусса, чтобы найти поле, излучаемое положительным точечным зарядом q , совершающим следующее движение: заряд находится в покое в начале инерционной системы координат в интервале времени от $t = -\infty$ до $t = 0$; в момент $t = 0$ он начинает двигаться в направлении $+\mathbf{x}$ с постоянным ускорением a , и по истечении короткого интервала времени Δt ускорение прекращается и заряд движется с постоянной скоростью

$v = a \Delta t$. До момента $t = 0$ электрическое поле в инерциальной системе определяется уравнением (121); магнитное поле всюду равно нулю; силовые линии \mathbf{E} направлены по радиусам от той точки, где находится заряд. Неожиданное ускорение в момент $t = 0$ создает перегибы или изломы («kinks») в силовых линиях поля \mathbf{E} и приводит к появлению магнитного поля \mathbf{B} . Эти поля распространяются от источника со скоростью c . (В этих утверждениях уже использованы уравнения Максвелла!) Мы хотим найти поля на большом расстоянии от источника; поэтому достаточно найти только \mathbf{E} . (Используя наши результаты для плоских волн, мы сможем, зная \mathbf{E} , найти \mathbf{B} .)

Рассмотрим время t , которое значительно больше, чем Δt . В точки пространства, расстояние r которых до начального положения заряда больше, чем ct , «новость» (информация) о том, что заряд получил ускорение, еще не прибыла. Точки, для которых r меньше $c(t - \Delta t)$, получают информацию о перемене состояния заряда, т. е. до них дойдут «перегибы» в силовых линиях, вызванные неожиданным ускорением заряда. Электрическое поле в этих точках будет определяться электрическим полем заряда, движущегося с постоянной скоростью v . Это поле направлено от мгновенного положения заряда q . Электрическое поле в фиксированной точке наблюдения, находящейся на расстоянии r' от мгновенного положения заряда, движущегося со скоростью v , выведено в томе II, п. 5.6. В точке наблюдения это поле направлено вдоль линии, соединяющей точку мгновенного положения заряда с точкой наблюдения, и его величина равна

$$E = \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (122)$$

где $\beta = v/c$ и θ — угол между направлением скорости \mathbf{v} и направлением на точку наблюдения из точки мгновенного положения заряда. Нас будет интересовать случай, когда v мало по сравнению с c . (Этому соответствует, например, испускание видимого света атомами; в этих случаях v/c порядка $1/137$.) Тогда с достаточной степенью точности мы можем положить в уравнении (122) $\beta = 0$ *).

Таким образом, для заряда, движущегося с постоянной скоростью $v \ll c$, электрическое поле в удаленной точке наблюдения равно

$$\mathbf{E}' = q \frac{\hat{\mathbf{r}}'}{r'^2}, \quad (123)$$

где $\mathbf{r}' = r' \hat{\mathbf{r}}'$ — радиус-вектор, проведенный от мгновенного положения заряда до точки наблюдения. Это очень простой результат.

Нас интересует электрическое поле в перегибах, распространяющееся со скоростью света. Чтобы найти это поле, используем закон Гаусса для данного момента времени, соединив поле перед перегибом [это поле определится по уравнению (121)] с полем после перегиба

*) Общий случай произвольного v ($v \leq c$) рассмотрен в статье: J. R. Tesman, J. T. Finnell, Jr., Am. J. Phys. 35, 523 (1967).

[оно определится по уравнению (123)] таким образом, чтобы поток \mathbf{E} (поверхностный интеграл от \mathbf{E}) сохранялся. (См. том II, п. 5.7.)

Рассмотрим время t , много большее, чем время Δt ускорения. Можно пренебречь расстоянием $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$, которое заряд проходит за время ускорения Δt , по сравнению с много большим расстоянием vt , которое он проходит с постоянной скоростью. Мы рассматриваем точку наблюдения, для которой вектор \mathbf{r} , проведенный из первоначального положения заряда, составляет угол θ с направлением скорости \mathbf{v} . Время t выбрано так, что перегиб начинает проходить через точку наблюдения в момент t . Таким образом, $r = ct$. Теперь рассмотрим вектор \mathbf{r}' , определяющий «хвост» или задний фронт перегиба. Так как $v \ll c$, то расстояние vt , которое прошел заряд, очень мало по сравнению с $r = ct$. Поэтому можно считать, что направление \mathbf{r}' почти параллельно направлению \mathbf{r} . Тогда расстояние r' равно

$$r' = r - vt \cos \theta = r \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \approx r,$$

так как $v/c \ll 1$. (124)

Рассматриваемая геометрия показана на рис. 7.8.

