Очевидно, что понятие поляризации применимо только к тем волнам, которые имеют по крайней мере два независимых направления поляризации. Рассмотрим, например, звуковую волну, распространяющуюся в воздухе вдоль $\hat{\mathbf{z}}$. Если для такой волны известны частота, амплитуда и фаза, то волна определена. Мы знаем, что в звуковой волне смещение происходит вдоль направления распространения волны, т. е. что звуковые волны продольны. В этом случае нет необходимости говорить о продольно-поляризованной волне. Понятие *поляризации* мы «прибережем» для более сложного случая, когда имеются по крайней мере два независимых направления поляризации. У звуковых волн в *твердом теле* или у волн в «пружине» *) имеются три возможных состояния поляризации — одно продольное и два поперечных. В этом случае можно говорить о волнах с продольной поляризацией или о двух волнах с различной поперечной поляризацией. В общем случае волна может быть суперпозицией всех трех состояний поляризации.

8.2. Описание состояний поляризации

Волны представляют собой физические величины, отклонения которых от положения равновесия меняются в зависимости от координат и времени. Отклонение от положения равновесия (смещение) может быть описано вектором $\psi(x, y, z, t)$. Мы обычно рассматривали плоские волны, для которых функция ψ зависит от z и t: $\psi=\psi(z, t)$, причем направление распространения совпадало с направлением оси z. (Мы имеем в виду как стоячие, так и бегущие волны.) Как правило, наиболее интересными физическими свойствами обладают производные смещения $\partial\psi(z, t)/\partial t$ и $\partial\psi(z, t)/\partial z$. Мы убедились в этом на примере волн в струне и звуковых волн, для которых смещение $\psi(z, t)$ имеет смысл смещения частиц среды от положения равновесия.

В общем случае вектор смещения в плоской волне, распространяющейся вдоль $\hat{\mathbf{z}}$, может быть записан в виде

$$\psi(z, t)=\hat{\mathbf{x}}\psi_x(z, t)+\hat{\mathbf{y}}\psi_y(z, t)+\hat{\mathbf{z}}\psi_z(z, t). \tag{1}$$

Для поперечных волн в струне вектор ψ имеет только x- и y-компоненты. В этом случае волна называется *поперечно-поляризованной*. (В струне могут также распространяться продольные волны, обусловленные изменением натяжения и продольной скорости частиц струны.) Для звуковых волн в воздухе смещение ψ совпадает с направлением $\hat{\mathbf{z}}$. Такие волны называют продольными, но обычно к ним не применяют термин продольно-поляризованных волн. (Мы знаем, что в трубе можно создать и поперечные звуковые волны. Эти поперечные волны могут рассматриваться как продольные волны, которые не бегут вдоль трубы, а отражаются от одного конца трубы к другому. В этом случае волна распространяется вдоль

*) См. сноску на стр. 24.

трубы, но смещения молекул воздуха имеют как поперечные, так и продольные компоненты.) В случае электромагнитных волн (п. 7.5) смещение ψ поперечно направлению $\hat{\mathbf{z}}$. Действительно, для плоских волн в вакууме векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ всегда перпендикулярны $\hat{\mathbf{z}}$. (В волноводе или в какой-либо полости у векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ могут быть и продольные компоненты.)

Поляризация поперечных волн. Рассмотрим поперечную волну следующего вида:

$$\psi(z,\ t)=\hat{\mathbf{x}}\psi_x(z,\ t)+\hat{\mathbf{y}}\psi_y(z,\ t). \tag{2}$$

Изучая поперечные волны, мы будем иметь в виду два примера: поперечные волны в натянутой струне или «пружине» и плоские электромагнитные волны в вакууме. Для волн в струне вектор $\psi(z,\ t)$ дает мгновенное значение поперечного смещения струны от положения равновесия. Величинами, представляющими физический интерес, в этом случае являются поперечная скорость $\partial\psi/\partial t$ и поперечная сила — $T_0\partial\psi/\partial z$ в струне, действующая со стороны струны слева от точки z на область справа от z. Если известно смещение $\psi(z,\ t)$, то обе эти величины тоже известны. Для электромагнитных плоских волн вектор $\psi(z,\ t)$ имеет смысл поперечного электрического поля $\mathbf{E}(z,\ t)$. Другой представляющей интерес физической величиной является поперечное магнитное поле $\mathbf{B}(z,\ t)$, которое мы знаем, если известно поле $\mathbf{E}(z,\ t)$. Мы всегда можем представить поле $\mathbf{E}(z,\ t)$ в виде суперпозиции бегущих волн, распространяющихся в направлениях $+z$ и $-z$. Пусть $\mathbf{E}^+$ и $\mathbf{E}^-$ определяет вклад в $\mathbf{E}$ от бегущих волн, распространяющихся в направлении $+z$ и $-z$:

$$\mathbf{E}(z,\ t)=\mathbf{E}^+(z,\ t)+\mathbf{E}^-(z,\ t). \tag{3}$$

В п. 7.4 было показано, что магнитное поле $\mathbf{B}^+$, соответствующее бегущей волне $\mathbf{E}^+$, равно $\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}^+$, а магнитное поле $\mathbf{B}^-$, соответствующее волне противоположного направления распространения $\mathbf{E}^-$, равно $-\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}^-$. Таким образом, для магнитного поля имеем

$$\mathbf{B}(z,\ t)=\hat{\mathbf{z}}\times[\mathbf{E}^+(z,\ t)-\mathbf{E}^-(z,\ t)]. \tag{4}$$

Уравнение (4) напоминает нам, что, зная $\mathbf{E}$, мы «автоматически» (а точнее, из уравнений Максвелла) получаем поле $\mathbf{B}$.

Эффективный точечный заряд. Другой наглядный пример поляризованных колебаний — это волны, испускаемые гармонически колеблющимся точечным зарядом, достаточно удаленным от точки наблюдения. В этом случае электромагнитную волну в окрестности точки наблюдения можно в достаточно хорошем приближении считать плоской волной. Пусть мгновенное поперечное смещение заряда q, колеблющегося относительно начала координат, задано следующим образом:

$$\psi(t)=\hat{\mathbf{x}}x(t)+\hat{\mathbf{y}}y(t)=\hat{\mathbf{x}}x_0\cos(\omega t+\varphi_1)+\hat{\mathbf{y}}y_0\cos(\omega t+\varphi_2). \tag{5}$$

Тогда электрическое поле, излучаемое зарядом (п. 7.5), равно

$$\mathbf{E}(z,\ t) = -\frac{q\mathbf{a}_\perp(t')}{rc^2} = -\frac{q\ddot{\boldsymbol{\psi}}(t')}{zc^2}.$$

Имея в виду, что $\ddot{\psi} = -\omega^2\psi$, получим

$$\mathbf{E}(z,\ t) = \frac{q\omega^2\boldsymbol{\psi}(t')}{zc^2} = \frac{q\omega^2\boldsymbol{\psi}(t-z/c)}{zc^2}. \qquad (6)$$

Таким образом, для плоских электромагнитных бегущих волн величина $\boldsymbol{\psi}(z,\ t)$ определяет (с точностью до известного множителя $q\omega^2/zc^2$) электрическое поле $\mathbf{E}(z,\ t)$; но она же равна смещению положительного заряда q в более ранний момент времени $t' = t - z/c$. Если поле $\mathbf{E}(z,\ t)$ создано не колебаниями точечного заряда q, а каким-нибудь другим способом, то мы все-таки можем искусственно ввести такой заряд, определив его по формуле (6), и считать, что наблюдаемое поле $\mathbf{E}(z,\ t)$ вызвано этим эффективным зарядом.

Линейная поляризация. Если в поперечных волнах (например, в электромагнитных плоских волнах или в поперечных волнах в струне) смещение направлено вдоль прямой линии, перпендикулярной $\hat{\mathbf{z}}$, то такие волны называются *линейно-поляризованными.* Можно задать только два независимых поперечных направления колебаний, например колебания вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$ и вдоль оси $\hat{\mathbf{y}}$. Рассмотрим колебания в фиксированной точке z. В этом случае для нас не имеет значения, будет ли волна стоячей, бегущей или представляет собой суперпозицию этих волн. Колебания, соответствующие линейно-поляризованной плоской волне, могут иметь вид

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \hat{\mathbf{x}}A_1 \cos\omega t \qquad (7)$$

или

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \hat{\mathbf{y}}A_2 \cos\omega t. \qquad (8)$$

В выражениях (7) и (8) мы опустили координату z, а фазовую постоянную приняли равной нулю. В более общем случае линейно-поляризованное колебание может происходить по направлению, не совпадающему ни с $\hat{\mathbf{x}}$, ни с $\hat{\mathbf{y}}$. В этом случае оно будет представлено суперпозицией двух независимых линейно-поляризованных колебаний [формулы (7) и (8)] с *одинаковой фазой* (или сдвинутых по фазе на π):

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \hat{\mathbf{x}}A_1 \cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}_2 A_2 \cos\omega t \qquad (9)$$

или

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\hat{\mathbf{x}}A_1 + \hat{\mathbf{y}}A_2)\cos\omega t. \qquad (10)$$

