

9.7. Геометрическая оптика

Геометрическая оптика изучает поведение световых лучей (пучков) в оптических инструментах (которые состоят из различных отражающих и преломляющих поверхностей). Она рассматривает только главные направления распространения лучей (пучков) и не интересуется рассеянием лучей вследствие дифракции. (Если при рассмотрении световых явлений учитывается волновая природа света, включающая понятия интерференции и дифракции, то используется термин «физическая оптика».) Основные законы геометрической оптики — это закон зеркального отражения и закон преломления Снеллиуса. Конечно, оба эти закона в действительности определяются волновой природой света и являются следствием конструктивной интерференции.

Зеркальное отражение. Зеркальное отражение возникает всякий раз, когда плоская волна падает на гладкую плоскую поверхность. Зеркальное отражение определяется следующими условиями: а) отраженный луч лежит в плоскости падения (эта плоскость образована падающим лучом и нормалью к поверхности), и б) угол отражения равен углу падения (оба угла измеряются от нормали).

Зеркальное отражение возникает благодаря конструктивной интерференции. Электроны в веществе находятся под действием падающей волны. Поэтому они излучают. Направление зеркально отраженного луча является направлением, которому соответствует максимум конструктивной интерференции.

Это легко себе представить, рассмотрев уже знакомую нам линейную группу антенн. Предположим, что токи в антеннах определяются электрическим полем падающей плоской волны. Пусть угол θ между направлением волны и направлением ряда антенн (рис. 9.17) не равен 0° (не нормальное падение).

Теперь рассмотрим ту часть далекого поля, которая вызвана только токами в антеннах. Вначале рассмотрим центральный интерференционный максимум. Легко видеть, что он возникает в направлении распространения падающего пучка. Антенна 1 возбуждается раньше антенны 2 и поэтому начнет излучать раньше ее. В удаленной точке P излучение от антенн 1 — N будет точно в фазе, если направление, в котором происходит излучение антенн, совпадает с направлением падающего на антенны излучения; например, некоторый гребень волны от антенны 1 должен пройти дальше, чем гребень от антенны N , но нужно помнить, что и излучать антенна 1 начала раньше антенны N .



Рис. 9.17. Ряд антенн, возбуждаемых наклонно падающей волной.

Штриховые линии перпендикулярны плоскости антенн. Стрелками показано направление распространения волны. Угол падения волны равен θ .

Очевидно, что, вследствие симметрии группы антенн, антенны, возбужденные так, как показано на рис. 9.17, будут давать центральный интерференционный максимум не только справа (на чертеже), но и слева. Этот мнимый максимум представляет собой зеркально отраженное излучение. Из рис. 9.18 мы видим, что угол отражения равен углу падения.

Зеркальное отражение от любой гладкой плоской поверхности происходит благодаря конструктивной интерференции, возникающей таким же образом, как и в случае близко расположенных антенн.



Рис. 9.18. Направления интерференционного максимума для антенн, возмущаемых с фазовыми соотношениями рис. 9.17.

Незеркальное отражение от периодической структуры. Центральный максимум и максимум, возникающий в результате зеркального отражения, не являются единственными интерференционными максимумами, образованными группой антенн (см. рис. 9.17 и 9.18). Наряду с этими максимумами нулевого порядка в прошедшей и отраженной волнах существуют также максимумы в тех направлениях, для которых разность хода от смежных антенн до детектора больше (или меньше) на целое число длин волн, чем разность хода, определяющая максимум нулевого порядка. Интерференционная картина для прошедших волн (на рис. 9.18 распространяющихся вправо) аналогична интерференционной картине от дифракционной решетки с N щелями при косом падении света. Интерференционная картина, образованная отраженными волнами, аналогична картине от проходящих волн, за тем исключением, что отраженный центральный максимум не такой яркий, как центральный максимум, образованный прошедшими волнами. Вы можете убедиться в существовании интерференционной картины в отраженном от регулярной группы свете, используя прозрачную дифракционную решетку как *отражающую решетку*, т. е. расположив ее близко к глазу и рассматривая точечный источник в отраженном свете. Отражение (зеркальное) нулевого порядка (т. е. центральный максимум) легко определить, поскольку оно «белое». Отраженные максимумы ненулевого порядка аналогичны максимумам, образованным проходящими волнами при таком же косом угле падения.

Если расстояние между соседними антеннами меньше длины волны, то существует лишь одно направление (максимум нулевого порядка), соответствующее полностью конструктивной интерференции. Это — направление центрального максимума, которому соответствует зеркальное отражение. При изучении геометрической оптики и оптических инструментов мы обычно имеем дело с видимым светом, падающим на поверхность стекла или металла. Антеннами в этом случае являются атомы на поверхности, расстояние между которыми порядка 10^{-8} см. Поэтому для видимого света с длиной волны около

$5 \cdot 10^{-5}$ см мы можем получить только максимум нулевого порядка. (Для рентгеновских лучей, длина волны которых порядка 10^{-8} см, при отражении от поверхности некоторых кристаллов можно получить максимумы более высокого порядка.) Мы будем иметь дело с оптическими инструментами, в которых используется видимый свет. Поэтому можно ограничиться рассмотрением зеркального отражения (т. е. максимума нулевого порядка в отраженном свете).

Изображение точечного источника в зеркале; мнимый и реальный источники. Поверхность постоянной фазы излучения от точечного источника представляет собой сферу. Достаточно малые части поверхности сфер могут быть аппроксимированы плоскостями, и мы можем называть плоскую волну излучения, проходящую через такую малую поверхность, *лучом*. На рис. 9.19 показан точечный

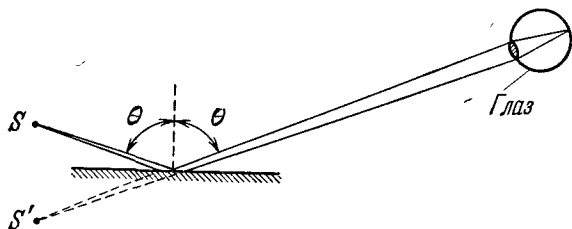


Рис. 9.19. Мнимое изображение S' реального точечного источника S в плоском зеркале.