Обозначим через E_{\perp} и E_{\parallel} компоненты электрического поля \mathbf{E} в пространстве, занятом перегибом, соответственно перпендикулярную и параллельную направлению распространения $\hat{\mathbf{r}}$. Сохранение потока \mathbf{E} подразумевает непрерывность силовых линий. Поэтому отношение компоненты E_{\perp} к компоненте E_{\parallel} получается из простого рассмотрения рис. 7.8. Прямоугольный треугольник с гипотенузой, соответствующей полю в перегибе, катеты которого равны E_{\perp} к E_{\parallel} , подобен прямоугольному треугольнику с катетами длиной $v_{\perp} t$ и $c \Delta t$. Таким образом, из рис. 7.8 имеем

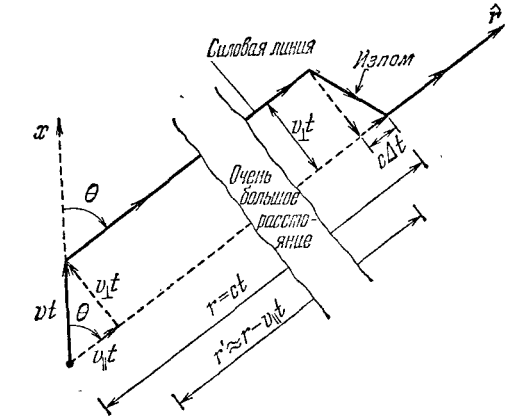


Рис. 7.8. Излучение ускоренного точечного заряда. Излом силовых линий поля \mathbf{E} распространяется со скоростью c . Рисунок сделан для случая $t \gg \Delta t$ и $v (= a \Delta t) \ll c$. Составляющие скорости \mathbf{v} , параллельные и перпендикулярные направлению $\hat{\mathbf{r}}$ от q до точки наблюдения, обозначены v_{\perp} и v_{\parallel} соответственно.

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp} t}{c \Delta t} \quad (125)$$

или, так как v_{\perp} равно $a_{\perp} \Delta t$ и $t = r/c$,

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{(a_{\perp} \Delta t) (r/c)}{c \Delta t} = a_{\perp} \frac{r}{c^2}, \quad (126)$$

где a_{\perp} — величина поперечной компоненты ускорения a .

Нам нужно определить E_{\parallel} — параллельную компоненту \mathbf{E} в перегибе. Мы найдем ее, применяя закон Гаусса к малому объему, подобному «коробочке» на рис. 7.9. Внутри объема зарядов нет, поэтому входящий в него электрический поток должен равняться выходящему потоку. Мы выбрали объем таким образом, что входящий поток равен E_{\parallel} , умноженному на площадь входной поверхности «коробочки», а выходящий поток равен (радиальному) полю сразу за перегибом, умноженному на равную площадь. Из рис. 7.9 можно заключить, что E_{\parallel} и E_r равны. Однако E_r определяется уравнением (121). Таким образом, имеем

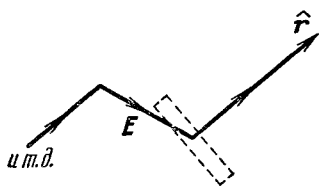


Рис. 7.9. Электрическое поле \mathbf{E} в месте излома силовых линий. Штриховой линией показана воображаемая поверхность, используемая для применения закона Гаусса.

$$E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{r^2}. \quad (127)$$

Если бы «коробочка» была расположена сзади перегиба, то мы получили бы, что E_{\parallel} должно равняться E'_r , определяемому из уравнения (123). Но E'_r равно E_r , так как r' и r практически равны в соответствии с уравнением (124). Таким образом, получим уравнение (127). Уравнение (125) также может быть получено из рассмотрения «коробочки». Наш упрощенный метод, который заключается в рассмотрении направления \mathbf{E} в перегибе, эквивалентен, как легко показать (задача 7.16), рассмотрению такого элементарного объема.

Поле излучения. Из уравнений (126) и (127) можно найти величину поперечного поля в перегибе:

$$E_{\perp} = \left(a_{\perp} \frac{r}{c^2} \right) E_{\parallel} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \frac{q}{r^2} = \frac{qa_{\perp}}{rc^2}. \quad (128)$$

Учтем в этом выражении для поля его направление. Вектор \mathbf{E}_{\perp} (см. рис. 7.8) в точке \mathbf{r} в момент t направлен вдоль отрицательного направления \mathbf{a}_{\perp} в момент t' , где $t' = t - \frac{r}{c}$. Будем называть \mathbf{E}_{\perp} *полем излучения* $\mathbf{E}_{\text{изл}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{изл}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{qa_{\perp}(t')}{rc^2}, \\ t' &= t - \frac{r}{c}. \end{aligned}} \quad (129)$$