Величина и направление вектора $\hat{\mathbf{x}}A_1 + \hat{\mathbf{y}}A_2$ не зависят от времени. Поэтому уравнение (10) представляет собой колебание вдоль фиксированного направления с амплитудой колебаний A, равной

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \qquad (11)$$

Вектор $\psi(t)$ одну половину периода направлен по вектору $+\hat{e}$ и другую половину периода по вектору $-\hat{e}$. Через $\hat{e}$ мы обозначаем единичный вектор:

$$\hat{e}=\frac{A_1}{A}\hat{x}+\frac{A_2}{A}\hat{y}. \qquad (12)$$

Чтобы показать, что $\hat{e}$ — единичный вектор, рассмотрим скалярное произведение

$$\hat{e}\cdot\hat{e}=\frac{(A_1\hat{x}+A_2\hat{y})^2}{A^2}=\frac{A_1^2\hat{x}\cdot\hat{x}+A_2^2\hat{y}\cdot\hat{y}+2A_1A_2\hat{x}\cdot\hat{y}}{A^2}=\frac{A_1^2+A_2^2}{A^2}=1. \qquad (13)$$

На рис. 8.1 показано смещение $\psi(t)$ для линейно-поляризованной волны (при фиксированном z).

Линейно-поляризованная стоячая волна. Предположим, что мы хотим найти выражение для линейно-поляризованной «чистой» стоячей волны, имеющей, например, узел смещения ψ при $z=0$. Для этого выражение для линейно-поляризованного смещения при фиксированном z [уравнение (10)] следует помножить на $\sin kz$:

$$\psi(z,\ t)=(\hat{x}A_1+\hat{y}A_2)\sin kz\cos\omega t. \qquad (14)$$

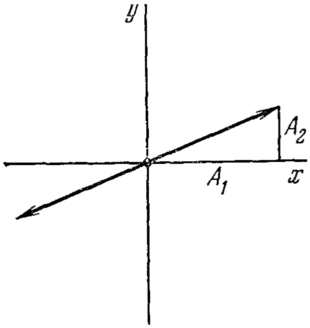

Рис. 8.1. *Линейная поляризация.* Смещение $\psi(t)$ для данного z [см. уравнения (9) и (10)] гармонически осциллирует вдоль линии, обозначенной двумя стрелками.

Линейно-поляризованная бегущая волна. Чтобы найти выражение для линейно-поляризованной «чистой» бегущей волны, распространяющейся, например, в направлении $+\mathbf{z}$, заменим в выражении (10) ωt на $\omega t-kz$. Получим

$$\psi(z,\ t)=(\hat{x}A_1+\hat{y}A_2)\cos(\omega t-kz). \qquad (15)$$

Круговая поляризация. Если смещение в поперечной волне представляет собой движение по кругу (при фиксированном z), то говорят, что волна поляризована по кругу или имеет круговую поляризацию. Рассмотрим фиксированное значение z. Пока мы еще не определили направление распространения и даже не знаем, является ли волна бегущей или стоячей. Направим большой палец правой руки вдоль $+\hat{z}$, тогда согнутые остальные пальцы зададут определенное направление вращения. Если круговое движение совпадает с этим направлением вращения, то мы говорим, что колебания имеют круговую поляризацию по $+\hat{z}$. (Аналогично с помощью того же правила правой руки определяется круговая поляризация по $-\hat{z}$.) Колебание с круговой поляризацией по $+\hat{z}$ может быть представлено суперпозицией линейно-поляризованных колебаний по осям $\hat{x}$ и $\hat{y}$, причем амплитуды этих колебаний равны. Выберем, как обычно, правую систему координат, так что $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$. В этом случае у колебания с круговой поляризацией по $+\hat{z}$ составляющая по оси $\hat{\mathbf{x}}$ опережает составляющую по $\hat{\mathbf{y}}$ на 90°:

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}A\cos(\omega t - \pi/2) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}A\sin\omega t. \quad (16)$$

Аналогично, для колебания с круговой поляризацией по $-\hat{\mathbf{z}}$ составляющая по оси $\hat{\mathbf{x}}$ отстает от составляющей по $\hat{\mathbf{y}}$ на 90°:

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}A\cos(\omega t + \pi/2) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t - \hat{\mathbf{y}}A\sin\omega t. \quad (17)$$

При рассмотрении плоских электромагнитных волн (п. 7.4) мы выяснили, что поляризованные по кругу плоские волны несут момент импульса $\mathbf{J} = \pm(W/\omega)\hat{\mathbf{z}}$, где W — энергия, а ω — угловая частота. Знак момента определяется направлением вращения полей. Так, момент импульса направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$ для волны с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$. То же справедливо и для направления $-\hat{\mathbf{z}}$. Волны с круговой поляризацией в струне и «пружине» также переносят момент импульса. На рис. 8.2 показано смещение $\psi(t)$ для колебания, поляризованного по кругу (при фиксированном z).

