

получить из уравнения (168), положив $\omega_0 = 0$. Это сечение называется *классическим* или *томсоновским поперечным сечением рассеяния*:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = \frac{8}{3} (3,14) (2,82 \cdot 10^{-13})^2 = 0,67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (170)$$

Сечение порядка 10^{-24} см^2 может показаться небольшим. Однако в некоторых областях физики (ядерная физика, например) такое сечение кажется столь же большим, как ворота амбара. Поэтому оно получило название *барн**:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (171)$$

Поперечное сечение ядер обычно имеет порядок нескольких миллибарн (сокращенно *мбарн*). Величину томсоновского поперечного сечения [уравнение (170)] очень легко запомнить: она равна двум третям барна.

Задачи и домашние опыты

7.1. Докажите равенство (34) из п. 7.2. Оно служит основой представления волн в волноводе как суперпозиции «наклонных бегущих волн». Равенство показывает также, что трехмерные бегущие гармонические волны образуют «полный набор» функций для описания трехмерных волн. Конечно, трехмерные стоячие волны также образуют «полный набор».

7.2. а) Покажите, что для стекла с показателем преломления $n=1,52$ критический угол полного внутреннего отражения равен $41,2^\circ$.

б) Чему равен критический угол полного внутреннего отражения для воды с показателем преломления 1,33? Будет ли водяная призма, имеющая форму равнобедренного треугольника (см. рис. 7.3), менять направление светового луча на обратное без потерь (имеется в виду преломление в воздух)? Вначале предположите, что вода непосредственно соприкасается с воздухом, т. е. преломление луча света происходит на границе вода—воздух. Затем рассмотрите случай, когда грани призмы, заполненной водой, образованы предметными стеклами микроскопа.

7.3. Опыт. *Водяная призма обратного хода*. Сделайте водяную призму с помощью предметных стекол микроскопа, замазки или ленты скотча. Направьте луч света от фонаря на поверхность воды в призме и проверьте результаты, полученные в задаче 7.2.б.

7.4. Покажите, что стеклянная призма обратного хода (рис. 7.3) посылает луч света назад в направлении, противоположном падающему лучу, не только при нормальном падении.

7.5. Вычислите среднюю глубину проникновения (т. е. величину $\delta = \kappa^{-1}$) видимого света с длиной волны 5500 \AA в стеклянной призме обратного хода (рис. 7.3). (Мы имеем в виду проникновение в направлении, нормальном к задней поверхности стекло—воздух.) Считайте, что пучок падает нормально к поверхности, как показано на рисунке. Показатель преломления стекла равен 1,52.

О т в е т. $\delta = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

7.6. *Свет в вакууме*. Для света или микроволн в волноводе мы нашли, что если частота меньше граничной, то z -направление (вдоль волновода) «реактивно». Два других направления не будут реактивны. Возможно ли, в принципе, с помощью некоторых ухищрений сконструировать «волновод общего типа», в котором волны будут реактивны во всех трех направлениях x , y и z ?

7.7. *Волоконная оптика*. Луч света можно «пустить» по волноводам, сделанным из стеклянных волокон. Луч света остается в волокне, если падает на поверхность

*) Амбар, сарай — на английском языке barn.

стекло — воздух под углом, большим критического. Если диаметр волокна очень мал, то волокно становится волноводом, в котором частота света меньше граничной. Предположим, что волокно имеет прямоугольное сечение. Оцените минимальную длину одной стороны прямоугольника, при которой волокно будет дисперсивной средой, т. е. по нему будут распространяться бегущие волны видимого света.

О т в е т. Длина стороны $> 1,7 \cdot 10^{-5}$ см для $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.

7.8. *Критический угол при отражении от ионосферы.* Пусть слева от плоскости $z=0$ (рис. 7.4) находится вакуум, а справа — плазма. Мы, таким образом, имеем идеализированную модель однородной ионосферы с резкой границей. Покажите, что для каждого угла падения θ_1 имеется граничная частота $\omega_{гр}$, зависящая от θ_1 (т. е. найдите зависимость $\omega_{гр}$ от θ_1), и при нормальном падении эта частота равна частоте колебаний плазмы ω_p . Покажите, что для любой частоты ω , большей частоты колебаний плазмы ω_p , существует критический угол полного отражения; при углах, больших критического, волны в ионосфере экспоненциальны. В качестве примера возьмите частоту колебаний плазмы $\nu_p = 25 \text{ МГц}$ и найдите критический угол для микроволн с частотой $\nu = 100 \text{ МГц}$.

О т в е т. Для фиксированного θ_1 , $\omega_{гр} = \omega_p / \cos \theta_1$. Для фиксированной частоты ω , большей ω_p , $\cos \theta_{гр} = \omega_p / \omega$.