Заметим, что поскольку радиальная компонента \mathbf{E} в перегибе такая же, как и радиальное поле перед перегибом и после перегиба, то она не несет никакой информации; это поле не излучается и не является частью бегущей волны. Если у нас есть детектор, который реагирует только на радиальную составляющую, то по ней он не определит наличие перегиба (т. е. он не обнаружит движения за-

ряда). Вот почему в поле излучения мы включили только поперечную составляющую. Такого результата можно было ожидать по аналогии с результатом, полученным в п. 7.4 для продольных компонент \mathbf{E} и \mathbf{B} в плоской волне. Как вы помните, эти компоненты оказались постоянными в пространстве и времени и поэтому не включались в волну. (В настоящем примере излучения точечного заряда можно ожидать, что поля в ограниченной области на расстоянии r от заряда будут подобны полям в плоской волне, поперечным к $\hat{\mathbf{r}}$.) Мы возьмем на себя смелость предположить, что к нашему случаю можно отнести и другие результаты, полученные для бегущих плоских волн, а именно то, что \mathbf{B} и \mathbf{E} взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения $\hat{\mathbf{r}}$ и что величины \mathbf{B} и \mathbf{E} равны в пространстве и во времени.

Обобщение для произвольного (нерелятивистского) движения точечного заряда. Предположим, что мы имеем точечный заряд q , который совершает некоторое сложное трехмерное движение. Мы будем называть это движение произвольным, однако оно должно удовлетворять условию $v \ll c$. Далее, мы предполагаем для простоты, что заряд q совершает перемещение в некоторой окрестности своего начального положения. Так, например, зарядом q может быть один из электронов в удаленной радиоантенне или в удаленном атоме. Мы считаем, что между понятиями «окрестность» и «удаленный» существуют следующие соотношения. Вектор смещения \mathbf{r} от мгновенного положения заряда q до фиксированной точки наблюдения должен быть практически постоянен по величине и направлению для всех возможных положений заряда в «окрестности». Таким образом, «удаленный» атом может находиться на расстоянии 10^{-5} см от точки наблюдения, так как «окрестность», занимаемая атомом, имеет радиус порядка 10^{-8} см. Для десятиметровой антенны «удаленная» точка наблюдения в смысле, определенном выше, находится, например, на расстоянии 10 000 м.

Что представляет собой поле излучения в удаленной точке, вызванное «произвольно» движущимся зарядом? Уравнение (129) было выведено для специального случая простого движения, состоящего из ускорения в течение короткого интервала времени Δt и последующего движения с постоянной скоростью. Мы нашли, что результирующее поле излучения в точке наблюдения в момент времени t полностью определяется поперечной составляющей ускорения $\mathbf{a}_\perp(t')$ в более ранний момент времени $t' = t - (r/c)$. В случае произвольного движения, при котором $\mathbf{a}(t')$ все время и непрерывно меняет свою величину, мы можем считать ускорение $\mathbf{a}(t')$ постоянным по величине и направлению в течение достаточно малого интервала времени $\Delta t'$. Поэтому можно считать, что ускорение $\mathbf{a}(t')$, действующее в течение интервала времени $\Delta t'$, создает в точке наблюдения поле, которое определяется выражением (129) и которое проходит через точку наблюдения за интервал Δt . Теперь мы столкнулись с некоторыми трудностями. Ранний момент времени t' , в который

возникает ускорение, определяющее поле, равен

$$t' = t - \frac{r'}{c}. \quad (130)$$

Излучение, испущенное зарядом q в течение интервала $\Delta t'$, проходит точку наблюдения за интервал Δt , равный

$$\Delta t = \Delta \left(t' + \frac{r'}{c} \right) = \Delta t' + \frac{\Delta r'}{c}, \quad (131)$$

где $\Delta r'$ — изменение расстояния между положением заряда и точкой наблюдений за время $\Delta t'$. Очевидно, что в общем случае Δt не равно $\Delta t'$. Поэтому в данный момент времени t в точке наблюдения будет «наложение» вкладов в поле излучения, испущенных в различные «ранние» моменты t' .

Как избежать «наложения». Мы не будем рассматривать общий случай. Заметим, что $\Delta r'$ равно продольной компоненте скорости, умноженной на $\Delta t'$. Поэтому для $v \ll c$ с хорошей степенью точности мы можем пренебречь $\Delta r'$ в уравнении (131):

$$\Delta t = \Delta t' + \frac{\Delta r'}{c} = \Delta t' + \frac{v_{\parallel} \Delta t'}{c} \approx \Delta t' \quad \text{для} \quad \frac{v_{\parallel}}{c} \ll 1. \quad (132)$$

Таким образом, для $v \ll c$ будет пренебрежимо малое наложение интервалов Δt и $\Delta t'$. В этом случае существует однозначная связь между обнаруженным излучением в момент t и поперечным ускорением заряда *в более ранний момент времени t'* ; для всех t излучаемое поле $\mathbf{E}_{\text{изл}}(\mathbf{r}, t)$ будет определяться уравнением (129).