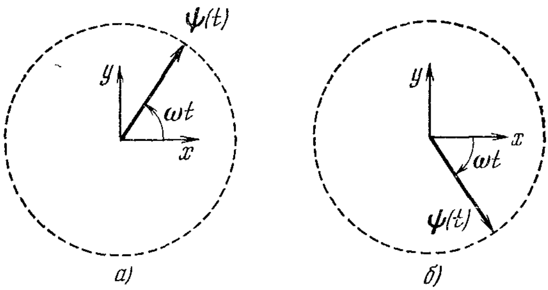

Рис. 8.2. Круговая поляризация.

а) Круговая поляризация. Момент импульса направлен по оси $+\hat{\mathbf{z}}$. Ось $\hat{\mathbf{z}}$ фиксирована в пространстве и не зависит от направления распространения волн. *б)* Круговая поляризация. Момент импульса направлен по $-\hat{\mathbf{z}}$.

Стоячая волна, поляризованная по кругу. Стоячая волна с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ (момент импульса также направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$) получается умножением соответствующего колебания, поляризованного по кругу для фиксированного z [такое колебание задается выражением (16)], на синусоидальную функцию от z. Таким образом, для стоячей волны, с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ и узлом в точке $z = 0$, имеем

$$\psi(z, t) = [\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t - \pi/2)]\, A\sin kz. \quad (18)$$

Бегущая волна, поляризованная по кругу. Бегущая волна с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ (момент импульса также направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$) получается заменой в уравнении (16) ωt на $\omega t - kz$ (если волна распространяется вдоль $+\hat{\mathbf{z}}$):

$$\psi(z, t) = A\,\{\hat{\mathbf{x}}\cos[\omega t - kz] + \hat{\mathbf{y}}\cos[(\omega t - \pi/2) - kz]\}. \quad (19)$$

Если волна распространяется по направлению вдоль $-\hat{\mathbf{z}}$, то ωt нужно заменить на $\omega t + kz$. Если момент импульса волны направлен по $-\hat{\mathbf{z}}$, то для получения выражения бегущей волны с круговой поляризацией по $-\hat{\mathbf{z}}$ нужно использовать уравнение (17), заменив ωt на $\omega t - kz$ или $\omega t + kz$ в зависимости от направления распространения.

Спиральность бегущих волн, поляризованных по кругу. Рассмотрим бегущую, поляризованную по кругу волну, распространяющуюся в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$. Предположим, что момент импульса также направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$, поэтому направление вращения полей (для электромагнитных волн) или смещений (для волн в «пружине») выражается правилом правой руки, т. е. происходит по $+\hat{\mathbf{z}}$.

Волну с таким состоянием поляризации можно условиться называть волной с правой спиральностью. Мы будем называть это условие *условием момента импульса*. В соответствии с ним бегущая волна, поляризованная по кругу, имеет правую спиральность, если ее момент импульса совпадает с направлением распространения, и левую спиральность, если направление распространения волны противоположно моменту импульса.

В оптике обычно используют другое определение, которое можно назвать условием винта: свет, имеющий правую спиральность, называют поляризованным по кругу влево (или имеющим левую поляризацию), а свет с левой спиральностью называют поляризованным по кругу вправо (или имеющим правую поляризацию).

Мы рассмотрим оптическое определение поляризации на примере поляризованных по кругу волн в «пружине». Предположим, что один конец «пружины» приводится вами в быстрое вращение по часовой стрелке. Поляризованный по кругу волновой пакет будет распространяться по «пружине» от вас. Вращение происходит по часовой стрелке, и момент импульса направлен по направлению распространения волны. Теперь остановим движение, сделав мгновенный снимок, и рассмотрим мгновенную форму (конфигурацию) «пружины». Нас интересует, соответствует эта форма правому или левому винту. Мы видим, что мгновенная конфигурация, зарегистрированная снимком, соответствует левому винту! (Этот результат можно представить следующим образом. Предположим, вы вращаете один конец пружины по часовой стрелке, вызывая в нем бегущую, поляризованную по кругу волну. Рассмотрим конфигурацию «пружины» вблизи руки, совершающей движение по часовой стрелке. Вы увидите, что в фиксированный момент времени угловое положение немного удаленной от руки части «пружины» соответствует угловому положению руки в немного более ранний момент времени: «пружина» отстает от мгновенного положения руки. Это отставание тем больше, чем дальше отстоит от руки рассматриваемая часть «пружины». Охватив взглядом всю «пружину», вы увидите, что она имеет форму левого винта.) Таким образом, условие момента импульса и условие винта дают разные спиральности. Условие момента импульса легче понять, а оптическое условие легче запомнить, зная, что представляет собой винт.