источник, рассматриваемый с помощью зеркала. Излучение, проходящее через апертуру линзы, может рассматриваться как «пучок лучей». Два луча из этого пучка показаны на рис. 9.19. Каждый из них зеркально отражен от поверхности зеркала. Свет, падающий в глаз, кажется пришедшим от точечного источника S' , расположенного за зеркалом. Источник S' называется *мнимым*, поскольку в действительности его не существует. (Источник S называется *реальным* источником.)

Преломление; закон Снеллиуса; принцип Ферма. Мы привели два вывода закона Снеллиуса. Один вывод основывался на простых геометрических построениях (п. 4.3). Другой — на том факте, что число гребней волны, приходящихся на единицу длины, вдоль границы раздела двух сред одинаково с обеих сторон от границы (п. 7.2). Оба эти вывода используют понятие плоской волны. Поскольку геометрическая оптика всегда оперирует с лучами, т. е. с узкими пучками света, то мы приведем третий вывод этого закона, основанный на понятии пучка, ограниченного дифракцией. При этом выводе мы не будем рассматривать рассеяние пучка вследствие дифракции.

Вначале рассмотрим пучок, распространяющийся в однородном куске стекла с показателем преломления n (рис. 9.20). Рассмотрим атом a в середине пучка. Пучок (излучение) действует на атом, который излучает во всех направлениях. Излучение этого атома помогает (пучку) воздействовать на атомы b , c и d . Суперпозиция излу-

чения от этих атомов помогает воздействовать на атом e (который также находится в центре пучка). Далее, пучок является результатом конструктивной интерференции. Это значит, что если атомы b и d лежат достаточно близко с обеих сторон от c , то фазы вкладов от всех трех атомов b , c и d в суперпозицию, воздействующую на e , одинаковы благодаря тому, что они испытывают воздействие со стороны атома a . Другими словами, времена распространения волн с фазовой скоростью c/n от a к b и e , от a к c и e и от a к d и e должны быть примерно равны, если a , c и e лежат вдоль направления луча, а b и d достаточно близки к c . Если это не так, то излучение от отдельных возбуждаемых пучком атомов не будет складываться таким образом, чтобы создать конструктивную интерференцию.

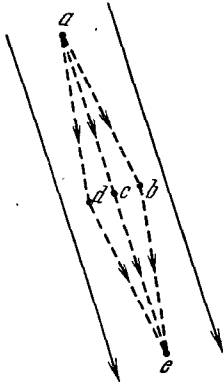


Рис. 9.20. Распространение пучка света в стекле. Стрелки указывают ширину пучка и направление распространения. Точки a , b , c , d и e — атомы стекла.

Из рис. 9.20 следует, что если a , c и e лежат вдоль пучка, то соседние пути \overline{abe} и \overline{ade} чуть-чуть больше, чем путь \overline{ace} . Когда мы говорим, что эти пути чуть-чуть больше или что они примерно равны \overline{ace} , мы имеем в виду, что если, например, b имеет небольшие поперечные смещения x от c , то путь \overline{abe} превысит \overline{ace} на величину, пропорциональную квадрату x , а не первой степени x . Таким образом, при разложении в ряд Фурье длины пути по параметру x первая производная исчезает (исчезает тот член ряда, который дает вклад, пропорциональный x).

В действительности имеет значение не длина пути, а время распространения. Существует принцип, согласно которому пучок света распространяется по такому пути, чтобы производная времени распространения по x была равна нулю [x — параметр, равный нулю для пути пучка (подобного \overline{ace}) и отличный от нуля для соседнего пути (подобного \overline{abe} или \overline{ade})]. Этот принцип означает, что время распространения вдоль пучка является экстремальным (минимальным). Он называется *принципом наименьшего времени Ферма* или просто *принципом Ферма*.

Используем принцип Ферма для вывода закона Снеллиуса. На рис. 9.21 показан атом a в среде 1 и атом e в среде 2. (Они являются аналогами атомов a и e на рис. 9.20.) Нам нужно определить положение точки P , т. е. положение точки пересечения пучка \overline{aP} с плоскостью. Время распространения волны вдоль пути \overline{aP} равно $t_1 = l_1 n_1 / c$, а вдоль пути \overline{Pe} $t_2 = l_2 n_2 / c$. Расстояния $ct_1 = n_1 l_1$ и $ct_2 = n_2 l_2$ называются *оптическими длинами*. Полная оптическая длина $c(t_1 + t_2)$ минимальна, если минимально полное время распространения. Таким образом, мы хотим найти точку P , для

которой было бы справедливо равенство

$$\text{Оптическая длина} \equiv n_1 l_1 + n_2 l_2 = \text{минимум.} \quad (85)$$

Из рис. 9.21 имеем

$$\text{Оптическая длина} = n_1 (y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 (y_2^2 + x_2^2)^{1/2}. \quad (86)$$

Сдвинем точку P на бесконечно малое расстояние от положения (которое еще не известно), дающего минимальный оптический путь. Обозначим через d (опт. дл.) изменение оптической длины в результате такого смещения. Чтобы найти d (опт. дл.), продифференцируем уравнение (86). Поскольку P смещается вдоль границы, то переменными являются только x_1 и x_2 . Так как положение атомов a и e неизменно, то сумма $x_1 + x_2$ постоянна и приращение dx_2 вследствие смещения точки P будет равно приращению dx_1 , взятому с обратным знаком. Таким образом, имеем

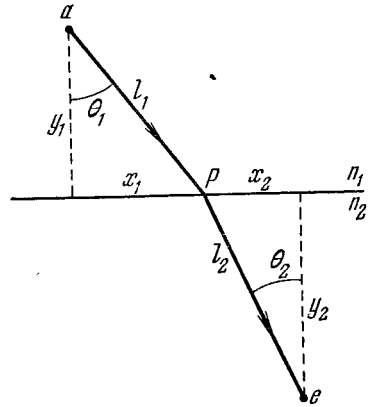


Рис. 9.21. Преломление.