Если известно \mathbf{E} , то известно и \mathbf{B} . Теперь будем считать, что уравнение (129) справедливо для удаленной точки наблюдения, когда \mathbf{r} практически постоянно. Также предположим, что $\mathbf{B}_{\text{изл}}$ определяется из соотношения, справедливого для плоской волны. Таким образом, имеем (опуская индекс «изл»)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (133)$$

Энергия, излучаемая точечным зарядом. Для удаленной точки наблюдения вектор потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ равен

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^2 \hat{\mathbf{r}} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[\frac{-q \mathbf{a}_{\perp}(t')}{rc^2} \right]^2 \hat{\mathbf{r}} = \frac{q^2}{c^3} [\mathbf{a}_{\perp}(t')]^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \end{aligned} \quad (134)$$

где S измеряется в единицах $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$. Поток энергии в $\text{эрг} \times \text{см}^{-2}$, проходящий через бесконечно малую площадку dA , расположенную в точке наблюдения (и ориентированную перпендикулярно \mathbf{r}), равен произведению вектора потока \mathbf{S} на площадь dA . Обозначим этот поток энергии через dP (P — это мощность в $\text{эрг} \cdot \text{сек}^{-1}$, а dP указывает на то, что мы рассматриваем бесконечно малую мощность, проходящую через dA):

$$dP(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)| dA = \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}_{\perp}^2(t') \frac{dA}{4\pi r^2}. \quad (135)$$

Обозначим через $\theta(t')$ угол между мгновенным значением ускорения $\mathbf{a}(t')$ в «ранний» момент времени t' и постоянным направлением \mathbf{r} из окрестности заряда q на точку наблюдения. Тогда, в соответствии с рис. 7.8, имеем

$$\mathbf{a}_{\perp}^2(t') = \mathbf{a}^2(t') \sin^2 \theta(t'). \quad (136)$$

Теперь выражение (135) можно переписать так:

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^2(t') \sin^2 \theta(t') \frac{dA}{4\pi r^2}. \quad (137)$$

Полная мгновенная мощность, излучаемая во всех направлениях. Будем считать t' и r фиксированными и проинтегрируем dP по всем направлениям $\hat{\mathbf{r}}$ (т. е. по поверхности сферы радиуса r). Если бы в выражение для dP не входил член $\sin^2 \theta(t')$, мы могли бы совершить интегрирование простой заменой бесконечно малой площади dA полной площадью $4\pi r^2$. Однако в выражение для dP входит $\sin^2 \theta(t')$ и мы должны при интегрировании учесть изменение $\sin^2 \theta(t')$ на сфере. Таким образом, имеем

$$P(t) = \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^2(t') \overline{\sin^2 \theta(t')}, \quad (138)$$

где

$$t' = t - \frac{r}{c},$$

$$\overline{\sin^2 \theta(t')} \equiv \int \sin^2 \theta(t') \frac{dA}{4\pi r^2}. \quad (139)$$

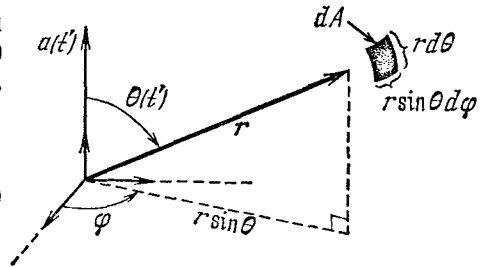


Рис. 7. 10. Сферические полярные координаты. Бесконечно малая площадь dA в конце радиуса-вектора $\hat{\mathbf{r}}$, ориентированная перпендикулярно $\hat{\mathbf{r}}$, равна $r^2 d\varphi \sin \theta d\theta$.

Для вычисления этого интеграла введем *сферические полярные координаты* (рис. 7.10). Бесконечно малая площадь dA представляет собой площадь маленького прямоугольника со сторонами $r d\theta$ и $r \sin \theta d\varphi$. Таким образом, имеем

$$\frac{dA}{r^2} = \frac{(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi)}{r^2} = d\theta \sin \theta d\varphi. \quad (140)$$

Легко показать (см. задачу 7.39), что

$$\overline{\sin^2 \theta(t')} = \frac{2}{3}. \quad (141)$$

Приведем короткий вывод этого равенства. Вектор \mathbf{r} имеет компоненту $z = r \cos \theta$ вдоль полярной оси. При усреднении z^2 по всем направлениям θ (r неизменно) мы должны получить такой же результат, что и при усреднении x^2 и y^2 . Но для каждой точки на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Поэтому

$$r^2 = \overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = 3\overline{z^2} = 3r^2 \overline{\cos^2 \theta},$$

