

Произведение углового разброса на расстояние $L = 1500 \text{ см}$ даст пространственный разброс $W = (1500)(3 \cdot 10^{-4}) = 0,5 \text{ см} = 5 \text{ мм}$. (Это легко продемонстрировать в аудитории.)

Рассмотрим теперь луч карманного фонарика или световой указки в виде фонарика. Пусть этот пучок, с начальным диаметром 2 мм , образован точечной нитью, расположенной в фокусе линзы. Каким должен быть размер нити, чтобы пучок света от этого фонарика был ограничен дифракцией? Если нить не точечная, то различные ее части будут давать независимые пучки. Нетрудно показать, что угловой разброс, вызванный конечными размерами нити, примерно равен длине нити, деленной на фокусное расстояние f линзы:

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta x}{f}.$$

Мы хотим, чтобы пучок фонарика с начальной шириной 2 мм был ограничен только дифракцией. Для этого нужно, чтобы угловой разброс, возникающий из-за конечных размеров нити, был меньше углового разброса из-за дифракции. Последний, в соответствии со сделанными выше вычислениями, равен $3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$. У обычного фонарика нить находится на расстоянии $0,5 \text{ см}$ от линзы, т. е. $f \approx 0,5 \text{ см}$, и мы получаем следующую оценку размера нити:

$$\Delta x < f \Delta\theta \approx (0,5)(3 \cdot 10^{-4}) \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Сделать столь малую нить вряд ли возможно.

9.6. Дифракция и принцип Гюйгенса

Различие между интерференцией и дифракцией. В п. 9.5 мы рассмотрели угловой разброс пучка из-за дифракции и произвели грубый расчет дифракционной картины при падении плоской волны на отверстие в непрозрачном экране (рис. 9.10, б) или на зеркало (рис. 9.10, в), а также в случае плоского излучателя (рис. 10, г). До этого мы рассматривали интерференционную картину, образованную двумя точечными или линейными источниками. В чем различие между интерференционной и дифракционной картинами?

Реального различия между ними нет. В силу исторических причин распределение амплитуды или интенсивности, появляющееся вследствие суперпозиции вкладов от конечного числа отдельных когерентных источников, обычно называется *интерференционной* картиной. Распределение амплитуды или интенсивности, вызванное суперпозицией вкладов от расположенных «непрерывно» друг за другом когерентных источников, называют *дифракционной* картиной. Поэтому говорят об интерференционной картине от двух узких щелей и о дифракционной картине от одной широкой щели или о комбинированной (интерференционной и дифракционной) картине от двух широких щелей.

В п. 9.5 мы предположили, что ограниченный дифракцией пучок, возникающий при падении плоской волны на отверстие

(апертуру) в экране (рис. 9.10, б), эквивалентен пучку от плоского излучателя, размер которого равен величине отверстия, а все излучающие элементы колеблются в фазе и с одинаковой амплитудой (рис. 9.10, д). В этом пункте мы попытаемся доказать справедливость нашего предположения. Мы увидим, что, хотя предположение об эквивалентности апертуры и источника не совсем точно, оно является удобным приближением, значительно упрощающим вычисление дифракционной картины. Это предположение справедливо, пока размеры апертуры значительно больше длины волны. Предположение об эквивалентности облегчает расчет излучения, испущенного не под очень большими углами относительно основного направления пучка. Методика таких вычислений (основанная на замене апертуры соответствующим плоским излучателем), позволяющая определить интерференционную картину для определенного сечения пучка z , называется *построением Гюйгенса*. Мы пользуемся им для вычисления дифракционной картины, возникающей при падении плоской волны (например, от удаленного точечного источника) на отверстие в непрозрачном экране.

Действие непрозрачного экрана. Любое электромагнитное излучение связано с колебанием заряженных частиц. Полное электрическое (и магнитное) поле в любой точке представляет собой суперпозицию волн, образованных всеми источниками, т. е. всеми колеблющимися зарядами. В нашей задаче мы имеем один удаленный точечный источник, который дает падающую на экран плоскую волну. Полная амплитуда волны за непрозрачным экраном равна нулю по определению (экран непрозрачный). Эта полная амплитуда представляет собой суперпозицию волн от источника S и волн, испущенных колеблющимися электронами в веществе экрана. Экран не пропускает падающую волну. Это значит, что суперпозиция всех волн, т. е. волн от источника S и волн от возбужденных падающим излучением электронов экрана (электроны возбуждаются также вследствие излучения от других электронов), дает за экраном нулевую амплитуду.

Если это кажется странным, то вспомните, почему статическое электрическое поле внутри металлического проводника равно нулю. Проводник не «съедает» внешнее поле. Когда в это поле вносят проводник, заряды в проводнике перемещаются до тех пор, пока суперпозиция полей от поверхностных зарядов и внешнего поля не приведет к отсутствию поля в проводнике. Все электромагнитные поля происходят от заряженных частиц, и нулевое поле, возникающее за непрозрачным экраном, является результатом суперпозиции.

Если вы будете представлять себе электрические силовые линии от заряженной частицы как небольшой поток «пуль», движущихся от точечного заряда со скоростью света, то это может привести к трудностям. «Пули» не подчиняются принципу суперпозиции. Два таких потока не могут пройти друг через друга без взаимодействия. Суперпозиция двух «пуль» не может дать нуля. С точки зрения та-

кого ошибочного представления об электрическом поле вы будете рассматривать действие металлического проводника на электростатическое поле, в котором он находится, как действие брони на поток пуль. Точно так же было бы ошибкой считать, что экран, на который падает свет, представляет собой некую броню, останавливающую и поглощающую свет, превращая его в тепло (если экран черный), или отражающую «пули» назад (если поверхность экрана блестящая). Эта картина неверна, и если вы именно так представляете себе механизм взаимодействия излучения с экраном, то постарайтесь избавиться от этого неверного представления.

Блестящий и черный непрозрачные экраны. При выборе непрозрачного экрана возможны два крайних случая. Он может иметь блестящую поверхность (например, непрозрачная алюминиевая фольга). Электроны в металле находятся под действием электрического поля; соответственно они излучают электромагнитные волны. Оказывается, что в прямом направлении (направление падающей волны) суперпозиция падающей волны и волн от возбужденных электронов экрана будет равна нулю. В обратном направлении мы получим отраженную волну. Вдали от резонанса движение данного электрона полностью определяется упругой амплитудой, скорость сдвинута по фазе на 90° относительно полного электрического поля в месте расположения заряда, и поэтому над электроном в течение любого полного цикла работа не совершается. (Электрон только меняет направление падающего излучения, не поглощая энергию.)