7.9. *Опыт. Каким видят надводный мир рыбы?* Этот опыт можно сделать либо в тихом пруду, либо в плавательном бассейне. В бассейне вы должны быть одним из первых, чтобы иметь гладкую поверхность воды. Наденьте маску для подводного плавания, нырните, перевернитесь на спину и посмотрите вверх. Попытайтесь предсказать, что вы увидите.

7.10. *Зависимость фазовой скорости волн в воде от глубины.* Предположим, что вы наполнили водой прямоугольный аквариум (или выкрашенную изнутри картонную коробку, или что-либо подобное) длиной (по x) 25 см и возбуждаете самую низкую синусоидальную моду (рис. 7.5).

а) Чему равна фазовая скорость (в см/сек) волн в глубокой воде? (Напомним, что фазовую скорость можно определить и для стоячих волн.)

б) Постройте график зависимости фазовой скорости (в см/сек) от глубины воды h (в см) для данной моды и данного аквариума, используя точное дисперсионное соотношение (72) из п. 7.3 для волн малой амплитуды. Покажите на графике «глубоководный предел». На том же графике построьте зависимость фазовой скорости от глубины для волн в мелкой воде, рисуя эту зависимость так, как если бы она была справедлива для всех h , независимо от длины волны. В результате ваш точный график покажет «переход» между фазовыми скоростями для волн в глубокой и мелкой воде.

7.11. *Опыт. Закон дисперсии для волн в воде.* Возьмите прямоугольный сосуд, размер которого по оси x лежит в пределах 20—60 см. Высота сосуда должна быть не меньше $2/3$ длины (чтобы можно было достичь глубоководного предела). Лучше всего использовать аквариум. Самым дешевым сосудом может быть картонная коробка (например, коробка из-под ботинок, шляпы или из-под продуктов), внутренняя поверхность которой покрыта водостойким клеем или краской. Однако в этом случае вследствие изгибания картонных стенок существует затухание, которое уменьшает время жизни мод. Поэтому для опыта лучше использовать стеклянный (или другой жесткий) сосуд. Аквариум удобен также и потому, что через его прозрачные стенки можно наблюдать за колебаниями воды.

а) *Самая низкая мода.* Этот случай показан на рис. 7.5. Вычислите величины λ и δ этой моды. Постройте теоретический график зависимости фазовой скорости $v_\phi = \lambda \nu$ (для этой моды и для данного сосуда) от глубины воды h (см. задачу 7.10). (Используйте точный закон дисперсии (72) из п. 7.3.) Теперь при некотором произвольном уровне h воды в сосуде добавьте немного кофейной гущи, чтобы можно было наблюдать смещение по всей толще воды. Толкая (не очень сильно) сосуд вперед и назад, возбудите самую низкую моду и измерьте частоту колебаний. (Для этой цели можно использовать обычные часы.) Получите экспериментальные значения скорости v_ϕ и отложите его на теоретическом графике для фазовой скорости. Повторите опыт для различных значений h . Вы должны иметь, по крайней мере, одну «мелководную» и одну «глубоководную» экспериментальные точки и одну точку в переходной области, где $h \approx \delta$.

б) Следующая более высокая мода. В картонном аквариуме можно возбудить моду с пучностью в центре аквариума (координата $x=0$, рис. 7.5) и длиной волны, равной длине аквариума. Как возбудить такую моду? Если стенки аквариума твердые, ее возбудить нельзя (во всяком случае это нелегко сделать). Почему? В этом случае следующая легко возбуждаемая мода имеет длину волны $\lambda = \frac{2}{3}L$ и узел в точке $x=0$ (рис. 7.5). Вычислите δ для данного аквариума и этой моды. Вычислите ожидаемую частоту. Теперь попробуйте потрясти аквариум с такой частотой и возбудить эту моду. Измерьте частоту свободных колебаний для этой моды.

в) Неустановившиеся биения. Для этого опыта нужен метроном. Если его нет, воспользуйтесь маятником, гиря которого в одном из крайних положений ударяет по листку бумаги. Теперь плавно качайте аквариум в такт с метрономом. Изменяйте небольшими порциями длину маятника (или частоту метронома) так, чтобы пройти через резонансную частоту для второй моды в случае б). Вы будете наблюдать неустановившиеся биения, происходящие с частотой, лежащей между частотой вынуждающей силы и собственной частотой колебаний. Вы убедитесь в этом, достигнув резонансной частоты. (В этом опыте вы сможете также наблюдать много явлений, необъяснимых в рамках теории малых колебаний.) Постарайтесь оценить ширину резонанса $\Delta\omega$. Это можно сделать, грубо измерив среднее время затухания моды и воспользовавшись знаменитым соотношением между полосой частот и временем затухания:

$$\Delta\nu \Delta t \approx 1.$$

7.12. Выведите классическое волновое уравнение для **B**, как предлагается в пояснении к уравнению (796), п.7.4.

