

Отражатель типа скотчлайт. Если $n = 2$, то, в соответствии с уравнением (98), луч, параллельный оси и входящий в сферическую линзу на расстоянии h от оси, пересекает эту ось на задней поверхности ($h' = 0$). Таким образом, параллельный пучок фокусируется точно на задней поверхности сферы. Здесь пучок частично отражается и частично проходит. Отраженная часть пучка распространяется в направлении, обратном направлению падающего пучка (рис. 9.35). Прошедший через заднюю поверхность свет может быть в значительной степени отражен обратно в стекло, если накрыть заднюю поверхность серебряным отражателем. Этот принцип используется в отражающем материале, называемом Scotchlite.

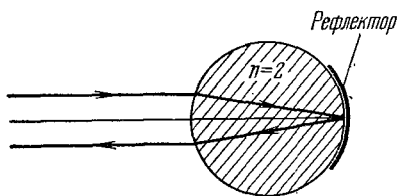


Рис. 9.35. Обратный ход лучей в идеальном отражателе типа скотчлайт с показателем преломления $n = 2$.

Он, кстати, используется для устройства ярких дорожных знаков. Исследуйте его (знак) с помощью увеличительного стекла. Вы увидите, что он состоит из многих маленьких стеклянных сфер, вставленных в липкую посеребренную поверхность, выкрашенную чистым красным шеллаком (для красного Scotchlite). Оказывается, что наибольший коэффициент преломления, который можно получить, используя стекло, равен $n = 1,9$. Это достаточно близко к 2 и дает довольно хорошие результаты.

Следующее поколение самых больших в мире жидководородных пузырьковых камер, которые теперь (1968 г.) разрабатываются, будет (по крайней мере некоторые из них) использовать покрытие из Scotchlite на дне камеры для того, чтобы направить лучи света, освещающего камеру, обратно к их источнику.

Задачи и домашние опыты

9.1. Ближнее и дальнее поля. Экран с двумя щелями, разделенными расстоянием 0,1 мм, облучен красным светом. Для какого расстояния от экрана справедливо приближение далекого поля? Рассмотрим две антенны, испускающие 3-см радиоволны. Расстояние между антеннами 10 см. На каком расстоянии от антенн справедливо приближение далекого поля?

9.2. Двойная щель (расстояние между щелями 0,5 мм) облучается параллельным пучком света от газового лазера (он работает на смеси гелия и неона), который дает монохроматическое излучение с длиной волны 6328 Å. Каково расстояние между интерференционными полосами на экране, находящемся на расстоянии 5 м от щели?

9.3. Какова «средняя длина» классического волнового пакета для света, испущенного атомом со средним временем высвечивания 10^{-8} сек? В обычном газоразрядном источнике из-за эффекта Доплера и столкновений между атомами эффективное время когерентности уменьшается до 10^{-9} сек. Какова в этих условиях длина волнового пакета?

9.4. Реальный «линейный» источник видимого света имеет ширину 1 мм. Как далеко от экрана с двумя щелями (расстояние между щелями 0,5 мм) его нужно поместить, чтобы две щели можно было считать когерентными источниками?

9.5. На каком расстоянии от автомобиля вы начинаете различать глазами обе светящиеся фары?

9.6. Диаметр Венеры около 13 000 км. Когда мы видим ее как «вечернюю» или «утреннюю» звезду, она находится на расстоянии 150 млн. км (приблизительно равному расстоянию до Солнца). Невооруженному глазу она кажется «большей, чем точка». Видите ли вы истинный размер Венеры?

9.7. Опыт. *Разрешающая сила глаза.* Возьмите две осветительные лампы одинаковой мощности (скажем, 150 вт), одну с прозрачным баллоном и не очень большой нитью ($\approx 2,5$ см), а другую с матовым баллоном диаметром около 8 см. На каком расстоянии от ламп их кажущиеся размеры будут одинаковы? Найдя это расстояние, сравните кажущиеся размеры двух ламп, имеющих одинаковые реальные размеры, но различающихся по мощности в два или три раза. Объясните полученный результат. Почему Венера кажется большей, чем точка? (См. задачу 9.6.)