Другой крайний случай,— это когда поверхность непрозрачного экрана, на которую падает излучение, черная (например, черный картон или предметное стекло микроскопа, покрытое слоем аквадака). Здесь электроны также находятся под действием падающего излучения. Электроны испытывают активную силу сопротивления со стороны среды и всегда имеют предельную скорость *). Излучение электронов в прямом направлении сдвинуто по фазе на 180° относительно падающего излучения, и поэтому суперпозиция в этом направлении дает нуль (после того как излучение проникнет в некоторую толщину экрана). Скорость электрона всегда в фазе с полным электрическим полем в месте расположения электрона, и электрическое поле совершает над электроном вполне определенную работу. Эта работа переходит в тепло, и температура среды (экрана) повышается. Отраженной волны не возникает: суперпозиция вкладов от отдельных слоев экрана в обратном направлении дает нуль.

Действие отверстия в непрозрачном экране. Вырежем небольшое отверстие (или щель) в нашем непрозрачном экране. Щель обозначим индексом I и соответственно материал, который нужно вырезать для образования щели, обозначим как «пробка I ». Материал экрана выше и ниже пробки I обозначим соответственно через

*) См. Д. 9., стр. 493.

a и b . Полное поле за экраном, которое равно нулю, является суперпозицией полей, излучаемых источником S , частями экрана a и b и пробкой 1 . Таким образом, пока пробка еще не вынута, имеем

$$E = 0 = E_S + E_a + E_b + E_1. \quad (42)$$

Эта ситуация показана на рис. 9.12.

Теперь вытащим пробку. *Предположим*, что после этого движение электронов в частях экрана a и b не изменилось. (Это предположение

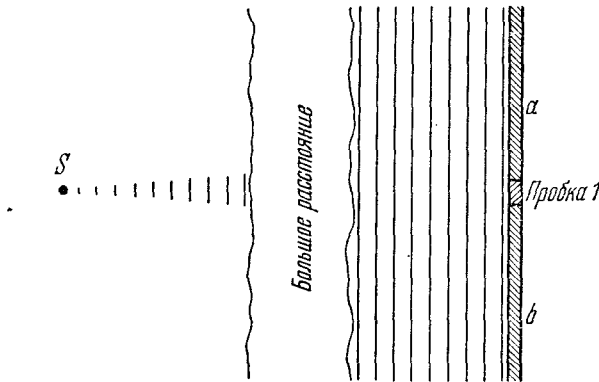


Рис. 9.12. Плоские волны от далекого точечного источника падают на непрозрачный экран. Нулевая интенсивность за экраном является результатом суперпозиции полей от S и от частей экрана a и b и пробки 1 .

является некоторым приближением, поскольку на электроны в частях экрана a и b действует общее поле, включающее в себя и поле, излучаемое электронами пробки. Наибольшее влияние излучение от электронов пробки будет оказывать на электроны в a и b , находящиеся на расстоянии нескольких длин волн от края щели, поскольку интенсивность излучения быстро падает с увеличением расстояния от электрона.) Теперь поле за экраном не будет больше определяться суперпозицией (42). Чтобы получить это поле, нужно из суперпозиции (42) вычесть поле, создаваемое пробкой 1 , т. е. E_1 . Имеем

$$E = E_S + E_a + E_b = (E_S + E_a + E_b + E_1) - E_1 \approx 0 - E_1 \approx -E_1. \quad (43)$$

Таким образом, поле за экраном, равное суперпозиции вкладов от источника и от оставшихся частей экрана a и b , совпадает (с точностью до знака) с полем, испускаемым одной пробкой, помещенной между a и b . Итак, мы можем считать, что поле за экраном, созданное источником и экраном со щелью, равно полю от более простой системы, состоящей только из пробки 1 , причем все электроны пробки колеблются в фазе и с равной амплитудой. Такое представление дает возможность легко вычислить интерференционную картину от непрозрачного экрана со щелью. Легкость связана

с тем, что нас не интересует зависимость амплитуды и фазы колеблющихся электронов в пробке от их положения в пробке. (Мы предполагаем, что экран имеет конечную толщину.) Если бы мы знали, какова эта зависимость, мы могли бы оценить излучение от пробки в обратном направлении, т. е. мы могли бы различать блестящий и черный непрозрачные экраны. Вместо этого мы предполагаем, что поле E_1 образовано бесконечно тонким слоем колеблющихся зарядов на пробке и все заряды колеблются с одинаковой фазой и амплитудой.

Принцип Гюйгенса. Описанная выше замена источника и экрана со щелью простым излучателем (пробкой с зарядами на поверхности) в месте расположения щели называется *принципом Гюйгенса*. Этот принцип может быть использован как для любого числа щелей, так и для одной широкой щели. Заметим, что такая замена дает правильную интерференционную картину только за экраном. *Реальная «излучающая пробка»*, т. е. антенна в виде плоской пластины, излучает во всех направлениях. *Реальный непрозрачный экран с отверстием (щелью)* излучает слабо или сильно в обратном направлении в зависимости от того, является ли поверхность, на которую падает излучение, черной или блестящей. Принцип Гюйгенса не позволяет вычислить поле слева от экрана (излучение на рис. 9.12 падает на экран слева), так как мы пренебрегли изменениями амплитуды и фазы, возникающими между передней и задней поверхностями пробки. Эти изменения зависят от того, является ли поверхность, на которую падает излучение, блестящей или черной.

Необходимо еще одно замечание. В уравнении (43) мы предположили, что поля E_a и E_b одинаковы как с пробкой, так и без нее. Как упоминалось выше, это является приближением. Допустим, что мы имеем одну широкую щель и используем принцип Гюйгенса для вычисления поля справа от экрана и поля непосредственно в самой щели. Если мы находимся достаточно далеко справа от экрана и не очень смещены относительно прямого направления, проведенного через центр щели, и если ширина экрана равна многим длинам волн, то принцип Гюйгенса дает очень хорошее приближение. Если же мы ищем поле в непосредственной близости от щели, то вычисления, сделанные с помощью принципа Гюйгенса, будут очень грубыми. На поле непосредственно в самой щели решающее действие оказывает движение зарядов в экране, находящихся около краев щели. Но именно на этом движении зарядов больше всего сказывается удаление пробки. Поэтому в самой щели и особенно у ее краев картина поля может быть очень сложной. Вы спросите: а почему не решить эту задачу точно? Дело в том, что сделать это очень трудно. Вы должны применить уравнения Максвелла для всех областей вакуума и вещества, точно задать свойства материала и верно определить граничные условия. Не существует общих методов решения этой задачи, и лишь для нескольких задач такого рода было получено точное решение.