Полезно приобрести опыт создания в «пружине» волн с различной поперечной поляризацией. Чтобы получить стоячую волну, закрепите один конец «пружины» и трясите другой. Чтобы смоделировать «свободный» конец, привяжите один конец «пружины» к 10-метровой струне, второй конец которой закреплен. Легко возбудить стоячие волны с линейной или круговой поляризацией. Бегущие гармонические волны возбудить труднее, поскольку не так просто создать для «пружины» согласованную нагрузку. Однако вдоль «пружины» легко послать волновой пакет и наблюдать за его отражением от закрепленного или свободного конца.

Свойства поперечно-поляризованных колебаний. Экспериментируя с «пружиной» или изучая приведенные выше уравнения, можно проверить следующие свойства поперечно-поляризованных колебаний (ими обладают также и плоские электромагнитные волны).

1. В линейно-поляризованной волне при фиксированном z смещение дважды за период проходит через нуль. В стоячей волне смещение всех движущихся элементов проходит через нуль одновременно. В бегущей волне все элементы совершают одинаковое движение, но с фазовым сдвигом, определяемым временем распространения волны.

2. В поляризованной по кругу стоячей или бегущей волне абсолютная величина смещения при фиксированном z постоянна.

Если сделать мгновенный снимок «пружины», в которой распространяется бегущая, поляризованная по кругу волна, то форма «пружины» на фотографии будет напоминать форму штопора. Если в «пружине» имеет место стоячая волна, поляризованная по кругу, то мгновенный снимок этой «пружины» нельзя отличить от мгновенного снимка «пружины» с линейно-поляризованной стоячей или бегущей волной. Однако следующий мгновенный снимок, рассматриваемый вместе с первым, покажет, какой из трех случаев имеет место.

3. В результате отражения на конце «пружины», по которой распространяется волновой пакет с круговой поляризацией по $+\hat{z}$ (направление фиксировано в пространстве), возникнет отраженная волна с круговой поляризацией по тому же направлению. Это справедливо как для свободного, так и для закрепленного конца (или для любой другой нагрузки на конце). Таким образом, при отражении направление вращения относительно фиксированного в пространстве направления $\hat{z}$ остается прежним. Это следует из закона сохранения момента импульса: на закрепленном или свободном конце «пружины» не может возникнуть момент скручивания (сам по себе), и поэтому при отражении момент импульса относительно фиксированного направления $+\hat{z}$ сохраняется. Конечно, спиральность отраженной волны меняется на противоположную, так как после отражения меняется направление распространения. Электромагнитное излучение ведет себя так же, как «пружина». Под этим мы подразумеваем, что направление вращения относительно фиксированного направления $\hat{z}$ поляризованного по кругу света или микроволн (или любого другого электромагнитного излучения) не меняется при отражении на 180°, но спиральность, т. е. направление вращения относительно направления распространения, меняется на обратную.

Общий случай поперечной поляризации; эллиптическая поляризация. В общем случае для фиксированного z поперечно-поляризованное колебание имеет вид

$$\psi(t) = \hat{x}A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (20)$$

Если φ_2 равно φ_1 или $\varphi_1 \pm \pi$, то мы имеем линейно-поляризованное колебание. Если φ_2 равно $\varphi_1 - \pi/2$ и A_2 равно A_1, то имеем колебание с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$. Если φ_2 равно $\varphi_1 + \pi/2$ и A_2 равно A_1, то имеем колебание с круговой поляризацией по $-\hat{z}$. В общем случае, когда A_2 не равно A_1 и фазы φ_2 и φ_1 произвольны, конец вектора смещения $\boldsymbol{\psi}$ описывает эллипс.

Действительно, обозначим ψ_x и ψ_y через x и y, тогда x равно $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, а y равно $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Разложим каждый из этих косинусов так, чтобы смещение x было некоторой линейной комбинацией $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, а y, соответственно, другой линейной комбинацией этих же функций. Теперь разрешим эти два линейных уравнения относительно $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Мы найдем две различные линейные комбинации x и y, соответствующие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Возведем выражения для $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в квадрат и сложим. В результате получим выражение (равное единице), состоящее из членов x^2, y^2 и xy. Это так называемое уравнение конического сечения. Если возможные значения x и y ограничены по величине (как в нашем случае), то коническое сечение представляет собой эллипс.