9.8. Опыт. Для опыта нужны линейный источник белого света и две идентичные дифракционные решетки. Ориентируйте лампу так, чтобы нить была вертикальной, и посмотрите на нее через решетку (она должна быть близкой к глазу), ориентированную так, чтобы спектр был развернут по горизонтали. Теперь совместите с первой решеткой вторую и осторожно поворачивайте ее до тех пор, пока спектры первого порядка обеих решеток не совместятся. Действуйте очень тщательно, вы сумеете обнаружить «черные полосы», пересекающие окрашенное изображение первого порядка. Часть объяснения заключается в следующем. Расстояние между штрихами равно d . Обозначим через s расстояние между параллельными плоскостями обеих решеток. Их можно считать двумя заборами или частотками, стоящими друг перед другом. При некоторых углах отражения штрихи обеих решеток будут лежать на одной линии, а при других углах проекции штрихов одной решетки могут лежать посередине между смежными штрихами другой. В последнем случае эффективное число штрихов на единицу длины d^{-1} удваивается. Теперь начинается физика. Почему вы получаете черные полосы? Соответствуют ли они первому или второму случаю наложения штрихов? Можете ли вы найти расстояние s , зная d^{-1} , или d^{-1} , зная s ?

9.9. Опыт. *Дифракционная картина от шелкового чулка.* Вам нужен тонкий шелковый (или нейлоновый) чулок и точечный источник белого света. Для этой цели вполне подойдет далекий уличный фонарь, но еще лучше 6-в лампочка карманного фонаря с нитью длиной около 0,5 мм. Чтобы получить хороший точечный источник, удалите линзу фонаря, а параболический рефлектор закройте куском черной материи или бумаги (оставив щель для лампы). Еще проще — смотрите на лампу со стороны, чтобы не мешал пучок, отраженный рефлектором.

Посмотрите на источник света через чулок. Наблюдаемая вами картина позволяет оценить среднее расстояние между нитями и число нитей на 1 мм. Сложите чулок в несколько слоев и снова посмотрите на источник. Вы увидите концентрические окружности, очень похожие на картину дифракции рентгеновских лучей от «порошка».

9.10. Опыт. *Долгоиграющая пластинка как дифракционная решетка.* Посмотрите на отражение источника белого света (при почти скользющем падении) от пластинки на 33 об/мин. Поверхность пластинки с нанесенными на ней углублениями является хорошей отражающей решеткой. Определите, хотя бы грубо, длину волн красного и синего света, пользуясь этой решеткой. Опишьте ваш метод. Как можно определить положение максимума нулевого порядка, соответствующего зеркальному отражению?

9.11. Опыт. *На какой стороне решетки находятся царапины?* Чтобы решить этот вопрос, смажьте одну ее поверхность маслом и посмотрите на белый источник света. Вытрите эту и смажьте маслом вторую поверхность. Посмотрите через решетку на источник света. Дайте объяснение наблюдаемому.

9.12. Рассмотрим касающиеся сферическое и параболическое зеркала, показанные на рис. 9.24. Направим ось z вправо по оси симметрии системы, а ось x перпендикулярно z . Пусть в вершине касающихся зеркал $x=y=z=0$.

а) Покажите, что для параболической поверхности

$$z = \frac{x^2}{4f}.$$

б) Покажите, что для сферической поверхности (если $x \ll f$)

$$z = \frac{x^2}{4f} + \frac{x^4}{64f^3} + \dots$$

в) Сравните сферическое зеркало с апертурой диаметром D и с фокусным расстоянием f с параболическим зеркалом с теми же параметрами. Рассмотрите для сферического зеркала угловое отклонение $\delta\theta$ «плохих» лучей (проходящих вблизи края апертуры), вызванное сферической aberrацией (угол $\delta\theta$ равен отклонению от направления \hat{z} для лучей от точечного источника). Покажите, что $\delta\theta$ меньше дифракционной угловой ширины $\Delta\theta \approx \lambda/D$, если

$$D < 4f \left(\frac{\lambda}{4f} \right)^{1/4}.$$

Таким образом, (например) для видимого света при фокусном расстоянии $f \approx 125$ см сферическое зеркало столь же хорошо, как и параболическое, если диаметр D меньше, чем ~ 10 см.

9.13. Поместим между глазом и точечным источником света пластину стекла толщиной t . Покажите, используя приближение малых углов, что точечный источник кажется смещенным к наблюдателю на расстояние, близкое к $\{(n-1)/n\}t$ (n —показатель преломления стекла).