Использование построения Гюйгенса для вычисления дифракционной картины от одной щели. Мы хотим вычислить дифракционную картину для случая, когда плоская волна (испущенная удаленным точечным источником) падает на щель. Используя построение Гюйгенса, мысленно заменим падающую плоскую волну (или удаленный точечный источник) и материал экрана излучающей пластиной, т. е. «пробкой» Гюйгенса. Поскольку распределение колеблющихся зарядов вдоль пластины непрерывно, мы должны будем при оценке действия пластины произвести интегрирование (т. е. вычислить суперпозицию) по вкладам от всех бесконечно малых элементов пластины. Вместо интегрирования мы можем (и

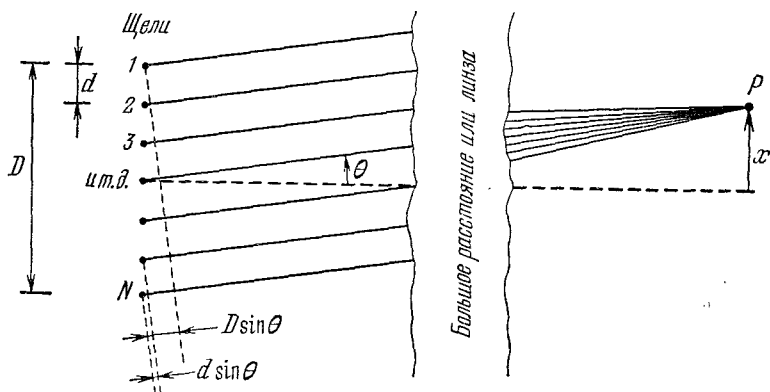


Рис. 9.13. N антенн или N узких щелей с зарядами, колеблющимися в фазе.

будем) рассматривать дискретную сумму, образованную вкладами от N одинаковых, находящихся на равном расстоянии друг от друга «антенн». В пределе, устремив N к бесконечности, мы получим непрерывное распределение излучающих источников. (Преимущество в использовании дискретных, а не непрерывно распределенных источников заключается в том, что мы одновременно получаем дифракционную картину от N антенн или N узких щелей для произвольного N от $N=2$ до бесконечности.)

Пусть полная ширина широкой щели равна D . В этом случае D представляет собой ширину области, содержащей нашу линейную группу из N антенн Гюйгенса. Пусть расстояние между соседними антеннами равно d , тогда $D = (N - 1)d$. Будем считать, что плоская волна распространяется в положительном направлении оси z и N узких щелей расположены по оси x (рис. 9.13).

В далекой точке поля P каждая антенна дает вклад, имеющий одинаковую амплитуду $A(r)$ (точка P достаточно удалена, и мы можем считать, что она находится на приблизительно одинаковом расстоянии от всех антенн). Далее, все антенны излучают с одинаковой фазой (по предположению), Электрическое поле в точке P

равно следующей сумме:

$$E = A(r) \cos(kr_1 - \omega t) + A(r) \cos(kr_2 - \omega t) + \dots \\ \dots + A(r) \cos(kr_N - \omega t). \quad (44)$$

Мы хотим представить эту суперпозицию N бегущих волн одной бегущей волной, распространяющейся (выходящей) из среднего положения группы антенн, амплитуда которой зависит от угла испускания. (Именно так мы поступали, рассматривая интерференционную картину от двух источников в п. 9.2. Там для $N = 2$ мы получили такой же результат.) Мы можем упростить алгебраические выкладки, используя комплексное представление колебаний. Поле E является реальной частью комплексной величины

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} (e^{ikr_1} + e^{ikr_2} + \dots + e^{ikr_N}). \quad (45)$$

В соответствии с рис. 9.13 имеем

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= r_1 + d \sin \theta, \\ r_3 &= r_1 + 2d \sin \theta, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_N &= r_1 + (N-1) d \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

С учетом равенств (46) уравнение (45) можно переписать так:

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} (1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots) = \\ = A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} S, \quad (47)$$

где

$$S \equiv 1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots = 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} \quad (48)$$

и

$$a \equiv e^{ik(r_2-r_1)} = e^{ik(d \sin \theta)} = e^{i \Delta \varphi}. \quad (49)$$

Разность фаз $\Delta \varphi$ для волн в точке P от двух соседних антенн равна

$$\Delta \varphi = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta. \quad (50)$$

Для геометрической прогрессии S [уравнение (48)] справедливо соотношение

$$aS - S = a^N - 1,$$

т. е.

$$S = \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN \Delta \varphi} - 1}{e^{i \Delta \varphi} - 1} = \frac{e^{i(1/2)N \Delta \varphi}}{e^{i(1/2) \Delta \varphi}} \frac{[e^{i(1/2)N \Delta \varphi} - e^{-i(1/2)N \Delta \varphi}]}{[e^{i(1/2) \Delta \varphi} - e^{-i(1/2) \Delta \varphi}]} = \\ = e^{i(1/2)(N-1) \Delta \varphi} \frac{\sin \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi}. \quad (51)$$

Тогда уравнение (47) можно переписать так:

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} e^{ik[r_1 + (1/2)(N-1)d \sin \theta]} \frac{\sin \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi} = \\ = A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr} \frac{\sin \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi}, \quad (52)$$

где величина

$$r \equiv r_1 + \frac{1}{2}(N-1)d \sin \theta = r_1 + \frac{1}{2}D \sin \theta. \quad (53)$$

определяет расстояние от точки P до центра группы антенн. Взяв реальную часть выражения (52), получим для поля в точке P

$$E(r, \theta, t) = \left[\frac{A(r) \sin \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi} \right] \cos(kr - \omega t) \equiv \\ \equiv A(r, \theta) \cos(kr - \omega t). \quad (54)$$

Покажем, что для $N=2$ уравнение (54) дает такой же результат, что и уравнения (12) и (13) в п. 9.2. Используя равенства $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, где $x = \Delta \varphi/2$, имеем

$$E(r, \theta, t) = A(r) \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta \varphi \cos \frac{1}{2} \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi} \cos(kr - \omega t) = \\ = [2A \cos \frac{1}{2} \Delta \varphi] \cos(kr - \omega t),$$

что согласуется с результатами, полученными раньше.

Дифракционная картина от одной щели. Устремим N к бесконечности, не меняя ширины щели D . Расстояние d при этом стремится к нулю. Разность фаз $\Delta \varphi$ между колебаниями двух соседних антенн также стремится к нулю. Полный сдвиг фаз Φ между колебаниями первой и N -й антенн в точке P точно равен $(N-1)\Delta \varphi$. При большом N фазовый сдвиг можно считать приблизительно равным $N \Delta \varphi$:

$$\Phi = (N-1) \Delta \varphi = kD \sin \theta, \quad (55)$$

$$\Phi \approx N \Delta \varphi, \quad N \gg 1. \quad (56)$$

Модулированная амплитуда [равенство (54)] равна

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi} \approx A(r) \frac{\sin \frac{1}{2}\Phi}{\sin [\frac{1}{2}(\Phi/N)]}. \quad (57)$$

В пределе, когда N достаточно велико, мы можем пренебречь в разложении $\sin [\frac{1}{2}(\Phi/N)]$ в уравнении (57) в ряд Тейлора всеми членами, кроме первого:

$$\sin \frac{1}{2} \frac{\Phi}{N} \approx \frac{1}{2} \frac{\Phi}{N}, \quad (58)$$

$$A(r, \theta) = NA(r) \frac{\sin \frac{1}{2}\Phi}{\frac{1}{2}\Phi}. \quad (59)$$