7.13. Давление излучения от Солнца. Солнечная постоянная (вне земной атмосферы) равна $1,94 \text{ кал на } 1 \text{ см}^2 \text{ в } 1 \text{ мин}$ [или $1,35 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{сек})$]. Вычислите (в $\text{дин}/\text{см}^2$) давление излучения на Земле (при нормальном падении) в двух случаях — а) и б). Сравните результат с давлением атмосферы на уровне моря.

а) Земля «черная» и поглощает весь свет.

б) Земля — идеальное зеркало, которое отражает весь свет.

О т в е т. а) Около $5 \cdot 10^{-11} \text{ атм}$ ($1 \text{ атм} \approx 10^6 \text{ дин}/\text{см}^2$).

7.14. Давление излучения. (Предварительно решите задачу 7.13.) Давление излучения Солнца на Землю приводит к появлению эффективной отталкивающей силы между Солнцем и Землей.

а) Покажите, что эта сила удовлетворяет «закону обратного квадрата расстояния». Так, если бы расстояние от Земли до Солнца было в два раза больше, то сила вследствие давления излучения стала бы в четыре раза меньше. Такая зависимость от расстояния характерна и для гравитационной силы.

б) Вспомните закон Кеплера. Покажите, что для круговых орбит он может быть записан в виде $\omega^2 R^3 = MG$, где ω — угловая частота обращения планеты вокруг Солнца, R — расстояние от Солнца до планеты, M — масса Солнца и G — гравитационная постоянная.

в) Покажите, что для сферического черного предмета с плотностью массы ρ и радиусом r , движущегося по круговой орбите вокруг Солнца, закон Кеплера имеет вид $\omega^2 R^3 = MG - [P/(4\pi c)] [3/(4\rho r)]$, где P — полная электромагнитная выходящая мощность Солнца.

г) Зная солнечную постоянную (задача 7.13) и расстояние от Земли до Солнца (149 млн. км), вычислите P (в $\text{эрг}/\text{сек}$).

д) Рассмотрим «пылинку» с плотностью массы $1 \text{ г}/\text{см}^3$, движущуюся по круговой орбите вокруг Солнца. Для какого значения радиуса r сила, возникающая от давления излучения, равна силе гравитационного притяжения? Что случится с такими (и с более мелкими) «пылинками»?

е) Рассмотрим «комету», состоящую из небольших сферических частиц пыли или льда или еще каких-либо частиц, имеющих одинаковую плотность и диаметр. Будет ли такая «комета» менять свою форму, проходя мимо Солнца? (Мы имеем в виду не круговые, а эллиптические орбиты.)

ж) Известно, что длинный хвост у кометы возникает в основном вследствие давления излучения Солнца. Рассмотрим комету (облако пылевых частиц), движущуюся по круговой равновесной орбите. Комета имеет угловую частоту (часто-

ту обращения вокруг Солнца), одинаковую для всех частиц, однако радиусы равновесных орбит не одинаковы для всех частиц. Комета простирается от R_1 до R_2 , где R_1 — ближайший радиус, а R_2 — самый далекий. Предположим, что вы можете измерить R_1 и R_2 (например, наблюдая за кометой в телескоп). Покажите, как можно использовать эту и другую легко добываемую информацию для определения распределения частиц с различными радиусами r в комете. Считаем, что все частицы «черные» и имеют плотность воды. Конечно, все это еще не доказывает, что давление излучения дает больший вклад в силу, действующую на частицы пыли и хвосты комет, чем, например, «солнечный ветер», состоящий из протонов, испущенных Солнцем.

7.15. Плавание в солнечных лучах. Вы хотите изобрести солнечный парус, который мог бы «парить» в космосе, где гравитационная сила притяжения к Солнцу точно уравновешивалась бы давлением солнечного излучения. Предположим, что парус сделан из алюминизированного пластика. Пусть средняя плотность вещества паруса равна 2,0. (Плотность алюминия $2,7 \text{ г/см}^3$; плотность пластика около 1.) Парус не несет никакой полезной нагрузки — он должен поддерживать лишь свой собственный вес. Далее считаем, что солнечный свет полностью отражается от паруса. Покажите, что для того, чтобы парус «парил», оставаясь в покое (в инерциальной системе координат), его толщина d должна быть равна

$$\rho d = \frac{2P/4\pi c}{MG}$$

(все обозначения из задачи 7.14). Покажите (задача 7.14), что $P=3,8 \cdot 10^{33} \text{ эрг/сек}$. Покажите (используя закон Кеплера для Земли; радиус обращения вокруг Солнца $R=149 \text{ млн. км}$, и v равно одной единице за год), что $MG=1,3 \cdot 10^{26} \text{ см}^3/\text{сек}^2$. Покажите, что для $\rho=2$ необходимая толщина d должна равняться 10^{-4} см , т. е. 1 мкм, что в 10 или даже в 100 раз меньше величины, которую хотелось бы иметь. Хотелось бы также, чтобы парус мог нести какую-либо полезную нагрузку. По-видимому, чтобы не упасть на Солнце, парус должен двигаться по орбите вокруг Солнца. Покажите, что результат этой задачи дает размеры «блестящей кубической частицы пыли» плотностью 2,0, которая будет «парить» над Солнцем, если одной стороной она ориентирована по направлению к Солнцу.