тогда

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{\sin^2 \theta} = \overline{1 - \cos^2 \theta} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (142)$$

Знаменитая формула для излучаемой мощности. Вычислив $\overline{\sin^2 \theta(t')}$, подставим полученное значение в уравнение (138). Получим

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a^2(t'), \\ t' &= t - \frac{r}{c}. \end{aligned}} \quad (143)$$

В соответствии с уравнением (143) излучаемая мощность, проходящая через поверхность сферы радиуса r_1 в момент t_1 , имеет то же значение, что и мощность, проходящая через поверхность сферы радиуса r_2 в момент t_2 , который соответствует тому же «раннему» времени t' , что и в первом случае. Это означает, что справедлив закон сохранения энергии и что энергия переносится со скоростью света. Полученный результат является следствием того, что излучаемое поле обратно пропорционально первой степени r . Поэтому падающий на поверхность поток энергии $|\mathbf{S}|$ обратно пропорционален r^2 . Однако энергия распределяется по поверхности сферы, пропорциональной r^2 . Эти два множителя, r^{-2} и r^2 , сокращаются, и мы получаем, что полный поток энергии в единицу времени через поверхность сферы постоянен и не зависит от радиуса сферы при условии, что распространение вдоль радиуса происходит со скоростью света.

Излучение и поле в «ближней зоне». Оказывается, что точное решение для временной зависимости электрического и магнитного полей движущегося заряда наряду с полями «излучения», пропорциональными r^{-1} , содержит поля, изменяющиеся пропорционально r^{-2} и r^{-3} . На достаточно малых расстояниях последние преобладают. Иногда их называют полями «ближней зоны». Если мы находимся в «ближней зоне» радиоантенны или атома, то пренебречь этими полями нельзя. На достаточно больших расстояниях r они становятся пренебрежимо малыми по сравнению с полем, пропорциональным r^{-1} , т. е. на достаточно больших расстояниях они не дают вклада в поток энергии. Однако в «ближней зоне» их вклад в вектор потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ существен. Вклад в \mathbf{S} , создаваемый полями «ближней зоны», дает поток энергии, который часть времени распространяется от источника, а часть времени — к источнику, т. е. примерно так же, как в стоячей волне. Таким образом, колеблющийся точечный заряд образует не чистую сферическую бегущую волну, а комбинацию как бегущих, так и стоячих волн, причем стоячие волны преобладают на малых расстояниях, а бегущие — на больших. На детектор, находящийся на большом расстоянии, будут действовать только бегущие волны, в то время как на близко

расположенный детектор действуют как стоячие, так и бегущие волны.

Определение телесного угла. Пусть dA — бесконечно малая площадка, расположенная в точке наблюдения \mathbf{r} и ориентированная перпендикулярно \mathbf{r} . Дифференциал телесного угла $d\Omega$, под которым площадка dA видна из начала координат, равен

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}. \quad (144)$$

Телесный угол измеряется в безразмерных единицах, называемых *стерадианами (стер)*. Рассмотрим сферу радиуса r с центром в начале координат. Поверхность этой сферы состоит из очень большого числа очень малых площадок dA , каждая из которых ориентирована перпендикулярно радиусу-вектору, проведенному из начала координат. Поэтому каждому элементу поверхности сферы соответствует свой телесный угол. Полный телесный угол, стягиваемый сферой, определяется как сумма (интеграл) всех элементарных телесных углов, стягиваемых всеми элементами поверхности сферы, т. е.

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{dA}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ стер}. \quad (145)$$

Приведем другой вывод равенства (145). В соответствии с (140) дифференциал телесного угла $d\Omega$ в сферических полярных координатах равен

$$d\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta \quad (146)$$

при положительных $d\varphi$ и $d\theta$ или

$$d\Omega = d\varphi d(\cos \theta) \quad (147)$$

при положительных $d\varphi$ и $d(\cos \theta)$. Угол φ изменяется от 0 до 2π , а угол θ — от нуля до π . Соответственно пределы изменения $\cos \theta$ равны -1 и $+1$. Полный телесный угол, стягиваемый любой замкнутой поверхностью, окружающей начало координат, равен

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) = (2\pi) \cdot 2 = 4\pi \text{ стер}. \quad (148)$$

Мощность, излучаемая в бесконечно малом телесном угле $d\Omega$. Мы можем использовать определение телесного угла и переписать уравнение (137) в более простой форме:

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^2(t') \sin^2 \theta(t') \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (149)$$