Сделаем еще одно упрощение. По мере того, как N устремляется к бесконечности, мы должны устремить $A(r)$ к нулю, но при этом произведение $NA(r)$ должно оставаться постоянным, поскольку мы хотим иметь одинаковый вклад от данного бесконечно малого элемента dx непрерывной группы источников независимо от того, сколько антенн содержит группа. (Напомним, что мы используем антенны Гюйгенса.) Заметим, что когда θ стремится к нулю, то и Φ стремится к нулю, а отношение $\sin \frac{1}{2}\Phi / \frac{1}{2}\Phi$ стремится к единице:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots = 1 \quad \text{для } x=0.$$

В соответствии с уравнением (59) $A(r, 0) = NA(r) \cdot 1$, и окончательно получим

$$E(r, \theta, t) = A(r, 0) \left[\frac{\sin^{1/2} \Phi}{1/2 \Phi} \right] \cos(kr - \omega t), \quad (60)$$

где

$$\Phi = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda}. \quad (61)$$

Угловая зависимость (при заданном r) среднего во времени потока энергии получается из уравнения (60):

$$I(r, \theta) = I_{\text{макс}} \frac{\sin^2 1/2 \Phi}{(1/2 \Phi)^2}. \quad (62)$$

Распределения амплитуды и интенсивности показаны на рис. 9.14.

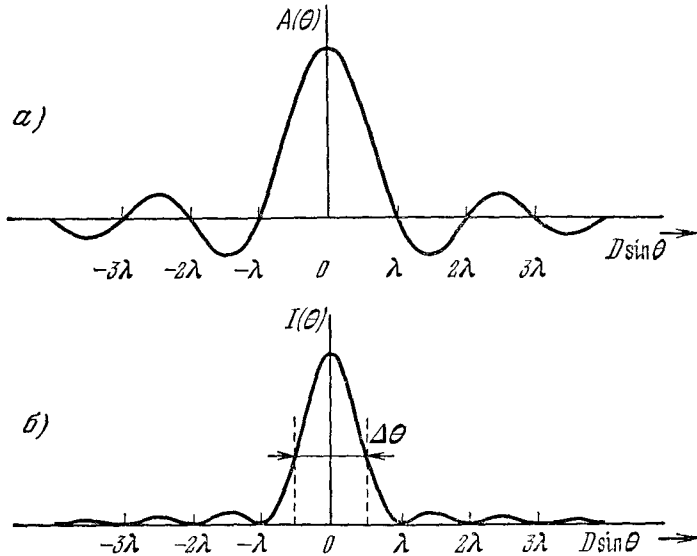


Рис. 9.14. Дифракция от одной щели.

а) Амплитуда. б) Интенсивность. Угловой интервал $\Delta\theta$, простирающийся от $-1/2 \lambda/D$ до $+1/2 \lambda/D$, приблизительно отвечает (для малых углов) «полной ширине для половинной интенсивности». Более точно, интенсивность на границах интервала составляет $(2/\pi)^2 = 0,41$ интенсивности в максимуме.

Угловой разброс пучка, ограниченного дифракцией. Теперь мы можем подтвердить полученный в п. 9.5 результат, согласно которому пучок шириной D имеет угловой разброс порядка λ/D . Точная зависимость амплитуды и интенсивности от угла θ показана на рис. 9.14. Основное свойство графика интенсивности заключается в том, что интенсивность велика только в интервале углов между $\theta = -1/2 \lambda/D$ и $\theta = +1/2 \lambda/D$:

$$\Delta\theta = \lambda/D. \quad (63)$$

Простейший способ наблюдения дифракционной картины от одной щели состоит в следующем. Возьмите два маленьких куса

бумаги с прямыми краями и расположите куски бумаги (в руках) так, чтобы края были параллельны, т. е. чтобы образовалась щель. Посмотрите через эту щель на точечный или линейный источник так, чтобы щель была параллельна источнику. Расположите щель близко перед глазами. Изменяйте ширину щели от «нуля» до «бесконечности», где «нуль» — это нуль, а «бесконечность» — это примерно 1 мм. Хорошую щель можно получить, смотря между зубцами обычной обеденной вилки. Расположите вилку близко перед глазами. Расстояние между зубцами вилки слишком велико, поэтому вы должны поворачивать ее до тех пор, пока проекция этого расстояния не станет достаточной малой. Поворачивая вилку, вы можете менять величину проекции и наблюдать за изменением интерференционной картины. С помощью быстрых (и грубых) измерений можно (грубо) проверить справедливость уравнения (63). См. домашний опыт 9.17.

Разрешающая способность глаза. Возьмите миллиметровую шкалу или сделайте метки на листе белой бумаги и найдите расстояние от бумаги до глаза, на котором метки покажутся совпадающими друг с другом, т. е. неразрешимыми. Обычно, если расстояние между метками равно 1 мм, то они плохо разрешимы на расстоянии в 2 м и совсем неразрешимы на расстоянии 4 м. Таким образом, если глаз находится в центре поля зрения (т. е. когда вы смотрите прямо на линии), то предельное значение углового разрешения близко к $\Delta\theta \approx 1 \text{ мм}/2 \text{ м} = 1/2000$. Теперь посмотрите в зеркало и с помощью линейки, расположенной близко к глазу, измерьте диаметр D вашего зрачка. Обычно $D \approx 2 \text{ мм}$. Дифракционный предел углового разрешения вашего глаза определяется угловым размером изображения пятна от падающей плоской волны, испущенной удаленным точечным источником, на сетчатке глаза. Полный угловой разброс изображения удаленной точки равен

$$\Delta\theta \text{ (дифракционный предел)} \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{5,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}}{0,2 \text{ см}} \approx \frac{1}{4000}.$$

Таким образом, наш глаз (и мозг) воспринимает две точки как разрешенные, если угловое расстояние между ними равно удвоенному значению дифракционной ширины.

Для того чтобы доказать, что (грубое) согласие между разрешающей способностью глаза и углом дифракции не случайно, повторите описанный опыт, но смотрите через дырочку, сделанную, например, в листе бумаги. Если диаметр вашего зрачка равен 2 мм, то диаметр дырочки должен быть 1 мм. Ухудшится ли при этом угловое разрешение вашего глаза? Во сколько раз?

Критерий Рэлея. Если угловое расстояние между двумя точками равно дифракционной ширине λ/D , то, в соответствии с рис. 9.14,б, максимум интенсивности от одной точки будет совпадать с первым минимумом на графике интенсивности для второй точки. В этом случае точки еще разрешимы. Этот критерий разрешимости носит название критерия Рэлея.

Ширина изображения точки на вашей сетчатке примерно равна произведению фокусного расстояния линзы (хрусталика) вашего глаза на угловую ширину изображения точки. Фокусное расстояние f приблизительно равно внутреннему диаметру глаза. Когда вы смотрите на удаленный объект, этот диаметр равен примерно 3 см. Поэтому ширина изображения пятна на сетчатке от удаленной точки близка к $f(\lambda/D) = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-5} / 0,2 \approx 8$ мкм. Тот факт, что разрешающая способность нашего глаза ограничена дифракционным пределом, говорит о том, что фоторецепторы в центре сетчатки отделены друг от друга расстоянием, не большим чем 8 мкм.