7.16. Излучение от точечного источника. Используйте интегрирование по поверхности «коробочки» для получения уравнения (125), п. 7.5, которое имеет вид

$$E_{\perp}/E_{\parallel} = v_{\perp} t/c \Delta t.$$

См. рассуждения, следующие за уравнением (127), п. 7.5.

7.17. Электрическое дипольное излучение, образованное радиоантенной. Рассмотрим радиопередатчик и антенну, показанные на рисунке. Будем считать, что ток I постоянен по всей длине l антенны. Провода, идущие от генератора к антенне, находятся очень близко друг к другу или же скручены, так что излучением от подводящих проводов по сравнению с излучением антенны можно пренебречь. Маленькие шарики на концах антенны служат емкостью для накопления зарядов от тока I . Эти шарики могут и отсутствовать — заряд накапливается на концах проводников, что приводит к нарушению однородности тока, — однако мы можем этим пренебречь. Длина антенны l очень мала по сравнению с длиной волны λ электромагнитного излучения.

а) Покажите, что в удаленной точке поле излучения равно

$$E_{\text{изл}}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\ddot{\mathbf{I}}_{\perp}(t')}{rc^2}, \quad t' = t - \frac{r}{c}.$$

Здесь \mathbf{I} — вектор тока в антенне, а \mathbf{I}_{\perp} — проекция \mathbf{I} на направление, перпендикулярное направлению радиуса \mathbf{r} , проведенного от антенны к точке наблюдения. [У к а з а н и е. Чтобы получить эту формулу, рассмотрите «эквивалентный

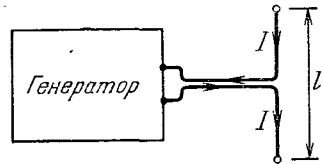


Рис. к задаче 7.17.

точечный заряд q , движущийся с эквивалентной скоростью $v(t')$, поле излучения которого равно полю от тока I .]

б) Покажите, что для волнового числа k характеристический импеданс (т. е. активная нагрузка, которую «чувствует» генератор) равен $Z = (kl)^2 \cdot 20 \text{ ом}$. (Мы воспользовались равенством c^{-1} ед. СГСЭ = 30 ом.)

7.18. Опыт. *Рассеяние света молекулами молока.* Налейте в стеклянный сосуд воду и направьте сбоку на сосуд луч света от карманного фонаря. Посмотрите на свет, рассеянный под углом 90° , и на фонарь через сосуд с водой. Разместите в воде несколько капель молока и продолжайте смотреть, постепенно добавляя молоко. Обратите внимание на голубой оттенок рассеянного света и на желтоватый или красноватый оттенок проходящего света. Объясните это явление. Если добавить в воду слишком много молока, то голубой оттенок рассеянного света исчезнет. Рассеянный свет будет выглядеть беловатым, как туман или смог. Однако «закат» будет становиться все более и более красным. Объясните это. В конце концов вода в сосуде станет настолько мутной, что вы не сможете увидеть через нее лампочку фонаря, рассеянный свет станет белым, и вы перестанете видеть пучок света. «Воздух» превратился в «белое облако». Объясните это. Посмотрите на рассеянный свет через поляриод. (Мы объясним это явление в главе 8.)

7.19. *Излучение от тонкого заряженного слоя.* Предположим, что в плоскости xy ($z=0$) находится очень тонкий слой положительных зарядов с однородной плотностью σ . Все заряды колеблются вдоль направления оси x с одинаковой амплитудой и частотой.

а) Используя теорему Гаусса, покажите, что для положительных z поле $E_z(z, t) = 2\pi\sigma$ независимо от того, колеблются или покоятся заряды. (Этот случай соответствует растянутой пружине в приближении «пружины», когда z -компонента натяжения постоянна, независимо от совершаемого движения.)

б) Сделав чертеж силовых линий, покажите, что поле излучения удовлетворяет соотношению

$$\frac{E_x(z, t)}{E_z(z, t)} = -\frac{\dot{x}(t')}{c},$$

где $\dot{x}(t')$ — скорость каждого заряда в момент времени $t' = t - (z/c)$, t — текущее время. Таким образом, поле излучения для положительных z равно

$$E_x(z, t) = -2\pi\sigma \frac{\dot{x}(t')}{c}.$$

(Вместо чертежа вы можете использовать соображения, связанные с теоремой Гаусса для замкнутого объема.) Заметьте, что в противоположность излучению от одного точечного заряда, когда поле излучения пропорционально запаздывающему ускорению, здесь оно пропорционально (запаздывающей) скорости. Дайте качественное объяснение тому, «что произошло». (У к а з а н и е. Рассмотрите вклады от отдельных точечных зарядов, распределенных по плоскости.)