Оптическая длина пути $l_1 n_1 + l_2 n_2$ зависит от положения точки P . В соответствии с принципом Ферма свет из a в e проходит по траектории, для которой оптическая длина пути минимальна. В этом случае траектория aPe расположена вдоль интерференционного максимума, аналогично траектории ase на рис. 9.20.

$$\begin{aligned} d(\text{опт. дл.}) &= n_1 dl_1 + n_2 dl_2 = \\ &= n_1 d(y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 d(y_2^2 + x_2^2)^{1/2} = \\ &= \frac{n_1 x_1 dx_1}{(y_1^2 + x_1^2)^{1/2}} + \frac{n_2 x_2 dx_2}{(y_2^2 + x_2^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{n_1 x_1}{l_1} dx_1 + \frac{n_2 x_2}{l_2} (-dx_1). \quad (87) \end{aligned}$$

В уравнении (87) можно пренебречь членами более высокого порядка, включающими dx_1^2 , dx_1^3 и т. д. Теперь предположим, что точка P выбрана так, что aPe совпадает с направлением пучка. Тогда, в соответствии с принципом Ферма, производная первого порядка по x_1 равна нулю. Из уравнения (87) имеем

$$d(\text{опт. дл.}) = 0 = \left[\frac{n_1 x_1}{l_1} - \frac{n_2 x_2}{l_2} \right] dx_1,$$

т. е.

$$n_1 \frac{x_1}{l_1} = n_2 \frac{x_2}{l_2},$$

т. е.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (88)$$

что и есть закон Снеллиуса.

Теперь рассмотрим некоторые основные оптические устройства. **Эллиптическое зеркало.** На рис. 9.22 мы видим полый эллипсоид вращения с зеркальной внутренней поверхностью и с точечным

источником F , расположенным в одном из главных фокусов. Из определения эллипса следует, что расстояние от F до второго фокуса F' одинаково для всех лучей. Поэтому фокус F' является местом полной конструктивной интерференции для излучения, испущенного электронами на поверхности, которые в свою очередь находятся под воздействием излучения из F . Мы говорим, что источник, расположенный в F , *изображается* в точке F' .

Изображение в F' не является точкой, фаза результирующего поля в точке около F' может лежать в диапазоне $\pm \pi$ относительно фазы в F' при условии, что точка лежит внутри сферы радиусом примерно $\lambda/4$ с центром в F' . Такова грубая оценка размера изображения в F' .

Вогнутое параболическое зеркало. Предположим, что у эллипсоида

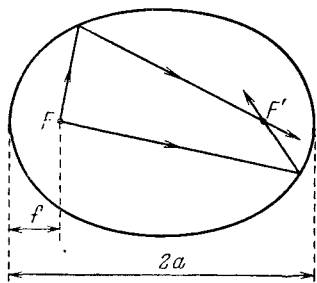


Рис. 9.22. Эллиптическое зеркало.

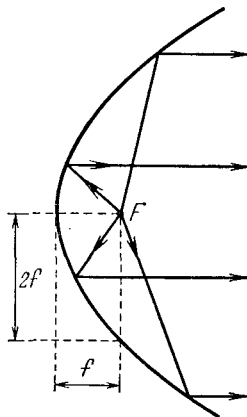


Рис. 9.23. Вогнутое параболическое зеркало.

на рис. 9.22 фокус F и фокусное расстояние f остаются неизменными, а фокус F' движется вправо, т. е. эллипсоид растягивается. Если F' сместился бесконечно далеко вправо, то эллипсоид вырождается в параболоид. Лучи, испущенные из F , образуют при отражении параллельный пучок (потому что они фокусируются в F' , который бесконечно удален, рис. 9.23).

Если апертура параболического зеркала имеет диаметр D , то точечный источник в F не образует идеально параллельного пучка. Угловая ширина интерференционного максимума равна $\Delta\theta \approx \lambda/D$, и лишь при бесконечно большом D мы получили бы идеальную плоскую волну от точечного источника. Действительно, падающая плоская волна фокусируется в F в изображение, которое будет точечным только при бесконечно большом D . Изображение в фокусе имеет ширину $\Delta x \approx f \Delta\theta \approx f \lambda/D$.

Вогнутое сферическое зеркало. Говорят, что сфера «пристроена» в вершине параболоида, если она касается вершины и имеет тот же радиус кривизны, что и параболоид в точке касания. Нетрудно показать, что радиус такой сферы равен $2f$ (рис. 9.24).

Сферическая aberrация. Для апертуры небольшого диаметра ($D \ll 2f$) поверхность сферического зеркала практически совпадает (слева от фокуса) с поверхностью параболического зеркала. В этом случае точечный источник, находящийся в F , образует почти параллельный пучок. Для больших апертур расхождение сферической и параболической поверхностей приводит к сферической aberrации (т. е. к отклонению лучей от параллельности, рис. 9.24). Некоторый опыт в обращении с вогнутыми зеркалами можно получить, используя дешевое зеркало для бритья. Получите с таким зеркалом изображение (например) пламени свечи или вашего лица. (Для этой цели может подойти и вогнутая поверхность новой блестящей ложки.) Для опытов с вогнутыми зеркалами можно использовать посеребренные сферические елочные украшения (или переверните ложку).

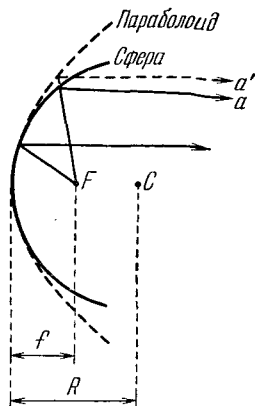


Рис. 9.24. Вогнутое сферическое зеркало («в контакте» с воображаемым касательным параболическим зеркалом).

Центр сферы в точке C , ее радиус $2f$. Луч a , отраженный от сферы, не параллелен оси. Это демонстрирует сферическую aberrацию.

Отклонение луча света при почти нормальном падении на тонкую стеклянную призму. Тонкой называется призма, у которой угол α при вершине настолько мал, что можно использовать приближение малого угла: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$. Для углов падения, близких к нормальному, мы можем использовать это приближение и для угла падения. В этом случае монохроматическая плоская волна отклоняется к основанию призмы на угол δ :

$$\delta = (n - 1)\alpha. \quad (89)$$

До тех пор, пока падение можно считать близким к нормальному, угол отклонения δ постоянен. Уравнение (89) легко вывести следующим образом (рис. 9.25). В основании призмы волновой фронт проходит расстояние l со скоростью c/n . У вершины скорость в n раз больше (так как толщина призмы нуль), и поэтому тот же фронт за то же время пройдет расстояние nl . Поэтому фронт у вершины окажется впереди на величину $(n - 1)l$. Эта величина, деленная на высоту призмы W , представляет (для малых углов)

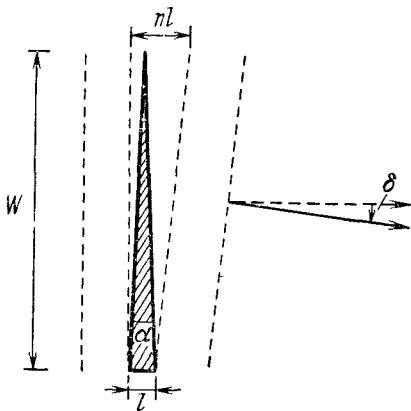


Рис. 9.25. Отклонение луча тонкой призмой.