Один астронавт, летавший вокруг Земли на расстоянии 240 км, утверждал, что он мог различать отдельные дома в деревнях, когда пролетал над ними. Верите ли вы ему?

Терминология. Дифракция Фраунгофера и дифракция Френеля. При рассмотрении дифракционной картины от щели или отверстия мы предполагали, что имеем приходящую плоскую волну (от далекого точечного источника S). Мы также считали, что регистрируем излучение, испускаемое щелью под определенным углом. Это значит, что мы рассматривали суперпозицию волн, распространяющихся по параллельным направлениям к точке детектирования P , и либо P находится очень далеко от щели, либо мы используем линзу (например, хрусталик глаза), чтобы сфокусировать волны в точку P (расположенную, например, на сетчатке глаза). Дифракция, наблюдаемая при выполнении двух этих условий — плоская падающая волна и дифрагированная волна, испущенная в заданном направлении, — называется *дифракцией Фраунгофера*. Если линзы не используются, то для выполнения этих условий точечный источник S и детектор P должны находиться в «далекой зоне» щели. Чтобы определить, находится ли источник S (например) в «далекой зоне», допустим, что щель расположена в плоскости, перпендикулярной линии от источника до центра щели. Рассмотрим пространственные конусы, вершины которых — в источнике S , а образующие соединяют S со всеми точками площади щели. Если длины образующих практически одинаковы, то S находится в «далекой зоне» щели. Под «практически одинаковыми» длинами мы подразумеваем различие в длине, меньшее $1/2\lambda$. В этом случае фронт волны, падающей на щель, можно считать плоским. Аналогичная оценка справедлива и для точки P , в которой расположен детектор.

Нетрудно показать, что для щели с шириной D точка, находящаяся на расстоянии L , будет в далекой зоне, если выполнено условие

$$L\lambda \gg (1/2 D \cos \theta)^2,$$

где $1/2 D \cos \theta$ — проекция половины ширины щели на направление, перпендикулярное линии, соединяющей щель с точкой. Если одно из двух условий, необходимых для дифракции Фраунгофера, не выполняется (т. е. или точечный источник S , или точка детектирования P не находятся в далекой зоне щели), то мы имеем

случай дифракции, называемой *дифракцией Френеля* (рассматривать этот случай детально мы не будем).

Фурье-анализ выражения для угловой расходимости когерентного источника. Результат, выражаемый равенством (63), можно представить в несколько ином виде. Введем в рассмотрение отдельную частотную компоненту бегущей волны и будем считать ее совершенно монохроматичной. В этом случае полоса частот $\Delta\omega$ равна нулю. Что можно сказать о векторе распространения? Квадрат вектора распространения равен $k^2 = \omega^2/c^2$ (для света в вакууме). Поэтому k^2 должно иметь совершенно определенное значение, если значение ω^2 известно. Но это не значит, что каждая компонента k должна иметь определенное значение. Величина k^2 равна сумме квадратов соответствующих компонент:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (64)$$

где k_x определяет число радиан фазы на единицу длины вдоль оси \hat{x} , соответственно k_y — вдоль \hat{y} и k_z — вдоль \hat{z} . Если пучок не ограничен дифракцией, а представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль $+z$, то k_x и k_y будут равны нулю. Для фурье-компоненты (т. е. составляющей с определенной частотой) ограниченного дифракцией пучка с вектором распространения в плоскости xz , образующим угол θ с осью z , имеем $k_y = 0$, $k_x = k \sin \theta$ и $k_z = k \cos \theta$. Для малых углов $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$. Итак, x -компонента вектора k равна

$$k_x \approx k\theta. \quad (65)$$

Но мы уже видели, что угловой разброс пучка относительно основного направления z равен

$$\Delta\theta \approx \lambda/D. \quad (66)$$

Поэтому разброс значений k_x равен [используем равенства (65) и (66)]

$$\Delta k_x \approx k \Delta\theta \approx k\lambda/D = 2\pi/D.$$

Обозначив полную ширину пучка D в направлении x через Δx , получим

$$\Delta k_x \Delta x \geq 2\pi. \quad (67)$$

Неравенство напоминает нам о том, что дифракционный предел достигается лишь в том случае, если источники когерентны.

Выразим сказанное в более явном виде. В соответствии с построением Гюйгенса мы должны рассмотреть излучающую пластину, состоящую из источников, равномерно распределенных вдоль оси x от $x = -D/2$ до $x = +D/2$. Все источники имеют одинаковую амплитуду и фазовую постоянную. График зависимости амплитуды источников от x обращается в нуль всюду, за исключением области шириной D , центр которой в начале координат. Таким образом, по координате x мы имеем дело с «прямоугольной волной»,

Мы можем применить к этой «волне» (импульсу) фурье-анализ и представить ее в виде суперпозиции синусоидальных функций $\sin k_x x$ и $\cos k_x x$ точно так же, как это было сделано для прямоугольного временного импульса, который был разложен по функциям $\cos \omega t$. Выражение (6.95) из п. 6.4 дает преобразование Фурье для временного прямоугольного импульса $f(t)$ с высотой $1/\Delta t$ и шириной Δt :

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^{1/2} \omega \Delta t}{^{1/2} \omega \Delta t}, \quad (68)$$

По аналогии прямоугольный импульс $f(x)$ протяженностью D и высотой $1/D$ должен иметь следующее преобразование Фурье:

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^{1/2} k_x D}{^{1/2} k_x D}, \quad (69)$$

но

$$k_x D = k D \sin \theta = \Phi. \quad (70)$$

Поэтому

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^{1/2} \Phi}{^{1/2} \Phi}. \quad (71)$$

Сравнивая уравнения (71) и (60), мы видим, что амплитуда поля, регистрируемого под углом θ (который задан через k_x), равна (с точностью до постоянного множителя) фурье-преобразованию амплитуды источника в щели (т. е. фурье-преобразованию прямоугольного импульса). В щели амплитуда колебаний равна $f(x) \cos \omega t$, где $f(x)$ — сила источника (для нашего случая сила источника постоянна по всей ширине щели). На расстоянии r и в направлении θ бегущая волна получается заменой $\cos \omega t$ на $\cos(\omega t - kr)$ и $f(x)$ — на фурье-преобразование $B(k_x)$. Другой поперечный размер пучка y удовлетворяет соотношению, аналогичному уравнению (67), но с заменой x на y .

Важные результаты фурье-анализа. Учитывая результаты фурье-анализа для продольной компоненты k_z волнового вектора, а также результаты частотного фурье-анализа, имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta k_x \Delta x &\geq 2\pi, & \Delta k_z \Delta z &\geq 2\pi, \\ \Delta k_y \Delta y &\geq 2\pi, & \Delta \omega \Delta t &\geq 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Фурье-анализ дает нам мощный метод вычисления дифракционной картины. Однако здесь мы не будем этим заниматься (см. задачу 9.59).