7.20. *Излучение от тонкого заряженного слоя.* Получите результат задачи 7.19, сложив (принтегрировав) вклады от всех точечных зарядов в плоскости. Чтобы получить сходящийся интеграл, предположите, что слой имеет не нулевую, а конечную толщину d (гораздо меньшую длины волны λ). Естественно предположить, что слой поглощает или рассеивает излучение. Пусть длина проникновения амплитуды равна κ . Покажите, что экспоненциальный коэффициент ослабления (э. к. о.) равен

$$\text{э.к.о.} = e^{-\alpha r}, \quad \alpha = \frac{\kappa d}{z},$$

где r — расстояние от точечного заряда до точки наблюдения, находящейся на расстоянии z от слоя, в точке с координатами $x=y=0$. Рассмотрите фазу $\varphi = kr - \omega t$ (k — волновое число). Обратите внимание на то, что $\varphi=0$ для точечного заряда с координатами $x=y=z=0$; таким образом, это — ближайший заряд к точке наблюдения, расположенной на оси z . Покажите, что если $x(t')$ определяется вещественной частью выражения

$$x(t') = x_0 e^{i\omega t'},$$

то вклад в E_x от заряженного плоского кольца радиусом ρ и шириной $d\rho$ может быть записан в виде

$$dE_x = 2\pi k x_0 e^{i(\omega t - kz)} e^{-i\varphi} e^{-\beta\varphi} d\varphi,$$

где

$$\beta = \frac{\alpha}{k} = \frac{\kappa d}{kz}.$$

Мы пренебрегаем необходимостью пользоваться проекцией ускорения. (Для малых φ коэффициент, возникающий из-за проекции, близок к 1 и медленно уменьшается с увеличением φ . Мы предполагаем, что он может быть учтен нашим коэффициентом ослабления $e^{-\beta\varphi}$. Этот «трюк» возможен, потому что в пределе мы можем взять $\beta=0$ и найти ответ, не зависящий от β . Величина $e^{-\beta\varphi}$ называется коэффициентом сходимости. Он необходим для получения конечного результата, однако, какое именно значение β используется, не так уж важно, поскольку β мало по сравнению с единицей.) Покажите, что E_x равно вещественной части интеграла от dE_x от $\varphi=0$ до $\varphi=\infty$. Покажите, что

$$\int_0^{\infty} e^{-i\varphi} e^{-\beta\varphi} d\varphi = \frac{1}{i+\beta} \approx -i \quad \text{для } \beta \ll 1.$$

Наконец, рассмотрите вещественную часть и покажите, что вы получили тот же результат, что и в задаче 7.19. Таким образом, теперь можно объяснить физическую природу «90-градусного фазового сдвига», в результате которого суммарное поле отстает на 90° по сравнению с вкладом от ближайшего заряда с координатами $x=y=z=0$. «Средний» заряд находится как бы на $1/4$ длины волны дальше от точки наблюдения, чем самый близкий заряд с координатами $x=y=z=0$.

7.21. Приближенное выражение для показателя преломления. Рассмотрим плоскую волну, падающую на тонкий заряженный слой. Заряды находятся в плоскости xy ($z=0$). Толщина плоскости равна Δz . Плотность зарядов равна N (число зарядов в 1 см^3). Величина заряда q , его масса m , и он связан упругой силой, причем коэффициент жесткости равен $m\omega_0^2$. На каждый заряд действует, во-первых, эта упругая сила и, во-вторых, сила от падающей на заряженный слой плоской волны. Мы пренебрегаем вкладами в результирующую силу других зарядов (т. е. пренебрегаем поляризацией среды). Пусть электрическое поле (в $z=0$) равно вещественной части $E_0 \exp i\omega t$. Найдите поле, излучаемое слоем зарядов. Образуйте суперпозицию этого и первичного полей. Покажите, что суммарное поле в $z=0$ (с учетом сделанных предположений) определяется реальной частью выражения

$$E_{\text{сум}} = E_0 e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{i\omega 2\pi N q^2 \Delta z}{mc (\omega_0^2 - \omega^2)} \right\}.$$

Покажите, что если толщина слоя зарядов Δz , а показатель преломления n , то поле на выходной плоскости слоя будет сдвинуто по фазе относительно поля на входной плоскости на величину, соответствующую времени задержки t_0 , т. е. вместо поля $E_0 \exp i\omega t$ на выходе слоя ($z=0$) будет поле $E_0 \exp [i\omega(t-t_0)]$, где

$$\omega t_0 = \frac{\Delta z}{\lambda} 2\pi (n-1) = k \Delta z (n-1).$$

Покажите, что для $\omega t_0 \ll 1$ это дает

$$n-1 = \frac{2\pi N q^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Покажите, что этот же результат более точно был выведен в п. 4.3 (для n , близких к единице).