9.14. «Угловой отражатель» состоит из трех плоских зеркал, соединенных под прямыми углами таким образом, чтобы образовать внутренний угол ящика. Покажите, что луч света, попавший в такой отражатель, выходит из него под углом 180° к первоначальному направлению, независимо от угла входа, если он отражается от всех трех зеркал.

9.15. Покажите, что плоская волна, падающая нормально к поверхности V -образной призмы с углом A , отклоняется на угол θ , определяемый из равенства

$$n \sin A = \sin(A + \theta).$$

9.16. Лазерный пучок света (диаметром 1 см), расходящийся дифракцией, направлен на Луну. Каков диаметр освещаемой на Луне поверхности? (Расстояние до Луны равно $\sim 384\,000$ км, длина волны лазера 6328 \AA , рассеянием в атмосфере Земли пренебрегаем.)

9.17. Опыт. *Дифракционная картина от одной щели.* Прикрепите кусок алюминевой фольги к предметному стеклу. (Это удобно сделать с помощью ленты скотча.) Острым ножом или лезвием бритвы проделайте в фольге узкую щель. Держа ее близко к глазу, посмотрите на линейный источник белого света. Оцените полную угловую ширину центрального максимума.

Оцените отношение длин волн красного и зеленого света, воспользовавшись соответствующими фильтрами. С помощью красного фильтра и выполненной выше оценки угловой ширины дифракционной картины оцените ширину щели (длина волны равна 6500 \AA). Имея увеличительное стекло, вы можете непосредственно измерить ширину щели, воспользовавшись миллиметровой шкалой. Сравните оба результата.

9.18. Опыт. *Интерференция и дифракция от двух щелей.* С помощью метода, описанного в опыте 9.17, сделайте две параллельные щели, разделенные расстоянием около $0,5$ мм. Пусть одна из щелей будет длиннее другой на $0,5$ см. Это позволит быстро переходить от однощелевой к двухщелевой дифракции с помощью простого смещения щелей. Вы сможете увидеть, какая часть двухщелевой картины является «модуляцией одной щелью», возникающей от ненулевой ширины щели. Чтобы понять влияние расстояния d между щелями, пропарайте одну щель под небольшим углом у другой. Советуем сделать много щелей; из них вы сможете выбрать лучшие.

9.19. Опыт. *Трехщелевая картина.* Для этого опыта нужно отобрать несколько хороших двойных щелей (опыты 9.17 и 9.18). Проведите третью щель параллельно двум, но пусть она будет короче их, чтобы вы могли быстро переходить от двухщелевой к трехщелевой картине. Важнейшим результатом наблюдения является сужение дифракционных максимумов при добавлении третьей щели.

9.20. Опыт. Когерентность. Размер «точечного» или линейного источника. Возьмите одиночную щель, ширина которой известна (оценена). Закройте источник света красным фильтром. Находясь достаточно далеко от источника, вы можете наблюдать резкую картину дифракции от одной щели. Теперь приблизьтесь к источнику. Найдите расстояние L , при котором картина «размывается». («Размытие» возникает на таком расстоянии, когда различные части нити лампы становятся независимыми источниками и перестают быть когерентными для разрешающего времени нашего глаза, см. п. 9.4.) Воспользуйтесь оценками размеров источника и щели, значением L и формулой $d(\text{источник}) \times D(\text{щель}) \approx L\lambda$ для определения длины волны света.