Излучение электрического диполя. Если движение заряда представляет собой гармоническое движение вдоль фиксированного направления $\hat{\mathbf{x}}$, то возникающее при этом излучение называется излучением электрического диполя. В этом случае имеем

$$\mathbf{x}(t') = x_0 \cos \omega t', \quad \mathbf{a}(t') = \hat{\mathbf{x}} \ddot{x}(t') = -\omega^2 \hat{\mathbf{x}} x(t'). \quad (150)$$

Мощность, излучаемая в телесном угле $d\Omega$, усредненная за один цикл колебаний, равна

$$\begin{aligned} dP(\mathbf{r}) &= \frac{q^2}{c^3} \langle \mathbf{a}^2(t') \rangle \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \\ &= \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (151)$$

Полное значение усредненной по времени за цикл колебаний мощности, излучаемой во всех направлениях, получается интегрированием по телесному углу. Поэтому мы просто заменим в уравнении (151) $d\Omega$ на 4π и $\sin^2 \theta$ на его среднее значение $2/3$. Получим

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle. \quad (152)$$

Естественная ширина линии, испускаемой атомом. Мы можем использовать уравнение (152) для получения простой классической оценки времени жизни свободно высвечивающегося возбужденного атома, излучение которого соответствует излучению электрического диполя. Нужно отметить, что результат, который мы получим, совпадет с экспериментально наблюдаемыми значениями, хотя мы и не используем в своих оценках квантовую теорию.

Рассмотрим простую классическую модель атома. Пусть атом состоит из электрона с зарядом $q = -e$ и массой m , который связан с тяжелым ядром «пружиной с коэффициентом жесткости $m\omega_0^2$ ». Если в момент времени $t = 0$ атому сообщается энергия возбуждения, он начинает колебаться, совершая слабо затухающее гармоническое движение с частотой ω_0 . (Мы пренебрегаем незначительным изменением частоты вследствие затухания, т. е. пользуемся величиной ω_0^2 вместо $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 1/4 \Gamma^2$.) Энергия атома равна

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (153)$$

Величина, $1/\tau$, обратная времени жизни, равна относительному уменьшению энергии в единицу времени:

$$\frac{1}{E} \left[-\frac{dE}{dt} \right] = \frac{1}{\tau}. \quad (154)$$

Энергия $E(t)$ равна

$$E(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t). \quad (155)$$

Мы можем пренебречь изменением $E(t)$ в течение одного цикла и заменить мгновенные величины в правой части уравнения (155) на средние во времени значения:

$$E(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle + \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle,$$

т. е.

$$E(t) = m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle. \quad (156)$$

Теперь предположим, что причиной затухания являются потери энергии на электромагнитное излучение, которое представля-

ет собой излучение электрического диполя. Излучаемая мощность определяется выражением (152):

$$-\frac{dE}{dt} = P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \langle x^2 \rangle. \quad (157)$$

Комбинируя уравнения (154), (156) и (157), мы получим *естественную ширину* (по частоте) линии для света, испускаемого атомом:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{P}{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_0^2}{m}. \quad (158)$$

Чтобы получить это выражение, мы использовали тот факт, что для затухающего осциллятора ширина полосы частот на уровне половины максимальной мощности равна величине, обратной среднему времени жизни. Уравнение (158) применимо к любому излучающему диполю, совершающему затухающие колебания, если затухание возникает из-за потерь на излучение. Положим, что атом испускает видимый свет с длиной волны $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, тогда $\nu_0 = c/\lambda_0 = 3 \cdot 10^{10}/5 \cdot 10^{-5} = 6 \cdot 10^{14} \text{ гц}$. Взяв для e и m значения $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q$ и $m = 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ г}$, мы получаем

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{c^3}{e^2} \frac{m}{\omega_0^2} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{(3 \cdot 10^{10})^3 (0,91 \cdot 10^{-27})}{(4,8 \cdot 10^{-10})^2 (2\pi)^2 (6 \cdot 10^{14})^2} \approx 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ сек.} \quad (159)$$

Важно помнить, что для свободно высвечивающегося атома, испускающего видимый свет, $\tau \sim 10^{-8} \text{ сек}$.

Рассмотрим еще один вопрос, ответ на который можно получить, зная излучение диполя.