7.22. Момент импульса поляризованной по кругу плоской бегущей волны. Выведем знаменитое соотношение $J=W/\omega$. Положим, что плоская волна образуется слоем зарядов, в котором все заряды движутся по одинаковому окружностям. Предположим, что каждый заряд движется без трения по окружности трубки радиуса r . По мере потери энергии скорость движения зарядов уменьшается. Таким обра-

зом, вследствие потерь на излучение уменьшается их угловая скорость ω , их энергия и их момент импульса. (Пусть всегда справедливо неравенство $v \ll c$.) Покажите, что потеря момента импульса у зарядов, движущихся по кругу, равна ω^{-1} , умноженной на потерю энергии. (Что и требуется доказать.)

7.23. Чему равны средний во времени поток энергии, плотность энергии и импульс на единицу объема в однородном монохроматическом световом пучке интенсивностью в 100 вт/см^2 ?

7.24. Электрон совершает гармоническое движение с амплитудой 10^{-8} см и частотой 10^{14} гц . Чему равна средняя излучаемая мощность?

О т в е т. Приблизительно $\frac{1}{3} \cdot 10^{-10} \text{ эрг/сек}$.

7.25. Когда вещество может поглощать световую энергию, не поглощая импульс? Может ли оно поглощать импульс, если поглощение энергии пренебрежимо мало? Возможно ли поглощение момента импульса при пренебрежимо малом поглощении энергии?

7.26. Вообразим, что у нас есть сверхпроводящий генератор и антенна, испускающая микроволновое излучение с длиной волны 100 см . В момент $t=0$ мы убирем источник питания, и потери энергии через излучение больше не восполняются. В цепи нигде нет обычных сопротивлений. Найдите среднее время затухания гармонических колебаний электронов в антенне. Используйте результаты задачи 7.17.

О т в е т. Пусть L — индуктивность LC -цепи осциллятора, т. е. цепи, которая определяет частоту колебаний. Пусть l — длина антенны ($l \ll \lambda$); тогда

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{l^2 \omega^3}{L c^3}.$$

Этот результат можно сравнить с выражением для величины, обратной времени затухания колебаний заряда e с массой m :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{m c^3}.$$

7.27. Радиостанция мощностью в 50 вт , удаленная от нас на 15 км , излучает вертикально поляризованные радиоволны. Чему равно максимальное мгновенное значение напряжения, воздействующего на электрон в приемной радиантенне, если она ориентирована вертикально и ее длина равна 20 см ? Отражением от земли, зданий и т. д. можно пренебречь.

7.28. Источник света Смита — Парселла. Узкий пучок электронов с кинетической энергией 300 кэв распространяется параллельно (т. е. при угле падения, близком к 90°) поверхности металлической дифракционной решетки. Расстояние между соседними царапинами решетки $d=1,67 \text{ мкм}$. Пучок распространяется перпендикулярно царапинам. Наведенный на поверхности решетки заряд, который движется за электронным пучком, претерпевает неожиданное отклонение всякий раз, когда встречает на своем пути царапину. (Наведенный заряд движется по поверхности решетки.) Таким образом, когда электрон проходит мимо царапины на пластине, то царапина служит источником излучения. Предположим, что положение наблюдателя определяется углом θ относительно электронного пучка; при $\theta=0$ наблюдатель смотрит в направлении пучка.

а) Покажите, что наблюдатель регистрирует импульсы излучения, приходящие с периодом $T=(d/v)-d(\cos \theta)/c$; покажите, что длина волны равна $d(\beta^{-1}-\cos \theta)$.

б) Считаете ли вы, что при данном угле θ будет наблюдаться только эта длина волны? (Подумайте о фурье-анализе излучаемых с периодом T импульсов.)

в) Сделайте численный расчет для электронов с энергией 300 кэв и угла наблюдения $\theta=15^\circ$. Какие цвета вы ожидаете увидеть?

г) Будет ли свет поляризован?

В журнале «Phys. Rev.» [92, 1069 (1953)] вы можете ознакомиться с красивым опытом Смита и Парселла (автором II тома Б. К. Ф.)

7.29. Форма стоячих волн в воде. В тексте мы полагали (интуитивно), что если вертикальное смещение в стоячей волне зависит от x , как $\sin kx$, то горизонтальное смещение должно определяться зависимостью $\cos kx$.

а) Получим этот результат алгебраически. Положим

$$\begin{aligned}\psi_y &= \cos \omega t \sin kx f(y), \\ \psi_x &= \cos \omega t [\cos kx g(y) + \sin kx h(y)].\end{aligned}$$

Покажите, что $h(y)$ должно равняться нулю.

б) Покажите, что результаты, полученные для движения капли воды в стоячей волне, соответствуют гармоническому движению вперед и назад вдоль прямой линии.