9.21. Опыт. Когерентность; зеркало Ллойда, «двойная щель, обеспечивающая когерентность». Глядя на небо или на матовую лампу через обычную двойную щель, помещенную перед глазом, вы не увидите интерференционных полос. Почему? Мы хотим создать двойную щель, которая позволяла бы наблюдать интерференционную картину даже с такими источниками света. Начнем с обычной одиночной щели, способ изготовления которой описан в опыте 9.17. Теперь возьмем второе предметное стекло микроскопа и прислоним его к ребру первого стекла (со щелью) так, чтобы зеркальное изображение щели во втором стекле было параллельно первой щели. Соедините второе стекло с первым комком пластилина или какой-нибудь невысыхающей замазки так, чтобы можно было регулировать относительное положение стекол. Добейтесь такого их положения, чтобы расстояние между щелью и ее изображением было как можно меньше, скажем $0,5 \text{ мм}$. Сделайте это, когда все устройство находится на расстоянии $\sim 30 \text{ см}$ от глаз, чтобы вы могли сфокусировать глаза на «двойной» щели, когда вы держите ее около яркого источника. Получив таким образом хорошую двойную щель, поместите ее перед глазом и сфокусируйте глаз на большее расстояние (т. е. на источник света). Заметьте три или четыре «черные полосы», параллельные «двойной когерентной щели». Это места деструктивной интерференции (нулевая интенсивность) между пучком света от реальной щели и пучком от ее изображения. Изображение щели всегда полностью когерентно реальной щели. (Почему?) Благодаря изменению фазы при отражении потоки от щели и от ее изображения сдвинуты по фазе на 180° .

Ответьте на следующие вопросы (исходя из опыта и теории): будут ли «яркие» линии так же ярки, как яркий фон, который вы видите с одной щелью? ярче? темнее?

9.22. Опыт. Зажим для бумаг и зеркало Ллойда. (См. опыт 9.21.) Зажим для бумаг, освещенный лампой, является узким линейным источником света. Поместите параллельно щели предметное стекло микроскопа, используя его как зеркало (см. опыт. 9.21). Получив хорошую «когерентную двойную щель» с расстоянием между щелями $\sim 0,5 \text{ мм}$, поднесите ее к глазу и постарайтесь рассмотреть темные интерференционные полосы, о которых говорилось в опыте 9.21. Этот опыт требует больших усилий, чем опыт 9.21. Падение света на зеркало должно быть возможно более скользким, а источник света не должен ослеплять.

9.23. Опыт. Двухмерная дифракционная картина.

а) Посмотрите на удаленный источник уличного света через обычную оконную штору. Поверните ее так, чтобы проекция расстояния между нитями материи была возможно меньшей. Как далеко должна находиться лампа диаметром 20 см (с матовой поверхностью), чтобы дать когерентное освещение двух соседних нитей экрана?

б) Посмотрите на уличный фонарь или на точечный источник (лампа карманного фонаря, см. опыт 9.9) через различные материалы: шелковый носовой платок, нейлоновые носки, зонтик и т. д.

в) Посмотрите на точечный источник света через две дифракционные решетки. Поворачивайте одну из них до тех пор, пока щели обеих решеток не станут перпендикулярны друг другу. Заметьте появление нескольких ярких «точек» под углом в 45° к двум взаимно перпендикулярным спектрам. Это новое явление, которое нельзя объяснить простым наложением интенсивностей от двух решеток. Оно возникло от суперпозиции амплитуд света, рассеянного обеими решетками. Объясните с помощью схемы происхождение этих дополнительных «точек». Дифракционная картина от двух скрещенных решеток аналогична дифракционной картине при отражении рентгеновских лучей от одиночного кристалла.

9.24. Опыт. Дифракционная решетка и полоса пропускания фильтров. Воспользуйтесь дифракционной решеткой для измерения длины волны красного и зеленого света, проходящего через ваши фильтры. Поместите точечный или линейный источник вблизи стены (или двери) и сделайте на ней метку на расстоянии 30 см от источника. Смотрите на источник через решетку, держа фильтр перед решеткой (или перед источником). Придвигайтесь и удаляйтесь от источника, пока интересующий вас цвет не покажется совпавшим с меткой на стене или двери. Измерьте расстояния и вычислите длину волны. Этот опыт дает возможность прокалибровать ваши фильтры. Запомните результат. (Теперь с помощью фильтров и решетки вы сможете, не прибегая к геометрическим измерениям, определить длину волны для других цветов.)

9.25. Опыт. Спектральные линии. Наберите немного соли на мокрую поверхность ножа (или ложки, или гвоздя и т. п.) и поместите нож в пламя газовой горелки. Смотрите на желтое пламя через решетку (этот опыт лучше делать ночью в темной кухне). Заметьте, что изображение желтого пламени в первом и более высоких порядках оказывается столь же резким и ясным, как и «прямое» изображение нулевого порядка. Это объясняется тем, что желтый цвет образован спектральной «линией», ширина которой очень мала. (В действительности желтый цвет натрия представляет собой «дублет» из двух линий с длинами волн 5890 и 5896 Å.) Теперь посмотрите на пламя свечи. В нулевом порядке ее пламя мало отличается от пламени натрия: они оба кажутся желтыми. Но уже в дифракционном изображении первого порядка пламя свечи сильно размыто, тогда как спектр натрия сохраняет свою резкость. «Желтизна» свечи, обязанная излучению атомов углерода, имеет спектр, распространяющийся в обе стороны от видимого спектра.