угол отклонения $\delta = (n - 1)(l/W) = (n - 1)\alpha$, т. е. имеем уравнение (89).

Цветовая дисперсия призмы. В качестве примера тонкой призмы возьмем призму с углом при вершине $\alpha = 30^\circ$ и $n = 1,50$ (в этом случае для нашей задачи приближение малого угла еще не будет слишком плохим). Тогда в соответствии с уравнением (89) отклонение δ равно 15° . В действительности это — среднее отклонение, потому что для типичного стекла со средним коэффициентом преломления 1,5 голубой свет с длиной волны в 0,45 мкм имеет показатель преломления на 0,01 больше, чем красный свет с длиной волны в 0,65 мкм. Поэтому голубой свет отклонится больше, чем красный, на величину 0,01 α . При $\alpha = 30^\circ$ зеленый свет отклоняется на $0,3^\circ$, или примерно на $1/200$ радиана, больше, чем красный. На экране, расположенном в метре за призмой, голубая полоса будет отделена от красной на 0,5 см. Этот дисперсионный эффект стеклянной призмы используется в призмном спектрометре.

В оптических инструментах со стеклянными линзами дисперсия приводит к появлению хроматических aberrаций: лучи различного цвета не фокусируются в одном и том же месте. В телескопе можно избежать хроматической aberrации, используя вместо линзы параболическое зеркало для фокусирования света. (Закон зеркального отражения справедлив для всех цветов.) Хроматическую aberrацию можно исключить, используя также два типа стекла с различной дисперсией. (См. задачу 9.53.)

Фокусировка параксиальных лучей тонкой линзой. Предположим, что мы имеем стеклянную линзу в воздухе с двумя выпуклыми сферическими поверхностями, перпендикулярными общей оси симметрии \hat{z} . Луч света падает слева, распространяясь параллельно оси симметрии линзы, на расстоянии $y = h$ от оси. Если линза тонкая, то мы пренебрегаем (по определению) изменением ординаты y при прохождении луча через линзу. Пренебрегаем также толщиной линзы по сравнению с ее фокусным расстоянием. Мы ограничиваемся рассмотрением параксиальных лучей, т. е. таких лучей, для которых ординаты малы по сравнению с радиусом кривизны обеих поверхностей. В этих условиях для всех интересующих нас углов справедливо приближение малого угла.

Найдем фокус линзы F , т. е. точку на оси симметрии линзы, в которой лучи, падающие на линзу параллельно этой оси, пересекут ее после отклонения линзой (рис. 9.26). Если падающий луч фокусируется в F , то он отклонен на малый угол

$$\delta = h/f. \quad (90)$$

Необходимое условие существования фокуса. Необходимым условием существования общей фокальной точки (фокуса) для всех параллельных и параксиальных лучей, падающих на линзу, является *линейная пропорциональность отклонения луча его смещению h от оси*. Если уравнение (90) удовлетворяется для всех h (при условии малых угловых отклонений), то все параллельные лучи будут

фокусироваться на одинаковом расстоянии f за линзой. Это условие справедливо для любых подобных задач фокусирования, например для фокусирования магнитной линзой пучка заряженных частиц. Нам осталось показать, что тонкая линза со сферическими поверхностями удовлетворяет уравнению (90) с f , не зависящими от h . Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим луч на рис. 9.26.

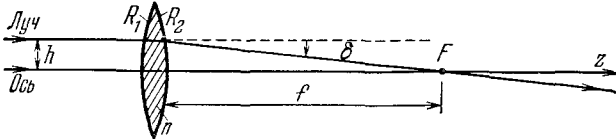


Рис. 9.26. Тонкая линза. Приходящий луч параллелен оси.

Этот луч может быть отклонен на тот же угол δ эквивалентной тонкой призмой. Первая поверхность этой призмы составляет угол h/R_1 с вертикалью, вторая — угол h/R_2 (но отсчитанный в другую сторону). Поэтому угол α у вершины нашей воображаемой призмы равен $hR_1^{-1} + hR_2^{-1}$. Угол отклонения луча такой призмой равен $(n-1)\alpha$, т. е.

$$\delta = (n-1)h(R_1^{-1} + R_2^{-1}). \quad (91)$$

Формула линзы. Уравнение (91) удовлетворяет условию образования фокуса, заключающемуся в том, что δ пропорционально h . Положение фокуса (фокусное расстояние) следует из формулы (90):

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (92)$$

Уравнение (92) называется *формулой линзы*.

Фокальная плоскость. Теперь рассмотрим пучок параллельных лучей, образующий угол θ с осью симметрии. Отклонение пучка тонкой призмой не зависит от угла падения (для малых углов).

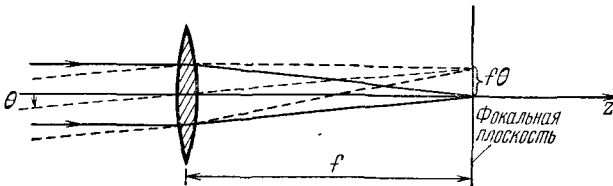


Рис. 9.27. Фокальная плоскость.

Поэтому луч, падающий на призму на расстоянии h от ее центра, отклоняется на угол $\delta = h/f$ независимо от угла падения. Это значит, что любой параллельный пучок фокусируется в точку, которая находится в плоскости, называемой *фокальной плоскостью*, расположенной на расстоянии f за линзой. Боковое смещение относительно оси точки в фокальной плоскости равно $f\theta$ (рис. 9.27).