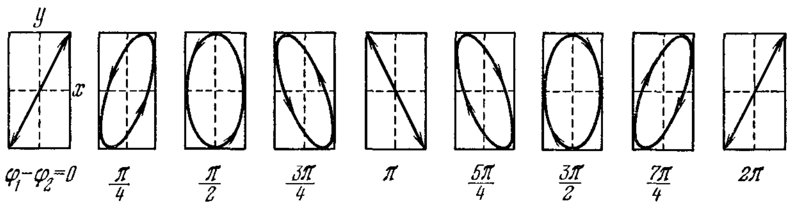

Рис. 8.3. Поляризация в общем случае.
Амплитуда колебаний по оси y в два раза больше амплитуды колебаний по x. Колебания по y опережают колебания по x на фазовую постоянную $\varphi_1 - \varphi_2$.

(См. задачу 8.1.) На рис. 8.3 показаны различные случаи поляризации волны в зависимости от величины разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ в уравнении (20). [С помощью прозрачной целлофановой ленты вы можете продемонстрировать влияние разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ на состояние поляризации. См. домашний опыт 8.17.]

Комплексные обозначения. Если в суперпозиции волн присутствуют волны с различными фазовыми константами, суперпозицию иногда удобно записать в комплексном виде. В качестве примера рассмотрим бегущую гармоническую волну, распространяющуюся в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{x}} E_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}} E_y(z, t) = \\ = \hat{\mathbf{x}} E_1 \cos(kz - \omega t - \varphi_1) + \hat{\mathbf{y}} E_2 \cos(kz - \omega t - \varphi_2). \quad (21)$$

Легко видеть, что электрическое поле, определяемое выражением (21), является реальной частью следующей *комплексной волновой функции*:

$$\mathbf{E}_c(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} (\hat{\mathbf{x}} E_1 e^{-i\varphi_1} + \hat{\mathbf{y}} E_2 e^{-i\varphi_2}). \quad (22)$$

Возможность вынести за скобки член $\exp i(kz - \omega t)$ иногда помогает вычислять выражения, являющиеся суперпозицией различных волн. Если мы хотим применить выражение (22) (или подобную ему волновую функцию в комплексной форме) к конкретному случаю, то в конечном результате расчета мы должны рассматривать реальную часть получаемого выражения. (В уравнениях Максвелла нет $\sqrt{-1}$; из них нельзя получить, например, что электрическое поле равно $\sqrt{-1}$ *в/см.*)

Комплексные волновые функции и комплексные амплитуды. Комплексную величину $\mathbf{E}_c$, реальная часть которой представляет электрическое поле $\mathbf{E}$, можно рассматривать как суперпозицию:

$$\mathbf{E}_c(z, t) = A_1\psi_1(z, t) + A_2\psi_2(z, t), \tag{23}$$

где

$$\psi_1(z, t) = \hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)}, \quad \psi_2(z, t) = \hat{\mathbf{y}}e^{i(kz-\omega t)}, \tag{24}$$

$$A_1 = E_1e^{-i\varphi_1}, \quad A_2 = E_2e^{-i\varphi_2}. \tag{25}$$

Ортонормированные волновые функции. Волновые функции ψ_1 и ψ_2 представляют *полный набор ортогональных и нормированных* (сокращенно ортонормированных) *волновых функций.* Прилагательное «полный» означает, что любая гармоническая бегущая волна может быть представлена суперпозицией функций ψ_1 и ψ_2 с соответствующими постоянными комплексными коэффициентами A_1 и A_2. Прилагательное «ортонормированный» означает, что имеют место равенства

$$\psi_1^*\cdot\psi_1 = \psi_2^*\cdot\psi_2 = 1, \quad \psi_1^*\cdot\psi_2 = \psi_2^*\cdot\psi_1 = 0, \tag{26}$$

где звездочка соответствует комплексно-сопряженному выражению (т. е. выражению, в котором i заменено на $-i$). Проверим равенства (26):

$$\psi_1^*\cdot\psi_1 = [\hat{\mathbf{x}}e^{-i(kz-\omega t)}]\cdot[\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)}] = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 1,$$

$$\psi_1^*\cdot\psi_2 = [\hat{\mathbf{x}}e^{-i(kz-\omega t)}]\cdot[\hat{\mathbf{y}}e^{i(kz-\omega t)}] = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = 0.$$

Найдем выражение для квадрата абсолютной величины комплексного вектора $\mathbf{E}_c$. Помня об условии ортогональности, получаем

$$|\mathbf{E}_c|^2 \equiv (\mathbf{E}_c^*)\cdot(\mathbf{E}_c) = (A_1^*\psi_1^* + A_2^*\psi_2^*)\cdot(A_1\psi_1 + A_2\psi_2) =$$
$$= |A_1|^2 + |A_2|^2 = E_1^2 + E_2^2. \tag{27}$$