Мы перечислим некоторые источники света, дающие резкие спектральные линии. Советуем понаблюдать за ними с помощью решетки.

Пары ртути: флюоресцентные лампы, лампы уличного света, лампы дневного света.

Неон: трубки, используемые для рекламы. Неон дает большое число линий.

Стронций. Растворите в воде немного хлористого стронция и, смочив в растворе кончик ножа, внесите его в пламя горелки. Длина волны красной линии стронция является известным стандартом частоты.

Медь. Воспользуйтесь медным купоросом, его можно использовать так же, как хлористый стронций. Медный купорос дает прекрасный зеленый цвет.

Углеводород. Посмотрите на спектр первого порядка пламени газовой горелки. Вы увидите резкое и ясное изображение в синем и зеленом свете. «Синий» цвет пламени связан с одной или несколькими почти монохроматическими спектральными линиями.

9.26. Опыт. Полосы Фабри — Перо. Простым источником почти монохроматического света является пламя горелки, в которую внесен кончик ножа, смоченный в растворе соли. Воспользуйтесь этим источником для наблюдения полос Фабри—Перо. Посмотрите через пламя на его изображение в куске стекла (покрывное стекло или даже стекло, покрывающее картину или снимок). Вы увидите полосы, напоминающие отпечатки пальцев. Если стекло оптически плоское, полосы представляют собой окружности, центрированные вокруг вашего глаза, но в любом случае они ясно видны. Газовая горелка и нож, смоченный в растворе соли, являются яркими источниками монохроматического света и вы сможете сделать этот опыт даже при дневном свете. В качестве простого, стабильного и широкого источника монохроматического света можно рекомендовать неоновую лампу.

9.27. Опыт. Трубка в качестве спектрометра, линии Фраунгофера. Возьмите картонную трубку длиной от 45 до 60 см. На одном конце трубки смонтируйте одиночную щель. Ее лучше всего сделать из двух бритвенных лезвий. Одно из них закрепите неподвижно с помощью ленты скотча, другое закрепите с помощью пластилина или замазки, чтобы иметь возможность менять ширину щели (узкая щель — лучшее разрешение, широкая щель — больше света). Наблюдайте с помощью такого спектрометра за источниками света, перечисленными в опыте 9.25.

В о п р о с. Можно ли таким спектрометром разрешить дублет в спектре натрия ($\lambda_1=5890 \text{ \AA}$ и $\lambda_2=5896 \text{ \AA}$)?

О т в е т. Нельзя; чтобы улучшить разрешение, можно взять решетку с меньшим расстоянием d между линиями или увеличить число используемых линий.

Последний способ означает увеличение ширины D решетки. В нашем приборе D — диаметр вашего зрачка, близкий к 2 мм. Добавив телескоп с диаметром объектива, близким к 2 см, вы можете улучшить угловое разрешение λ/D в 10 раз, если все лучи, прошедшие через объектив, попадут в ваш зрачок и дифракционная решетка будет лежать на самой линзе.

С помощью такого спектрометра можно увидеть линии Фраунгофера в спектре Солнца. Выберите для этого солнечный день. Положите на землю несколько слоев белой бумаги (больше одного для того, чтобы она была «очень белой») и посмотрите на ее поверхность через ваш спектрометр. Используйте плотную ткань или одеяло, чтобы защитить глаза от рассеянного света. Воспользуйтесь так же краем трубки, чтобы «спрятать» ослепляюще яркий свет нулевого порядка. Ширину щели сделайте равной $\sim 0,5$ мм. Заметьте, что непрерывный спектр Солнца пересечен несколькими темными линиями. Если вы их не видите, попытайтесь подрегулировать ширину щели, чтобы добиться лучшей освещенности. Другой метод заключается в том, чтобы покрыть очень узкую щель несколькими слоями вощеной бумаги (или кальки) и смотреть на небо вблизи Солнца, меняя интенсивность света степенью приближения к направлению на Солнце.