Действительное точечное изображение точечного объекта. Мы нашли точечное изображение параллельного пучка, т. е. пучка, образованного реальным точечным источником, находящимся бесконечно далеко слева от линзы. Рассмотрим теперь точечный объект o , расположенный на расстоянии p слева от собирающей линзы, и найдем его изображение I на расстоянии q справа от линзы. Пусть o лежит на оси симметрии, тогда I также будет лежать на этой оси. Теперь обратимся к рис. 9.28. Из этого рисунка следует, что если

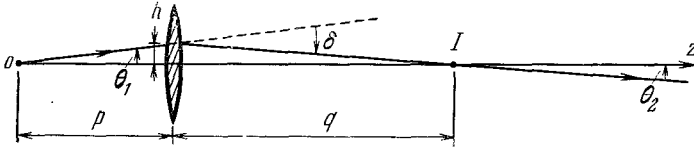


Рис. 9.28. Реальное изображение точечного объекта.

единичный вектор $+\hat{z}$ с началом в точке o совершает повороты на углы $+\theta_1$, $-\delta$ и $+\theta_2$, то в результате он опять будет направлен вдоль оси $+\hat{z}$:

$$\theta_1 - \delta + \theta_2 = 0. \quad (93)$$

Формула тонкой линзы. Справедливы следующие соотношения:

$$\theta_1 = \frac{h}{p}, \quad \theta_2 = \frac{h}{q} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{h}{f}.$$

(Отклонение всегда равно h/f независимо от угла падения.) Подставляя эти значения углов в уравнение (93), получим

$$\frac{h}{f} = \frac{h}{p} + \frac{h}{q},$$

т. е.

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}. \quad (94)$$

Уравнение (94) называется *формулой тонкой линзы*.

Продольное увеличение. Углы отклонения лучей тонкой линзой не изменятся, если линзу слегка повернуть относительно оси, проходящей через ее центр перпендикулярно плоскости рис. 9.28.

Луч от точечного объекта, проходящий через центр линзы, останется неотклоненным, а луч, входящий в линзу на расстоянии h от центра, отклонится на величину h/f . Поэтому положения точечного объекта и его изображения на рис. 9.28 не изменятся, если линзу слегка повернуть относительно ее центра. (С другой стороны, если линза получает небольшое перемещение относительно оси, лежащей в плоскости чертежа и перпендикулярной оси линзы, то изображение точечного объекта переместится. Новое положение изображения получится, если учесть, что луч, проходящий через центр

линзы, не отклоняется.) Вместо того чтобы слегка поворачивать линзу относительно ее центра, предположим, что положение линзы фиксировано, и переместим точечный объект на небольшое расстояние вверх перпендикулярно оси линзы. Вся лучевая диаграмма может быть затем повернута относительно центра линзы (потому что для углов падения, близких к нормальным, отклонения не зависят от углов падения). Таким образом, мы видим, что если точечный объект перемещен вверх на величину y , то изображение этого объекта переместится вниз на величину, большую чем y в число раз, равное отношению q к p . В этом случае говорят, что

$$\text{Продольное увеличение} = -\frac{q}{p}. \quad (95)$$

Знак минус указывает на то, что, когда точечный объект поднимается вверх (относительно оси), его изображение опускается вниз. Если объектом служит не отдельная точка, а протяженный предмет, например небольшая стрелка с острием и оперением, то его изображение будет перевернуто.

Собирающая линза. Линза, показанная на рис. 9.28, называется *собирающей линзой*. Изображение предмета, находящегося от тонкой собирающей линзы на расстоянии, большем фокусного расстояния f , является *реальным перевернутым изображением*. Прилагательное «реальный» означает, что в месте, где присутствует изображение, есть свет. Для сравнения скажем, что изображение в обычном плоском зеркале не является реальным, поскольку за зеркалом нет света.

Мнимое изображение. Если точечный объект на рис. 9.28 находится на расстоянии f слева от тонкой собирающей линзы, то

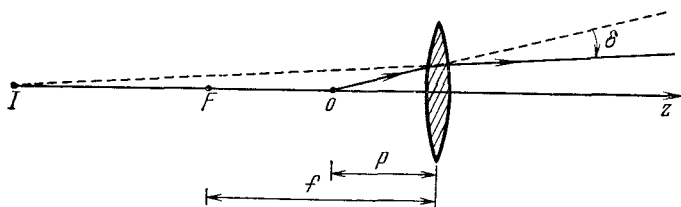


Рис. 9.29. Мнимое изображение точечного объекта ($p < f$).

отклонение h/f лучей на расстоянии h от центра линзы будет таким, чтобы справа образовался параллельный пучок. Если точечный объект находится на расстоянии, меньшем чем f , то отклонение будет недостаточно для того, чтобы направить луч, прошедший через линзу, обратно к оси. Такой луч никогда не пересечет ось, и можно сказать, что реального изображения нет. Наблюдателю кажется, что этот луч пришел от мнимого источника, расположенного слева от линзы. Можно говорить, что в этом случае линза образует *мнимое изображение* (рис. 9.29). Легко показать (предоставляем вам сделать это), что положение мнимого изображения определяется по

формуле тонкой линзы [уравнение (94)] при условии, что через отрицательное q мы обозначим расстояние, измеряемое влево от линзы.

Рассеивающая линза. Линзу, толщина которой возрастает от центра к периферии, называют *рассеивающей* (при условии, что это — стеклянная линза и находится она в воздухе). Если представлять себе линзу составленной из тонких призм (как мы делали для собирающей линзы), то вершина каждой мысленной призмы будет ближе к оси, чем основание, и лучи будут отклоняться от оси линзы (а не к оси, как это было в случае собирающей линзы). Параллельный пучок, пройдя через линзу, станет расходящимся, причем будет казаться, что он выходит из *мнимого фокуса* F (рис. 9.30). Легко

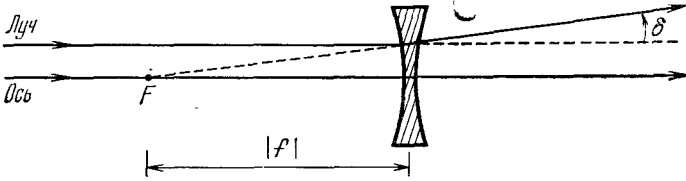


Рис. 9.30. Рассеивающая линза.