7.30. Предположим, что распространяющиеся в океане бегущие волны имеют амплитуду 3 м и длину волны 10 м. На каком расстоянии от поверхности воды вы должны плыть, чтобы амплитуда вашего движения была равна 15 см?

О т в е т. Около 5 м.

7.31. Форма бегущих волн в воде. Предположим, что ψ_y имеет вид

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx) f(y),$$

где $f(y)$ — неизвестная функция координаты y . Далее, предположим, что вода несжимаема и не имеет пузырьков. Покажите, что ψ_y и ψ_z определяются уравнениями (75) и (76) из п.7.3.

7.32. Закон дисперсии для волн в воде [уравнение (72), п.7.3] был получен при рассмотрении стоячих волн. Как выглядит закон дисперсии для бегущих волн?

7.33. Закон дисперсии для волн поверхностного натяжения. Поверхность воды ведет себя как растянутая мембрана. В равновесии натяжение по оси x определяется коэффициентом поверхностного натяжения $T=72$ дин/см, умноженным на длину L вдоль «неинтересного» z -направления (см. рис. 7.5 и 7.6). Если поверхность выпуклая, то вследствие поверхностного натяжения возникает давление, направленное вниз. Покажите, что для синусоидальной волны давление, направленное вниз, равно

$$p = Tk^2\psi_y.$$

Покажите, что вес воды создает постоянное давление (давление при равновесии) и дополнительное давление

$$p = \rho g\psi_y.$$

Покажите, что вклад поверхностного натяжения в величину возвращающей силы, отнесенной к единице массы и единице смещения (т. е. в величину ω^2), может быть получен из гравитационной возвращающей силы заменой ρg на Tk^2 . Этим вы докажете, что в общем случае закон дисперсии имеет вид

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho} k^3 \right) \left[\frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}} \right].$$

7.34. Плоские электромагнитные волны. Покажите, что для электромагнитных плоских волн в вакууме уравнения Максвелла, которые связывают E_y и B_x , «эквивалентны» уравнениям Максвелла, связывающим E_x и B_y , в том смысле, что один набор уравнений может быть получен из другого путем простого поворота системы координат относительно оси z (т. е. оси распространения) на 90° . Покажите на чертеже ориентацию векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} и осей x , y .

7.35. Стоячие электромагнитные волны в вакууме. Покажите, что если $E_x(z, t)$ — стоячая волна вида $E_x = A \cos \omega t \cos kz$, то $B_y(z, t)$ имеет форму стоячей волны $A \sin \omega t \sin kz$.

7.36. Выражения для энергии электромагнитных стоячих волн. Предположим, что форма стоячих волн определяется уравнениями задачи 7.35. Найдите плотности электрической и магнитной энергий, а также вектор Пойнтинга как функции пространства и времени. Рассмотрите область длиной в $1/4\lambda$, простирающуюся от узла до пучности E_x . Постройте график E_x и B_y относительно z для этой области в моменты времени $t=0$, $T/8$ и $T/4$. Для этой же области и этих же времен построите график плотности электрической и магнитной энергий, а также график плотности полной энергии. Определите направление и величину вектора Пойнтинга S_z для этих моментов времени.

7.37. Связанные линейные дифференциальные уравнения первого порядка для волн в струне. Рассмотрим непрерывную однородную струну с линейной плотностью ρ_0 и равновесным натяжением T_0 . В такой струне могут распространяться недиспергирующие волны со скоростью $v = \sqrt{T_0/\rho_0}$. Введем следующие функции $F_1(z, t)$ и $F_2(z, t)$:

$$F_1(z, t) \equiv -\frac{T_0}{v} \frac{\partial \psi_x}{\partial z}, \quad F_2(z, t) \equiv \rho_0 \frac{\partial \psi_x}{\partial t}.$$

Таким образом, F_1 равно произведению $1/v$ на поперечную возвращающую силу, приложенную к струне справа от z со стороны струны слева от z , и F_2 равно поперечному импульсу, приходящемуся на единицу длины. Покажите, что F_1 и F_2 удовлетворяют связанным уравнениям первого порядка

$$\frac{1}{v} \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Покажите, что одно из этих уравнений «тривиально», т. е. представляет собой тождество. Покажите, что второе уравнение эквивалентно второму закону Ньютона. Обратите внимание на то, что эти уравнения похожи по форме на два уравнения Максвелла, связывающие E_x и B_y , если E_x заменить на F_1 , а B_y на F_2 . Аналогично, одно из этих двух уравнений Максвелла может рассматриваться как «тривиальное тождество», если известна специальная теория относительности.

7.38. Найдите такие волновые величины $F_1(z, t)$ и $F_2(z, t)$ для продольных волн в струне с грузами, чтобы они удовлетворяли связанным уравнениям первого порядка такого же вида, как в задаче 7.37. Сделайте то же для звуковых волн и для электромагнитных волн в передающей линии. (В последнем случае связанные уравнения не будут просто похожи по форме на уравнения Максвелла. Это будут уравнения Максвелла, записанные через ток и напряжение вместо полей E_x и B_y .)