Дифракционная картина от двух широких щелей. Две параллельные щели можно получить следующим образом. Плотно прикрепите лентой скотча или приклейте по краям предметного стекла микроскопа кусок тонкой алюминиевой фольги. Используя, например, в качестве линейки второе предметное стекло микроскопа, осторожно процарапайте по фольге прямую линию с помощью лезвия бритвы. Вторую щель проведите как можно ближе к первой, стараясь не испортить ее. Нетрудно прорезать две щели с расстоянием между ними, меньшим 0,5 мм. Расположив щели близко к

глазу, посмотрите на линейный источник. Сделайте это с красным фильтром и без него. Близко расположенные друг к другу интерференционные полосы соответствуют интерференционной картине от двух щелей. Угловое расстояние между полосами равно λ/d радиан (полагаем $\sin \theta \approx \theta$). Теперь сделайте описанным выше способом одну щель (можно на этом же предметном стекле) и сравните картины от одной и двух щелей. Обратите внимание на то, что картина от двух щелей модулирована картиной от одной щели (рис. 9.15).

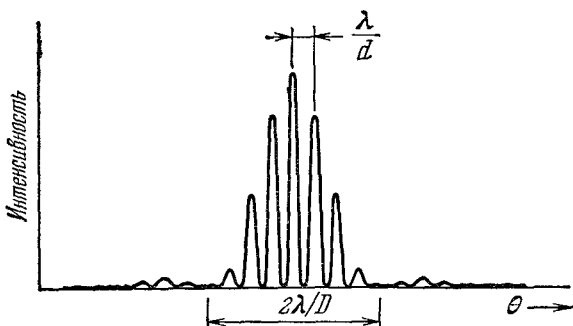


Рис. 9.15. Дифракция от двух щелей для случая, когда расстояние между щелями d в 4 раза больше ширины каждой щели. Величины углового расстояния λ/d и полной ширины $2\lambda/D$ получены для приближения малого угла $\sin \theta \approx \theta$.

Обычно довольно трудно разглядеть картину от двух щелей, за исключением той ее части, которая лежит в области главного максимума картины от одной щели. (Имея красный фильтр и хорошо сделанную двойную щель, можно разглядеть и другие части дифракционной картины.)

Приведем объяснение возникновения картины. Каждая щель является источником электрического поля, регистрируемого детектором (сетчаткой глаза). Поле от каждой щели имеет определенную амплитуду и фазовую постоянную. Эта постоянная вклада от всей щели такая же, как и от отдельного (дифференциального) вклада («антенны»), поступающего из центра щели. Действительно, в выражение для волны от одной щели входит множитель $\cos(kr - \omega t)$, где r — расстояние от центра щели до детектора. [См. формулы (60) и (53).] Амплитуда волны от одной щели пропорциональна $\sin^{1/2} \Phi / \Phi$, где Φ — разность фаз вкладов от противоположных краев щели. Когда мы имеем две такие щели, расстояние между которыми d , то фаза вклада от каждой щели совпадает с фазой от узкой щели, мысленно расположенной в центре данной щели. Таким образом, картина получается такой же, как и ранее рассмотренная картина (п. 9.2) дифракции от двух узких щелей, за тем исключением, что постоянная амплитуда $A(r)$ вклада от каждой щели теперь (в случае двух широких щелей) заменяется на множитель,

пропорциональный $\sin^{1/2}\Phi/\lambda/2\Phi$. Другими словами, дифракционная картина от двух бесконечно узких щелей будет *модулирована* функцией $\sin^{1/2}\Phi/\lambda/2\Phi$. Комбинируя полученные ранее результаты для двух узких щелей [формула (13), п. 9.2] с модулирующей функцией, мы найдем, что дифракционная картина (если обе щели возбуждаются с одинаковой фазой) имеет вид

$$E(\theta, t) = A(\theta) \cos(kr - \omega t), \quad (73)$$

$$A(\theta) = A(0) \frac{\sin^{1/2}\Phi}{\lambda/2\Phi} \cos^{1/2}\Delta\Phi, \quad (74)$$

$$\Phi = kD \sin \theta = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda}, \quad (75)$$

$$\Delta\Phi = kd \sin \theta = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}, \quad (76)$$

где D — ширина каждой щели, d — расстояние между щелями и r — расстояние от точки наблюдения P до середины между щелями. Если D стремится к нулю, то центральный максимум постепенно занимает все поле зрения, и мы получаем результат п. 9.2 для двух узких щелей.

Распределение интенсивности $I(\theta)$ пропорционально среднему во времени от квадрата электрического поля. В соответствии с выражениями (73) и (74) мы имеем

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin^{1/2}\Phi}{\lambda/2\Phi} \right)^2 (\cos^{1/2}\Delta\Phi). \quad (77)$$

Множитель $\cos^{1/2}\Delta\Phi$ обуславливает быстрое чередование интенсивности в зависимости от θ , с расстоянием между отдельными максимумами в λ/d . Член $(\sin^{1/2}\Phi/\lambda/2\Phi)^2$ определяет форму модулирующей функции, полная угловая ширина которой на половине интенсивности равна λ/D . Полная ширина углового интервала между нулями интенсивности с обеих сторон центрального максимума равна $2\lambda/D$. Сосчитав число «двухщелевых полос» в центральном максимуме, определяемом модуляционной функцией от одной щели, мы можем найти отношение d/D для наших двух щелей. Распределение интенсивности, соответствующее формуле (77), показано на рис. 9.15.

Дифракционная картина от многих одинаковых и параллельных широких щелей. Из приведенного выше описания дифракционной картины от двух широких щелей следует, что при большом числе таких щелей дифракционную картину легко получить умножением амплитудной модулирующей функции $\sin^{1/2}\Phi/\lambda/2\Phi$ на интерференционную картину, полученную в предположении, что щели узкие.

Интерференционная картина от многих щелей. Рассмотрим зависимость интерференционной картины, созданной большим количеством (N) «антенн» (рис. 9.13), от числа N . (Вместо антенн можно рассматривать N узких щелей.) Перепишем уравнение (54),

определяющее амплитуду для узких щелей:

$$E(r, \theta, t) = A(r, \theta) \cos(kr - \omega t), \quad (78)$$

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin^{1/2} N \Delta\varphi}{\sin^{1/2} \Delta\varphi}, \quad (79)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}. \quad (80)$$

Главные максимумы, центральный максимум, источник белого света. Углы, для которых знаменатель (и числитель) выражения (79) обращается в нуль, равны $\Delta\varphi/2 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ и т. д. Для таких углов разность хода $d \sin \theta$ равна $0, \pm\lambda$ и т. д., что соответствует полностью конструктивной интерференции между всеми N антеннами. Максимумы, получаемые при этом, называются *главными максимумами*:

$$d \sin \theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots, m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (81)$$

Максимум при $\theta = 0$ называется *центральным максимумом* или *максимумом нулевого порядка*. Максимумы при $m = \pm 1$ называются *максимумами первого порядка* и т. д. Центральный максимум отличается от остальных главных максимумов одним важным свойством: вклады от всех антенн в центральный максимум находятся в фазе *независимо от длины волны*. Поэтому *в случае белого источника центральный максимум белый*. Для всех других главных максимумов положение максимума зависит от длины волны, т. е. от цвета.