показать (предоставляем вам сделать это), что все формулы, полученные для тонкой собирающей линзы, справедливы и для рассеивающей, при условии, что мы введем в формулы отрицательные величины. Так, если принять, что у рассеивающей линзы фокусное расстояние отрицательно: $f = -|f|$, то мы сможем использовать формулу тонкой линзы, чтобы получить соотношение между расстояниями до предмета и его изображения. Например, рис. 9.30 соответствует $p = +\infty$, $q = -|f|$ и $f = -|f|$ в формуле

$$p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}.$$

Сила линзы. Диоптрия. Величина, обратная фокусному расстоянию (ее размерность $[m^{-1}]$), называется *силой линзы в диоптриях*. Так, сила собирающей линзы с фокусным расстоянием 50 см равна +2 диоптрии (+2D). Сила рассеивающей линзы с фокусным расстоянием — 50 см равна —2D. Величина, обратная фокусному расстоянию (сила линзы), обладает замечательным свойством, заключающимся в том, что она *линейна* в следующем смысле. Если одна тонкая линза следует непосредственно за другой, то *полная сила двух тонких соприкасающихся линз равна сумме сил каждой линзы*. Это легко показать из следующих соображений. Первая линза отклоняет луч по направлению к оси на угол h/f_1 , где f_1 отрицательно для рассеивающей линзы и положительно для собирающей. Если вторая линза расположена «на выходном конце» первой линзы, то у луча не будет возможности изменить свое расстояние h относительно общей оси двух линз. Поэтому луч войдет во вторую линзу на том же расстоянии h от оси и отклонение луча, даваемое второй линзой, будет равно h/f_2 . Полное отклонение луча двумя

линзами равно $h/f_1 + h/f_2$. Такое же отклонение можно получить, заменив две линзы одной эквивалентной линзой с фокусным расстоянием, определяемым из условия $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$. Таким образом, полная сила обеих линз (или эквивалентная величина обратного фокусного расстояния) равна сумме сил отдельных линз. Конечно, если обе линзы находятся на некотором расстоянии, то во вторую линзу луч входит не на той же высоте h относительно оси, как в первую линзу. Поэтому сила последовательных линз складывается линейно лишь в том случае, если можно пренебречь расстоянием между линзами.

Если вы носите очки, то можете определить (грубо) силу каждой линзы как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости. Для этой цели используйте удаленный точечный источник (или солнце). Если сила линзы положительна, то вы сможете образовать изображение источника на стене или на белой бумаге. Является ли фокусное расстояние линзы одинаковым в обеих плоскостях? (Если фокусные расстояния различны, то говорят, что линза астигматична, а ваш глаз имеет астигматизм, т. е. хрусталик глаза асимметричен относительно оси. Это ненормальный хрусталик.) Расстояние q от линзы глаза (хрусталика) до сетчатки равно примерно 3 см. В обратных метрах (m^{-1}) имеем $q^{-1} = (0,03 m)^{-1} \approx 33 m^{-1}$, т. е. q^{-1} равно примерно 33 обратным метрам. Глаз, рассматривающий удаленный предмет на расстоянии $p = \infty$, имеет силу линзы (хрусталика) f^{-1} , равную $f^{-1} = p^{-1} + q^{-1} = 0 + 33 m^{-1} = 33 D$. Чтобы сфокусировать на сетчатку объект на расстоянии $p = 25$ см от глаза, аккомодационный мускул глаза должен увеличить силу линзы глаза (хрусталика) на величину $p^{-1} = (0,25 m)^{-1} = 4 m^{-1} = 4 D$. В этом случае полная сила равна 37 D. Если аккомодационный мускул глаза достаточно хорош, то вы можете увеличить силу хрусталика даже на величину 10 D, и предмет, рассматриваемый вами на расстоянии $p = (10 D)^{-1} = 0,1 m = 10$ см, будет находиться в фокусе хрусталика. В этом случае предмет выглядит больше и вам лучше видны его детали. Если на расстоянии одного сантиметра от глаза вы сможете сфокусировать изображение предмета на сетчатке, то предмет будет выглядеть в 25 раз больше, чем на расстоянии в 25 см, соответственно вы сможете увидеть детали, в 25 раз более мелкие. Однако мускулы, вызывающие аккомодацию, не имеют такой силы.

Простое увеличительное стекло. При нормальном зрении можно рассматривать без утомления небольшой предмет, находящийся на расстоянии примерно 25 см от невооруженного глаза. Если размер предмета h см, то он стягивает дугу в $h/25$ рад, и эта величина определяет размер изображения на сетчатке. Если вы можете поднести предмет ближе (сохранив фокусировку), то он даст на сетчатке изображение большего размера. Чтобы при этом сохранить ясность изображения (т. е. фокусировку), аккомодационный мускул должен увеличить силу линзы. Это трудно и утомительно для глаза. Попробуем использовать линзу с фокусным расстоянием f (в см).

Расположите линзу прямо перед глазом. Поднесите предмет ближе. Когда предмет будет находиться в фокальной плоскости линзы, каждая точка предмета будет давать за линзой параллельный пучок лучей, падающий на глаз. Такой пучок вам уже легко сфокусировать, поскольку в этом случае аккомодационный мускул расслаблен. Предоставляем вам показать, что при использовании линзы угловой размер предмета возрастает в $25/f$ раз, где f — фокусное расстояние линзы (считаем, что углы малы, так что можно пользоваться приближением малого угла). (См. рис. 9.31.)

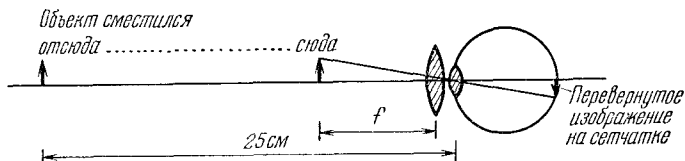


Рис. 9.31. Простое увеличительное стекло.

Сила главной линзы хрусталика складывается с силой увеличительного стекла. Объект может быть приближен к глазу, что увеличивает размер изображения на сетчатке.

Увеличение с помощью маленького отверстия. Возьмите кусок алюминиевой фольги и сделайте в нем небольшое отверстие диаметром 0,5 мм или меньше. Поднесите фольгу близко к глазу и смотрите через отверстие на источник света. Вы увидите дифракционную картину. Теперь посмотрите через отверстие на хорошо освещенную печатную страницу. (Если вы носите очки, снимите их. Для этого опыта они не нужны и от них не будет проку.) Поднесите страницу ближе и ближе к глазу. Обратите внимание, что слово, на которое вы смотрите, остается в фокусе и увеличивается по мере приближения! (В конце концов оно расплывается, потому что ваше отверстие недостаточно мало.) Увеличение, получаемое в этом случае, легко вычислить, сделав чертеж, подобный рис. 9.31, и заменив в нем линзу на маленькое отверстие.