Почему небо синее? Нас интересует зависимость интенсивности рассеянного отдельным атомом света от частоты. Оказывается, что синий свет рассеивается атомом гораздо сильнее красного. (Красный цвет Солнца на закате объясняется тем, что, когда свет проходит через большую толщу воздуха, синий цвет сильно поглощается и остается красный.) Вы можете проделать опыт, демонстрирующий этот эффект. Возьмите стеклянный шар или банку с водой и лампу. Добавьте в воду несколько капель молока и перемешайте. Направьте пучок света от лампы через воду так, чтобы видеть пучок либо в рассеянном на молекулах молока свете (наблюдение под углом), либо глядя прямо на пучок через воду. Обратите внимание на синюю окраску рассеянного света (при наблюдении под углом) и на красноватый оттенок при наблюдении источника света по прямой линии через банку. Добавляя капли молока в воду, вы будете наблюдать эффект постепенного сгущения «тумана».

Рассмотрим электрон в «классической молекуле молока», находящийся в установившемся состоянии колебаний под действием электрического поля бегущей электромагнитной волны, созданной источником света. Если пучок света от диполя направлен вдоль оси \hat{z} , то электрическое поле в бегущей волне имеет только x - и y -компоненты. Будем рассматривать только x -компоненту электрического

поля (y -компонента даст аналогичный результат). Далее, будем рассматривать данный «цвет», т. е. определенную фурье-компоненту белого света (т. е. одну частоту). (Заметим, что в белом свете, кроме электромагнитного излучения с частотами видимого света, присутствуют и частоты, которые мы не можем обнаружить глазом.) Электрическое поле $E_x(t)$ в месте нахождения молекулы молока равно

$$E_x = E_0 \cos \omega t. \quad (160)$$

Предположим, что связь электрона с ядром в молекуле молока определяется «пружиной с коэффициентом жесткости $m\omega_0^2$ ». Пренебрежем затуханием, т. е. будем считать, что частота внешнего воздействия ω далека от резонансной частоты ω_0 . Уравнение движения электрона имеет вид

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + qE_x. \quad (161)$$

В установившемся состоянии $x(t)$ является гармоническим колебанием с частотой ω . Поэтому $\ddot{x}(t)$ равно $-\omega^2 x(t)$. Тогда уравнение (161) дает

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x(t) &= -m\omega_0^2 x(t) + qE_x, \\ x(t) &= \frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (162)$$

Излучение $x(t)$, происходящее при гармоническом колебании заряда, представляет собой излучение диполя. Поэтому полная мощность излучения определяется равенством (152):

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \left[\frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle E_x^2(t) \rangle. \quad (163)$$

При изучении показателя преломления стекла, состоящего из «классических молекул стекла» (п. 4.3), мы нашли, что у такой молекулы собственная частота колебаний ω_0 велика по сравнению с частотами ω видимого света. Поэтому в уравнении (163) можно считать $\omega_0 \gg \omega$ (т. е. в знаменателе можем пренебречь единицей по сравнению с ω_0^2/ω^2). Тогда интенсивность рассеянного света будет пропорциональна четвертой степени частоты внешнего воздействия и ин обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:

$$P \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}. \quad (164)$$

Закон синего неба. Выражение (164) называется «рэлеевским законом синего неба». Отношение длины волны красного света ($\lambda = 6500 \text{ \AA}$) к длине волны синего света ($\lambda = 4500 \text{ \AA}$) равно $65/45 = 1,44$. Четвертая степень этого отношения равна 4,3. Таким образом, согласно (164) интенсивность рассеиваемого синего света примерно в четыре раза больше, чем интенсивность рассеиваемого красного света. Таково объяснение синего цвета неба.

Полное поперечное сечение рассеяния. Рассмотрим мысленный опыт: неподвижный бильярдный шар радиусом R лежит на пути широкого однородного пучка стальных шариков, движущихся

вдоль \hat{z} со скоростью v . Шарик, сталкивающийся с шаром, упруго рассеивается и выбывает из пучка. При таких столкновениях энергия, переносимая стальными шариками в направлении \hat{z} , рассеивается по другим направлениям. Полное число стальных шариков, рассеянных в единицу времени, равно произведению потока шариков (т. е. числа шариков на 1 см^2 сечения пучка за 1 сек) на *полное поперечное сечение* $\sigma = \pi R^2$ бильярдного шара:

$$\begin{aligned} \text{Число стальных шариков, рассеянных в } 1 \text{ сек} = \\ = \sigma \times (\text{поток стальных шариков}). \end{aligned} \quad (165)$$

Мы предполагаем, что рассеяние упругое, поэтому энергия рассеянного шарика равна энергии падающего. Умножив обе части (165) на энергию одного шарика, получим:

$$\begin{aligned} \text{Энергия, рассеянная в } 1 \text{ сек} = \\ = \sigma \times (\text{падающий поток энергии}). \end{aligned} \quad (166)$$