Для главного максимума амплитуда суперпозиции будет в N раз больше амплитуды вклада от каждой щели (антенны). Физически это очевидно и непосредственно следует из выражения (79), так как для центрального максимума $\Delta\varphi = 0$ и отношение $\sin Nx / \sin x$ (мы полагаем $\Delta\varphi/2 = x$) равно

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - \frac{1}{6}(Nx)^3 + \dots}{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots} = N \frac{\left[1 - \frac{1}{6}(Nx)^2 + \dots\right]}{\left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots\right]} = N \quad (82)$$

для $x \rightarrow 0$.

Для максимума первого порядка ($m = \pm 1$) мы можем показать, что предел $\sin Nx / \sin x$ при x , стремящемся к π , равен $\pm N$. Введем для этого малый угол ε , учитывающий отличие x от π :

$$x = \pi - \varepsilon, \quad \frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\varepsilon)}{\sin(\pi - \varepsilon)} = (-1)^{N+1} \frac{\sin N\varepsilon}{\sin \varepsilon}. \quad (83)$$

При стремлении ε к нулю мы получаем, что предел отношения равен $(-1)^{N+1} N = \pm N$.

Угловая ширина главного максимума. С увеличением N угловая ширина главных максимумов уменьшается. Исследуя выражение (79), легко получить угловой интервал от главного максимума до первого нуля или интервал от максимума до максимума. Для главного максимума и числитель и знаменатель равны нулю. Когда

аргумент $\frac{1}{2}N \Delta\phi$ синусоидальной функции в числителе уравнения (79) возрастет на π , числитель снова обратится в нуль. (Знаменатель при этом не равен нулю.) Таким образом, при перемещении от главного максимума до первого нуля амплитуды произошло приращение фазы $\Delta\phi$ на $2\pi/N$. Этому соответствует приращение разности хода $d \sin \theta$, равное λ/N . Мы знаем, что приращение разности хода между двумя последовательными главными максимумами равно λ . Учитывая это, можно сказать, что амплитуда падает от максимальной до нуля на интервале значений $\sin \theta$, который в N раз уже интервала λ/d , определяющего расстояние между соседними главными максимумами.

Для большого N или для четного N (большого или малого) легко показать, почему первый нуль появляется, когда приращение разности хода $d \sin \theta$ равно λ/N . Предположим, что мы имеем 6 антенн. Первый нуль возникает, когда первые три могут быть спарены с последними тремя в «уничтожающие» друг друга пары, так что 1-я антенна уничтожает 4-ю, 2-я — 5-ю и 3-я — 6-ю. Первая и четвертая антенны уничтожат вклады друг друга при разности хода в $\frac{1}{2}\lambda$ (то же справедливо и для остальных пар). В этом случае разность хода между антеннами 1 и 2 равна $\lambda/6$, т. е. λ/N . Когда N нечетно, такое доказательство неприменимо, поскольку антенны не могут быть спарены. В этом случае легче всего получить «визуальное» доказательство, построив векторную диаграмму вкладов амплитуд на комплексной плоскости. Построив такую диаграмму, легко видеть, что N комплексных амплитуд соединяются таким образом, чтобы образовать замкнутый многоугольник и сделать полную амплитуду равной нулю, когда $\Delta\phi$ равно $2\pi/N$ (задача 9.52). На рис. 9.16 мы показали, как интерференционная картина зависит от N , когда расстояние между щелями d неизменно.

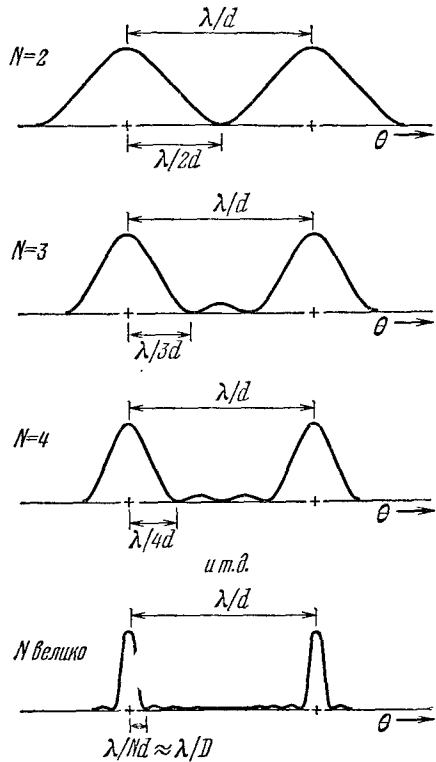


Рис. 9.16. Интерференция от многих щелей. Показаны два главных максимума. При больших N каждый главный максимум имеет форму дифракционной картины от одной щели (см. рис. 9.14, б). Углы показаны для приближения $\sin \theta \approx \theta$.

Вы можете продемонстрировать сужение главных максимумов, когда N возрастает от 2 до 3. С помощью лезвия бритвы сделайте три щели в алюминиевой фольге, закрепленной на предметном стекле микроскопа. Пусть две из них будут длиннее третьей, чтобы можно было переходить от трех щелей к двум, слегка сдвигая предметное стекло перед глазом. После нескольких попыток вы сможете сделать три вполне приличные щели, расстояние d между которыми примерно одинаково и меньше 0,5 мм (после каждой попытки, для проверки, смотрите через щели на свет). Вы легче справитесь с этой задачей, если используете увеличительное стекло с увеличением $2\times$ или $3\times$. Когда вы смотрите на линейный источник через две щели, то яркие полосы выглядят чуть более широкими, чем темные области, их разделяющие. При трех щелях яркие области будут уже, чем черные интервалы между ними. Однако, если вам не удастся сделать одинаковые щели на равном расстоянии друг от друга, вы получите другую картину.

Прозрачная дифракционная решетка. Вместо N антенн или N щелей в непрозрачном экране можно иметь N параллельных царапин на куске гладкого стекла или пластика шириной D . Без царапин свет дал бы интерференционную картину, соответствующую одной широкой щели шириной D . Царапины действуют подобно антеннам. Они дают интерференционную картину от N царапин, которая аналогична картине от N щелей, — за одним исключением. Центральный максимум (при 0°) определяется вкладом не только всех царапин, но также и от всего прозрачного материала между царапинами. Поэтому центральный максимум будет значительно ярче, чем остальные главные максимумы.

Если рассматривать линейный источник через дифракционную решетку, то мы получим дифракционную картину, каждый главный максимум которой имеет распределение интенсивности, показанное на рис. 9.14, б.