Действительно ли мы видим перевернутые изображения предметов? Вот способ, с помощью которого можно убедиться, что изображение на сетчатке перевернуто. Посмотрите через небольшое булавочное отверстие на широкий источник света. Расположите конец карандаша (или булавку) перед экраном с отверстием и смотрите на него. Вы увидите прямое изображение конца карандаша (или булавки). Теперь *измените порядок* расположения предметов, поместив конец карандаша между отверстием (держите его на расстоянии 7—10 см от глаза) и глазом. Держите карандаш близко от глаза и, перемещая карандаш вверх и вниз, наблюдайте за направлением движения тени. Куда обращено острое изображение — вверх или вниз? Теперь сделайте чертеж и объясните, что происходит.

Изучение поведения глаза. Глядя через маленькое отверстие на широкий источник (например, небо), вы видите яркий круг. Этот круг представляет собой проекцию зрачка на сетчатку. Вы можете

изучить расширение и сокращение вашего зрачка, открывая и закрывая другой глаз, т. е. глаз, которым вы не смотрите через отверстие! Когда глаз открыт, т. е. свет проходит, зрачок сжат. То же происходит и со зрачком глаза, которым вы смотрите через отверстие! Эти «симпатические» сокращения зрачка легко наблюдать. Обратите внимание на то, что для сжатия или расширения зрачка требуется около 0,5 сек при неожиданном изменении интенсивности.

Телескоп. Телескоп состоит из двух линз. Первая линза — объектив — образует реальное изображение удаленного объекта. С хорошей степенью точности можно считать, что это изображение расположено в фокальной плоскости первой линзы (объектива). Если

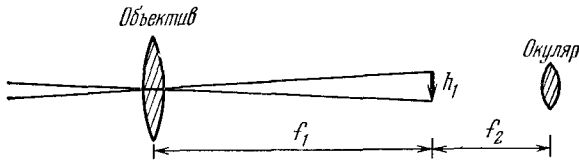


Рис. 9.32. Телескоп.

θ_0 — угловой размер удаленного объекта и f_1 — фокусное расстояние объектива, то высота изображения h_1 , созданного объективом, равна $h_1 = f_1 \theta_0$. Вторая линза телескопа называется *окуляр*. Она представляет собой, в принципе, простое увеличительное стекло, которое используется для рассмотрения реального изображения, образованного объективом. Если окуляр расположен так, что изображение, образованное объективом, находится в фокальной плоскости окуляра, то точки изображения дают параллельный пучок, падающий на глаз. В этом случае глаз расслаблен (аккомодационный мускул расслаблен) точно так же, как если бы вы смотрели на удаленный объект без телескопа. Угловой размер, «стягиваемый» окуляром при высоте изображения h_1 , равен h_1/f_2 , где f_2 — фокусное расстояние окуляра (второй линзы). Это больше, чем угловой размер θ_0 , в $(h_1/f_2)/\theta_0 = (f_1 \theta_0/f_2)/\theta_0 = f_1/f_2$ раз. Таким образом, угловое увеличение равно f_1/f_2 (рис. 9.32).

Микроскоп. Микроскоп, подобно телескопу, имеет одну линзу (объектив) для формирования реального изображения объекта и вторую линзу (окуляр) для исследования этого изображения. Объект, который нужно рассмотреть, помещают близко к фокальной плоскости объектива (но не точно в ней). Изображение образуется на большом расстоянии L от объектива — положим, что оно равно ≈ 20 см. Это расстояние практически определяет размер микроскопа. Объект шириной x , расположенный на расстоянии от объектива, близком к f_1 , имеет реальное изображение шириной $h_1 = (L/f_1)x$. Это изображение удалено от окуляра на расстояние f_2 и стягивает угол относительно окуляра h_1/f_2 . Если предмет рассматривают невооруженным глазом с расстояния 25 см, он образует

угол, равный $x/25$ см. Таким образом, увеличение, даваемое микроскопом, равно $(h_1/f_2)/(x/25) = 25 L/(f_1 f_2)$ (рис. 9.33).

Толстые сферическая и цилиндрическая линзы. Небольшая стеклянная бутылка или банка может служить хорошей цилиндрической линзой. (Наполните чистую банку водой или любой другой

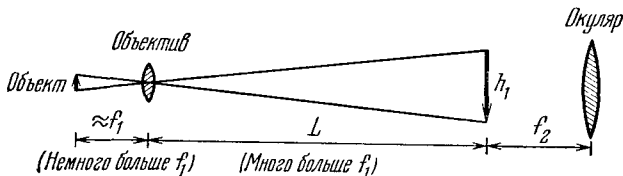


Рис. 9.33. Микроскоп.

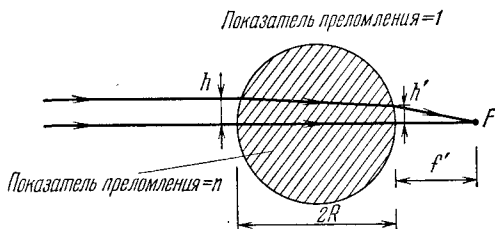


Рис. 9.34. Пример «толстой линзы».

Фокус F находится на расстоянии f' от задней поверхности. Показатель преломления воздуха = 1, линзы = n .

прозрачной жидкостью.) На рис. 9.34 показано образование такой линзой изображения от параллельного пучка света.