Комплексное выражение для среднего по времени потока энергии. Скорость счета у детектора фотонов, помещенного в пучок электромагнитных бегущих волн, пропорциональна среднему по времени потоку энергии в пучке. Более точно: если частота излучения равна ω, то средняя скорость счета R для детектора с площадью сечения A и эффективностью фотокатода ε будет равна (в единицах *фотоны/сек*)

$$R = \frac{\langle S\rangle}{\hbar\omega}\cdot A\cdot\varepsilon, \tag{28}$$

где средний во времени поток энергии $\langle S\rangle$ [в *эрг/(см²·сек)*] равен

$$\langle S\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle\mathbf{E}^2\rangle \tag{29}$$

и

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = \langle(\hat{\mathbf{x}}E_y+\hat{\mathbf{y}}E_x)^2\rangle = \langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle = {}^1/_2 E_1^2 + {}^1/_2 E_2^2. \qquad (30)$$

В окончательном выражении (30) множитель $^1/_2$ появляется в результате усреднения по времени квадрата амплитуды гармонических колебаний [выражение (21)].

Сравнивая выражения (27) и (30), мы видим, что, работая с комплексной величиной $\mathbf{E}_c$, реальная часть которой равна электрическому полю $\mathbf{E}$, мы получим верное выражение для среднего по времени потока энергии, если для среднего по времени квадрата величины $\mathbf{E}$ возьмем половину квадрата абсолютного значения $\mathbf{E}_c$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\mathbf{E}_c \equiv \text{реальная часть } \mathbf{E}_c, \qquad (31)$$

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = {}^1/_2\,|\mathbf{E}_c|^2, \qquad (32)$$

где

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = \langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle, \quad |\mathbf{E}_c|^2 = |E_{xc}|^2 + |E_{yc}|^2. \qquad (33)$$

Различные представления состояния поляризации. Наиболее общее состояние поляризации может быть представлено суперпозицией волн, линейно-поляризованных по $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. Естественно, что существует бесконечное число направлений, которые можно выбрать для $\hat{\mathbf{x}}$, и, соответственно, существует бесконечное число представлений состояния с линейной поляризацией. Переходя к комплексным величинам, можно сказать, что существует бесчисленное число полных наборов ортонормированных волновых функций ψ_1 и ψ_2, которые можно использовать для получения суперпозиции, определяющей $\mathbf{E}_c$. Для примера положим, что единичные векторы $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_2$ получаются из первоначальных векторов $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ поворотом $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ на некоторый угол φ (направление вращения от $\hat{\mathbf{x}}$ к $\hat{\mathbf{y}}$). Легко показать, что в этом случае справедливы соотношения

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{x}}\cos\varphi + \hat{\mathbf{y}}\sin\varphi, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{x}}\sin\varphi + \hat{\mathbf{y}}\cos\varphi. \qquad (34)$$

Полный набор ортонормированных волновых функций, соответствующий линейно-поляризованным колебаниям по направлениям $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_2$, имеет вид

$$\psi_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 e^{i(kz-\omega t)}, \quad \psi_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 e^{i(kz-\omega t)}. \qquad (35)$$

Легко показать, что ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют условиям ортонормированности (26).

Представление произвольно поляризованного колебания суперпозицией колебаний, поляризованных по кругу. В общем случае поляризация в гармонической бегущей волне может быть представлена как суперпозиция поляризованных компонент с левой и правой спиральностью, обладающих соответствующими амплитудами и начальными фазами. Например, волна, линейно-поляризованная по $\hat{\mathbf{x}}$, может быть представлена двумя эквивалентными выражениями:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} A\cos(kz-\omega t) \qquad (36)$$

или

$$\mathbf{E}=\frac{A}{2}\{\hat{\mathbf{x}}\cos[\omega t-kz]+\hat{\mathbf{y}}\cos[(\omega t-\pi/2)-kz]\}+$$

$$+\frac{A}{2}\{\hat{\mathbf{x}}\cos[\omega t-kz]+\hat{\mathbf{y}}\cos[(\omega t+\pi/2)-kz]\}. \quad (37)$$

(Множители при $\hat{\mathbf{y}}$ имеют одинаковую величину, но их фазы различаются на π; при сложении они дают нуль.)