Дифракционная решетка в вашем оптическом наборе *) имеет такую же конструкцию. В ней проведено 13 400 царапин на дюйм, что отвечает $d = 190 \cdot 10^{-4}$ см, т. е. 1,9 мкм. Сколько главных максимумов вы обнаружите для зеленого света с $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ (т. е. 0,55 мкм)? В соответствии с уравнением (81) главные максимумы возникают при значениях $\sin \theta$, равных 0, λ/d и т. д. Конечно, $\sin \theta$ не может быть больше единицы. Для нашей решетки имеем $d \approx 3,5 \lambda$, где $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$. Поэтому, если $\sin \theta = m\lambda/d$, то значения m могут быть $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, но не 4. Теперь посмотрите на зеленую лампу с помощью вашей решетки. Прямо впереди будет центральный максимум ($\theta = 0$), для которого все цвета переменяются. Цветные полосы по бокам представляют собой цветное изображение лампы при углах, определяемых из равенств $d \sin \theta = \lambda$ (первый порядок), $= 2\lambda$ (второй порядок) и т. д. Видны ли вам все три порядка? (Если вы видите четыре порядка, то что-то не в поряд-

*) См. сноску на стр. 15.

ке.) Если вы хотите наблюдать спектр лампы накаливания, то не надо брать большую лампу, так как ее размеры вызовут перекрытие различных «окрашенных ламповых баллонов». Перед лампой можно поместить узкую вертикальную щель (решетку при этом нужно держать так, чтобы она развевывала цвета горизонтально) или взять лампу с прозрачным стеклянным баллоном и прямой нитью длиной около 7 см.

Зная, например, что длина волны зеленого света равна 5500 \AA , легко измерить постоянную d вашей решетки. Посмотрите на лампу через решетку, расположенную близко к глазу, и измерьте угол в радианах (или его синус или тангенс) от главного максимума до «зеленого», используя линейку в вытянутой руке. Воспользуйтесь уравнением (81). Получите ли вы $d \approx 3,5\lambda$? Дальнейшему исследованию свойств решетки посвящены домашние опыты.

Дифракция от непрозрачного препятствия. На рис. 9.12 показан точечный источник S и непрозрачный экран, состоящий из частей a , b и пробки I . Поле за экраном (оно равно нулю) было представлено суперпозицией полей $E_S + E_a + E_b + E_1 = 0$. Когда пробка I вынута, поле за экраном $E_S + E_a + E_b$ должно быть равно $-E_1$. Это рассуждение позволило нам сформулировать принцип Гюйгенса, с помощью которого можно, например, найти дифракционную картину от экрана с отверстием. Теперь нас интересует, что получится, если *оставить пробку и убрать остальные части экрана a и b* .

Пока мы ничего не убрали, справедливо равенство $E_S + E_a + E_b + E_1 = 0$. Теперь уберем a и b и предположим, что движение электронов в пробке I (непрозрачное препятствие) не изменилось. (Это является приближением, потому что на электроны в пробке воздействует как излучение от частей экрана a и b , так и излучение от источника.) Поле за пробкой равно $E_S + E_1$. В близкой области за пробкой (понятие близкой области будет определено) поле будет практически таким, как и при наличии всего экрана, так как части экрана a и b находятся в этом случае далеко от близкой области и их вклад мал по сравнению с $E_S + E_1$. Поэтому в близкой области за пробкой электрическое поле будет практически равно нулю. Это — тень пробки. Она возникает благодаря тому, что в близкой точке за экраном поле (равное нулю) определяется главным образом источником S и близлежащими зарядами, которые в этом случае принадлежат пробке I . Таким образом, вблизи за экраном суперпозиция E_1 и E_S даст нуль. Отсюда следует, что пробка I испускает часть плоской волны в том же направлении, в котором распространяется падающая плоская волна от удаленного источника S . Амплитуда волны от пробки равна амплитуде падающей волны от источника S , а фаза волны от пробки сдвинута на 180° относительно фазы падающей волны, так что суперпозиция $E_S + E_1$ в близкой области равна нулю. Таким образом, получается тень. Непрозрачное препятствие не съедает падающий свет, а излучает пучок света отрицательной амплитуды (т. е. отрицательной относительно

падающего света) в прямом направлении. Комбинация этого пучка с падающей волной дает ноль вблизи за экраном.

Как далеко простирается область тени? Нужно сказать, что пробка не испускает точно плоскую волну света «отрицательной амплитуды», поскольку она имеет конечную ширину (или диаметр) D . Вместо этого она испускает «пучок», основное направление которого совпадает с направлением распространения плоской волны E_S . Этот пучок имеет, однако, связанный с дифракцией разброс углов, ширина которого равна $\Delta\theta \approx \lambda/D$. За время, в течение которого пучок пройдет расстояние L от экрана, появится рассеяние (расхождение) пучка в боковом направлении, определяемое величиной $W \approx L \Delta\theta \approx L(\lambda/D)$. По мере распространения пучка его амплитуда уменьшается. Только когда амплитуда электрического поля пучка равна по величине амплитуде плоской волны E_S , мы имеем нулевую суперпозицию, т. е. тень. В конце концов на достаточно больших расстояниях в направлении распространения пучка тень исчезает. Грубо говоря, свет отрицательной амплитуды, испущенный облучаемым диском, значительно ослабляется, когда дифракционное рассеяние пучка увеличивает его ширину в два раза. Это дает нам грубую «граничную длину» L_0 , на которой $D \approx W_0$. Но так как $W_0 \approx L_0(\lambda/D)$, то мы имеем

$$L_0 \lambda \approx D^2. \quad (84)$$

Таким образом, для $L \ll L_0$ мы рассчитываем иметь прекрасную черную тень за препятствием, за исключением области, близкой к краям (где предположение о неизменности E_1 при отсутствии a и b неверно). Для $L \gg L_0$ обнаружить влияние препятствия будет довольно трудно, так как электрическое поле от него мало по сравнению с полем плоской волны E_S . Препятствие можно легко обнаружить с помощью линзы. Плоская волна E_S будет фокусироваться в небольшое пятно в фокальной плоскости, размер которого равен $f\lambda/D_d$, где D_d — диаметр линзы, а f — фокусное расстояние. Свет отрицательной амплитуды от препятствия даст изображение шириной $f\lambda/D$. Если диаметр линзы значительно больше размера препятствия D , то яркое пятно от плоской волны затемняет только небольшую область в центре изображения.

Дифракционную картину от препятствий можно изучить, используя в качестве точечного источника электрический фонарь. Один из удивительных результатов — это яркое пятно в центре тени, наблюдаемое при расстоянии $L \gg L_0$. (См. домашний опыт 9.34.)

Уравнение (84) может быть проверено и не для световых волн. Его можно проверить, положив препятствие на пути пучка бегущих волн на водной поверхности. Тень будет появляться при $L \ll L_0$ и пропадать при $L \gg L_0$. (См. домашний опыт 9.29.)