Отклонение, вызываемое одиночной сферической поверхностью. Пропустим через нашу цилиндрическую линзу пучок света. Проходящий через центр сферы или круга луч не отклонится. Луч, проходящий на расстоянии h от центра, падает на сферическую поверхность под углом $\theta_1 = h/R$ (для $h/R \ll 1$). Отклонение этого луча на первой поверхности равно углу падения θ_1 минус угол преломления θ_2 . Для малых углов закон Снеллиуса $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ примет вид $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$. Тогда отклонение луча по направлению к оси равно

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) = \theta_1 \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right). \quad (96)$$

Уравнение (96) является общим (для малых углов) и используется для лучей, проходящих через сложные системы. В нашем примере отклонение на первой поверхности равно

$$\delta = \frac{h}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (97)$$

Теперь последуем за лучом к задней поверхности. Луч станет ближе к оси на величину $2R\delta$, и на задней поверхности расстояние h' от оси будет равно (см. рис. 9.34)

$$h' = h - 2R\delta = h - 2h \left(1 - \frac{1}{n} \right) = h \left(\frac{2}{n} - 1 \right). \quad (98)$$

На задней поверхности луч опять отклонится по направлению к оси. Из симметрии луча относительно хорды (т. е. той части луча, которая внутри круга) следует, что отклонение при выходе будет таким же, как и при входе. Таким образом, луч выходит под углом 2δ к оси на расстоянии h' от оси. Поэтому он пересечет ось на расстоянии f' за задней поверхностью. Для величины f' справедливо равенство

$$2\delta = \frac{h'}{f'}. \quad (99)$$

Выражения (97), (98) и (99) дают

$$f' = \frac{h'}{2\delta} = \frac{h \left(\frac{2}{n} - 1 \right)}{\frac{2h}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{R}{2} \frac{(2-n)}{(n-1)}. \quad (100)$$

С помощью уравнения (100) вы можете (имея банку или бутылку) определить показатель преломления воды или (например) минерального масла. (Уравнение (100) справедливо как для цилиндра, так и для сферы.) См. домашний опыт 9.42.

Микроскоп Ливенгука. Первый в мире микроскоп представлял собой просто небольшую стеклянную сферу. Вы можете сделать такой микроскоп сами. Для этого нужен лишь прозрачный стеклянный шарик. Микроскоп работает следующим образом. Поместите сферу прямо перед глазом. Положите «насекомое» (которое вы хотите рассмотреть) в фокус F (см. рис. 9.34). Данная точка на «насекоме» даст параллельный пучок света, входящий в глаз. Поскольку пучок параллельный, то вы можете ослабить аккомодационный мускул, и пучок будет фокусироваться на сетчатке в точку. Другая точка «насекомого» будет фокусироваться в другую точку на сетчатке. Вычислим увеличение, которое дает такая линза. Положим, что продольный размер «насекомого» равен x . Лучи, идущие с крайних точек «насекомого» и проходящие через центр линзы, не отклоняются. Это значит, что угловой размер «насекомого» равен x , деленному на расстояние от F до центра сферы:

$$\theta = \frac{x}{R + f'}. \quad (101)$$

Это — угол между параллельными пучками, соответствующими изображениям крайних точек «насекомого» на вашей сетчатке, и поэтому является угловым размером, который вы видите, используя микроскоп. Если рассматривать «насекомое» без микроскопа, то, чтобы иметь на сетчатке максимально большое хорошо сфокусированное изображение, вы должны расположить «насекомое» на расстоянии 25 см от глаза. Угловой размер «насекомого» будет равен $x/25$ см. Угловое увеличение M поэтому равно

$$M = \frac{25}{R + f'} = \frac{25}{R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2-n}{n-1} \right) \right]}. \quad (102)$$

Так, например, если $R = 1$ мм и $n = 3/2$ (стекло), то $M = 167$.

Отражатель типа скотчлайт. Если $n = 2$, то, в соответствии с уравнением (98), луч, параллельный оси и входящий в сферическую линзу на расстоянии h от оси, пересекает эту ось на задней поверхности ($h' = 0$). Таким образом, параллельный пучок фокусируется точно на задней поверхности сферы. Здесь пучок частично отражается и частично проходит. Отраженная часть пучка распространяется в направлении, обратном направлению падающего пучка (рис. 9.35). Прошедший через заднюю поверхность свет может быть в значительной степени отражен обратно в стекло, если накрыть заднюю поверхность серебряным отражателем. Этот принцип используется в отражающем материале, называемом Scotchlite.

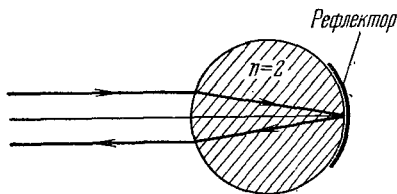


Рис. 9.35. Обратный ход лучей в идеальном отражателе типа скотчлайт с показателем преломления $n = 2$.

Он, кстати, используется для устройства ярких дорожных знаков. Исследуйте его (знак) с помощью увеличительного стекла. Вы увидите, что он состоит из многих маленьких стеклянных сфер, вставленных в липкую посеребренную поверхность, выкрашенную чистым красным шеллаком (для красного Scotchlite). Оказывается, что наибольший коэффициент преломления, который можно получить, используя стекло, равен $n = 1,9$. Это достаточно близко к 2 и дает довольно хорошие результаты.

Следующее поколение самых больших в мире жидководородных пузырьковых камер, которые теперь (1968 г.) разрабатываются, будет (по крайней мере некоторые из них) использовать покрытие из Scotchlite на дне камеры для того, чтобы направить лучи света, освещающего камеру, обратно к их источнику.

Задачи и домашние опыты

9.1. Ближнее и дальнее поля. Экран с двумя щелями, разделенными расстоянием 0,1 мм, облучен красным светом. Для какого расстояния от экрана справедливо приближение далекого поля? Рассмотрим две антенны, испускающие 3-см радиоволны. Расстояние между антеннами 10 см. На каком расстоянии от антенн справедливо приближение далекого поля?

9.2. Двойная щель (расстояние между щелями 0,5 мм) облучается параллельным пучком света от газового лазера (он работает на смеси гелия и неона), который дает монохроматическое излучение с длиной волны 6328 Å. Каково расстояние между интерференционными полосами на экране, находящемся на расстоянии 5 м от щели?

9.3. Какова «средняя длина» классического волнового пакета для света, испущенного атомом со средним временем высвечивания 10^{-8} сек? В обычном газоразрядном источнике из-за эффекта Доплера и столкновений между атомами эффективное время когерентности уменьшается до 10^{-9} сек. Какова в этих условиях длина волнового пакета?

9.4. Реальный «линейный» источник видимого света имеет ширину 1 мм. Как далеко от экрана с двумя щелями (расстояние между щелями 0,5 мм) его нужно поместить, чтобы две щели можно было считать когерентными источниками?

9.5. На каком расстоянии от автомобиля вы начинаете различать глазами обе светящиеся фары?