Выражение (36) представляет $\mathbf{E}$ как колебание с амплитудой A, линейно-поляризованное по $\hat{\mathbf{x}}$. Уравнение (37) представляет $\mathbf{E}$ как суперпозицию компонент, поляризованных по кругу. Их моменты импульса направлены по $+\hat{\mathbf{z}}$ и $-\hat{\mathbf{z}}$, и амплитуда каждой компоненты равна $A/2$. Комплексные выражения, соответствующие выражениям (36) и (37), имеют вид

$$\mathbf{E}_c=A\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (38)$$

$$\mathbf{E}_c=\frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)}+\hat{\mathbf{y}}e^{i\{kz-[\omega t-(\pi/2)]\}}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}A\left[\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)}+\hat{\mathbf{y}}e^{i\{kz-[\omega t+(\pi/2)]\}}\right]. \quad (39)$$

Используем равенства

$$e^{i(\pi/2)}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i, \quad e^{-i(\pi/2)}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i, \quad (40)$$

чтобы придать выражению (39) более краткий вид:

$$\mathbf{E}_c=\frac{1}{2}A\left[(\hat{\mathbf{x}}+i\hat{\mathbf{y}})e^{i(kz-\omega t)}\right]+\frac{1}{2}A\left[(\hat{\mathbf{x}}-i\hat{\mathbf{y}})e^{i(kz-\omega t)}\right]. \quad (41)$$

Теперь мы можем указать еще один полный набор ортонормированных волновых функций, описывающих состояния круговой поляризации:

$$\psi_+=\left(\frac{\hat{\mathbf{x}}+i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right)e^{i(kz-\omega t)}, \quad \psi_-=\left(\frac{\hat{\mathbf{x}}-i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right)e^{i(kz-\omega t)}. \quad (42)$$

Ортонормированность этих функций, т. е. равенства

$$\psi_+^*\cdot\psi_+=\psi_-^*\cdot\psi_-=1, \quad \psi_+^*\cdot\psi_-=\psi_-^*\cdot\psi_+=0, \quad (43)$$

легко доказать. В общем случае состояние поляризации в гармонической бегущей волне можно теперь представить в следующем виде:

$$\mathbf{E}_c(z,\ t)=A_+\psi_++A_-\psi_-, \quad (44)$$

где A_+ и A_- — комплексные постоянные. Для случая линейной поляризации [равенство (38)] имеем

$$A_+=A_-=\frac{1}{\sqrt{2}}A. \quad (45)$$

Средняя по времени скорость счета R фотоумножителя, находящегося в пучке бегущих гармонических волн, может быть выражена через комплексные коэффициенты любого полного набора волновых функций. Таким образом, мы можем выразить $\langle S \rangle$ не только через линейно-поляризованные колебания по направлениям $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ [см. формулы (28) — (33)], но и через колебания, поляризованные по кругу. Имеем

$$R = \frac{\langle S \rangle}{\hbar\omega} A\varepsilon, \tag{46}$$

где A — площадь (не амплитуда!), ε — эффективность и

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle, \tag{47}$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle^2 = {}^1/_2 \, | \mathbf{E}_c |^2, \tag{48}$$

$$| \mathbf{E}_c |^2 = | A_+ \psi_+ + A_- \psi_- |^2 = | A_+ |^2 + | A_- |^2.$$

Мы редко будем пользоваться комплексными волновыми функциями и познакомились с ними, чтобы облегчить восприятие материала по квантовой физике, изложенного в томе IV.

8.3. Образование поляризованных поперечных волн

Рассмотрим несколько способов создания волны с желаемым состоянием поляризации. Если бы мы могли влиять на процесс излучения, то имели бы простейший способ получить нужную поляризацию. Однако чаще всего мы имеем дело с излучением, которое находится вне нашего контроля, например с излучением Солнца, лампы или антенны, и задача в том, чтобы иметь возможность каким-либо способом выделить желаемое состояние поляризации из сложной суперпозиции всевозможных поляризаций. Одним из способов устранения ненужных компонент поляризации является применение поляроида. Другой способ заключается в использовании отражения. В некоторых условиях компоненты с нежелательным состоянием поляризации не отражаются и отраженное излучение обогащено нужным состоянием поляризации.

Поляризация при излучении. Возбуждая волну в «пружине», вы создаете нужное состояние поляризации, задавая направление встряхивания. Точно так же поляризация радиоволн или микроволн, испускаемых антенной, зависит от того, как движутся электроны в антенне. Если антенна представляет собой прямой отрезок провода, расположенный перпендикулярно оси $\hat{\mathbf{z}}$, то колебание электронов вдоль провода приводит к колебанию электрических силовых линий в этом же направлении и электрическое поле в электромагнитной волне, распространяющееся вдоль $\hat{\mathbf{z}}$, имеет линейную поляризацию, параллельную антенне. Излучение в других направлениях также линейно поляризовано: вектор электрического поля перпендикулярен направлению распространения излучения антенны и лежит в меридиональной плоскости, образованной этим направлением и антенной (см. п. 7.5). Если имеются две прямые антенны, одна из которых направлена вдоль $\hat{\mathbf{x}}$ и вторая — вдоль $\hat{\mathbf{y}}$, и если они нахо-