Выражение (166) можно распространить на случай упругого рассеяния света «классической молекулой» вещества, воспользовавшись им как определением полного поперечного сечения такой молекулы для этого процесса. С другой стороны, энергия, рассеянная в единицу времени, равна мощности, излучаемой электроном, находящимся под внешним воздействием, а падающий на электрон поток энергии представляет собой поток энергии электромагнитного излучения S_z . По аналогии с равенством (166) напомним следующее определение:

$$P = \sigma_{\text{рас}} \cdot \frac{c}{4\pi} \langle E_x^2(t) \rangle. \quad (167)$$

Сравнивая выражения (167) и (163), получим

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{4\pi}{c} \frac{P}{\langle E_x^2 \rangle} = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (168)$$

Уравнение (168) является более точным выражением результата (164), заключающегося в том, что для $\omega_0 \gg \omega$ рассеиваемая интенсивность пропорциональна ω^4 . Уравнение (168) дает частотную зависимость *полного поперечного сечения упругого рассеяния света атомом* (для классической модели). Величина e^2/mc^2 имеет размерность длины. (Так и должно быть, ибо $\sigma_{\text{рас}}$ имеет размерность площади, а отношение частот в (168) безразмерно.) По историческим причинам эта величина называется *классическим радиусом электрона* r_0 или *лоренцевским радиусом электрона*:

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{(0,91 \cdot 10^{-27})(3 \cdot 10^{10})^2} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (169)$$

Классическое томсоновское поперечное сечение рассеяния. Если «коэффициент жесткости» для упругой связи электрона с ядром равен нулю ($m\omega_0^2 = 0$), то электрон является свободным и $\omega_0 = 0$. В этом случае поперечное сечение упругого рассеяния света можно

получить из уравнения (168), положив $\omega_0 = 0$. Это сечение называется *классическим* или *томсоновским поперечным сечением рассеяния*:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = \frac{8}{3} (3,14) (2,82 \cdot 10^{-13})^2 = 0,67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (170)$$

Сечение порядка 10^{-24} см^2 может показаться небольшим. Однако в некоторых областях физики (ядерная физика, например) такое сечение кажется столь же большим, как ворота амбара. Поэтому оно получило название *барн**:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (171)$$

Поперечное сечение ядер обычно имеет порядок нескольких миллибарн (сокращенно *мбарн*). Величину томсоновского поперечного сечения [уравнение (170)] очень легко запомнить: она равна двум третям барна.

Задачи и домашние опыты

7.1. Докажите равенство (34) из п. 7.2. Оно служит основой представления волн в волноводе как суперпозиции «наклонных бегущих волн». Равенство показывает также, что трехмерные бегущие гармонические волны образуют «полный набор» функций для описания трехмерных волн. Конечно, трехмерные стоячие волны также образуют «полный набор».

7.2. а) Покажите, что для стекла с показателем преломления $n=1,52$ критический угол полного внутреннего отражения равен $41,2^\circ$.

б) Чему равен критический угол полного внутреннего отражения для воды с показателем преломления 1,33? Будет ли водяная призма, имеющая форму равнобедренного треугольника (см. рис. 7.3), менять направление светового луча на обратное без потерь (имеется в виду преломление в воздух)? Вначале предположите, что вода непосредственно соприкасается с воздухом, т. е. преломление луча света происходит на границе вода—воздух. Затем рассмотрите случай, когда грани призмы, заполненной водой, образованы предметными стеклами микроскопа.

7.3. Опыт. *Водяная призма обратного хода*. Сделайте водяную призму с помощью предметных стекол микроскопа, замазки или ленты скотча. Направьте луч света от фонаря на поверхность воды в призме и проверьте результаты, полученные в задаче 7.2.б.

7.4. Покажите, что стеклянная призма обратного хода (рис. 7.3) посылает луч света назад в направлении, противоположном падающему лучу, не только при нормальном падении.

7.5. Вычислите среднюю глубину проникновения (т. е. величину $\delta = \kappa^{-1}$) видимого света с длиной волны 5500 \AA в стеклянной призме обратного хода (рис. 7.3). (Мы имеем в виду проникновение в направлении, нормальном к задней поверхности стекло—воздух.) Считайте, что пучок падает нормально к поверхности, как показано на рисунке. Показатель преломления стекла равен 1,52.

О т в е т. $\delta = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

7.6. *Свет в вакууме*. Для света или микроволн в волноводе мы нашли, что если частота меньше граничной, то z -направление (вдоль волновода) «реактивно». Два других направления не будут реактивны. Возможно ли, в принципе, с помощью некоторых ухищрений сконструировать «волновод общего типа», в котором волны будут реактивны во всех трех направлениях x , y и z ?

7.7. *Волоконная оптика*. Луч света можно «пустить» по волноводам, сделанным из стеклянных волокон. Луч света остается в волокне, если падает на поверхность

*) Амбар, сарай — на английском языке barn.