7.39. Покажите (прямым интегрированием), что значение $\sin^2 \theta$, усредненное по всем направлениям, равно $2/3$. Здесь θ — угол между данным направлением и фиксированной «полярной» осью. При интегрировании используйте сферические полярные координаты.

7.40. Миражи на автостраде. Управляя автомобилем в жаркий летний день, можно наблюдать, как далеко впереди появляются водоемы, отражающие небо, или фары приближающейся машины. Когда вы подъедете ближе, отражения неожиданно пропадут, как только угол отражения (измеренный от поверхности шоссе) станет больше некоторого критического угла. Эти отражения, или «миражи», связаны с *полным внутренним отражением* света, падающего из холодного воздуха (более плотная среда) в более теплый воздух около поверхности шоссе. Более теплый воздух имеет меньшую плотность и меньший показатель преломления. (Напомним, что разность $n^2 - 1$ пропорциональна плотности воздуха.) Предположим, что температура воздуха у покрытия автострады на величину ΔT больше температуры на расстоянии нескольких дюймов от покрытия. Допустим, что температура изменяется скачком. Пусть температура холодного воздуха равна 300°K , а скачок температуры ΔT около покрытия равен 10°C . Показатель преломления воздуха $n = 1,0003$. Пусть ϕ — критический угол при полном внутреннем отражении, измеренный от покрытия, т. е. ϕ равно 90° минус угол падения, измеренный относительно нормали к покрытию. Считая $n - 1 \ll 1$, получите формулу $\phi \approx [2(n - 1)\Delta T/T]^{1/2}$ для $\phi \ll 1$. Если ваши глаза находятся на 120 см выше мостовой, то на каком расстоянии вам покажется ближайший край «водоема с водой»?

7.41. Волновод. Внутренние размеры прямоугольного волновода равны $5 \times 10 \text{ см}^2$.

а) Какова самая низкая частота (в *МГц*) электромагнитной волны, которая будет распространяться в волноводе без ослабления?

б) Покажите на графике направление и изменение электрического поля в этой волне в разных точках волновода.

в) Найдите фазовую и групповую скорости (выраженные в долях c) для волны с частотой, равной $3/4$ самой низкой частоты волны, распространяющейся без ослабления.

г) Найдите среднюю глубину проникновения для волны с частотой, равной $\frac{1}{5}$ самой низкой частоты волны, распространяющейся без ослабления.

7.42. Коэффициент отражения для электрического поля. Погонная индуктивность в передающей линии аналогична погонной массе для растянутой пружины, а обратная погонная емкость аналогична натяжению струны. Известно, что $C = \epsilon C_{\text{вак}}$ и $L = \mu L_{\text{вак}}$ и что фазовая скорость в вакууме равна c .

а) По аналогии с пружиной покажите, что показатель преломления n равен $(\epsilon\mu)^{1/2}$ и что характеристический импеданс Z равен произведению его значения в передающей вакуумной линии на $(\mu/\epsilon)^{1/2}$. Покажите, что коэффициент отражения для электрического поля при переходе из вакуума в среду равен $R = [1 - (n/\mu)]/[1 + (n/\mu)]$. Он совпадает с коэффициентом отражения для электрического поля в плоской волне, нормально падающей из вакуума на поверхность среды.

б) Теперь выполните с помощью уравнений Максвелла более строгое вычисление коэффициента отражения. Используя уравнения Максвелла и интегрирование по контуру, покажите, что тангенциальное электрическое поле непрерывно на границе при условии, что производная $\partial \mathbf{V}/\partial t$ на границе не бесконечна.

Полагая, что падающая электромагнитная волна линейно поляризована (электрическое поле направлено по x), покажите, что $E_{x(\text{пад})} + E_{x(\text{отр})} = E_{x(\text{прот})}$.

в) Воспользуйтесь уравнениями Максвелла для среды, приведенными в Д.9. Рассмотрим поле $\mathbf{V} = 4\pi\mathbf{M}$. Это поле, по определению μ , равно \mathbf{V}/μ и называется полем \mathbf{H} . Покажите, что тангенциальная компонента H непрерывна при условии, что частная производная от $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ по времени конечна. Затем покажите, что для волны, падающей из вакуума, $B_{y(\text{пад})} + B_{y(\text{отр})} = (1/\mu)B_{y(\text{прот})}$. Теперь воспользуйтесь тем, что B_y в среде равно произведению показателя преломления n на E_x , и соотношением между B_y и E_x в падающей и отраженной волнах для получения коэффициента отражения $R = E_{x(\text{отр})}/E_{x(\text{пад})}$. Покажите, что

$$R = [1 - (n/\mu)]/[1 + (n/\mu)].$$