Темные линии являются линиями поглощения. Горячее Солнце испускает непрерывный спектр излучения, которое возбуждает атомы относительно холодной внешней газовой оболочки Солнца. Атомы оболочки излучают свет, соответствующий их характеристическим частотам. Оболочка для таких частот почти непрозрачна, и этим объясняются черные линии, возникающие в областях спектра, отвечающих характеристическим частотам. Легче всего наблюдать близко расположенные линии в желтой части спектра, связанные с излучением атомов железа, кальция и магния, линию водорода в зелено-синей части спектра и несколько тесно расположенных углеводородных линий в синей части спектра. Они аналогичны линиям испускания, которые вы наблюдали в спектре пламени газовой горелки. Может быть, вам удастся заметить линию поглощения натрия, хотя автору это удается с трудом. Чтобы знать, где искать эти линии, посмотрите на линии испускания натрия, кидая крупинцы соли в пламя горелки. Именно эти линии будут «потеряны» во фраунгоферовском спектре. (См. цветную вклейку после стр. 480.)

9.28. Опыт. *Дифракция водяных волн.* Осветите ванну сверху лампой с небольшой нитью в прозрачном баллоне (нам нужны резкие тени). Теперь создайте бегущие «прямые волны» — двухмерный аналог плоских волн, — покачивая доску у края ванны.

Пусть кофейная чашка будет непрозрачным препятствием. Оцените расстояние L , за которым «тень» от чашки размывается. Предположим, что диаметр чашки вам неизвестен. Оцените его экспериментально: для этого нужно извлечь квадратный корень из произведения L на длину волны водяных волн. (Происхождение этой формулы см. в п. 9.6.) Заметим, что этим методом определяется диаметр атомных ядер — по измерениям их дифракционного поперечного сечения. (З а м е ч а н и е. В этом опыте довольно трудно измерить длину волны. Проще колебать доску в определенном темпе (как можно быстрее), чтобы знать частоту. По частоте и дисперсионному соотношению для волн в воде (п. 4.2) можно определить длину волны.) Как согласуется ваша оценка размеров чашки с ее действительными размерами?

9.29. *Каковы поперечные размеры «плоской волны» от далекого точечного источника?* Мы часто утверждаем, что бегущая волна от далекого точечного источника может считаться «плоской» в пределах ограниченной части пространства, перпендикулярной линии, соединяющей источник с точкой поля. Чем ограничена величина этой области? Пусть L — расстояние до источника, а рассматриваемая область представляет собой круг радиусом R . Сколь большим может быть радиус R , чтобы разность фаз колебаний в центре круга и по его периферии не превосходила $\Delta\varphi$ радиан?

О т в е т. Фаза в центре круга опережает фазу по его периферии на величину $\Delta\varphi = \pi R^2 / \lambda L$. Таким образом, фаза «почти не меняется» по всей площади круга, если площадь круга мала по сравнению с λL .

9.30. Самая большая из существующих параболических антенн находится в Национальной радиоастрономической обсерватории (Западная Вирджиния) и представляет собой параболическую «тарелку» диаметром около 100 м. Чему равно

угловое разрезание этой антенны в радианах и в минутах (эту единицу используют астрономы) для знаменитой 21-см линии водорода?

От в е т. Точечный источник, удаленный на 100 м, будет иметь размер мяча для волейбола.

9.31. «Выходной зрачок» телескопа. Рассмотрим простой телескоп, состоящий из линзы-объектива и окуляра. Угловое увеличение телескопа равно f_1/f_2 , где f_1 и f_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно. Покажите, что не все лучи от далекого объекта, падающие на линзу-объектив (ее диаметр велик), попадают в ваш глаз и что «используемый диаметр» линзы-объектива равен произведению f_1/f_2 на диаметр зрачка глаза. Пусть наш телескоп дает восьмикратное увеличение, а свет, выходящий из телескопа, образует параллельный пучок диаметром 4 мм (это в два раза больше диаметра зрачка, что удобно для работы с телескопом). При этих условиях диаметр линзы-объектива должен быть равен 32 мм. Большой диаметр не будет использован.

9.32. Опыт. Дифракция на непрозрачных препятствиях. Этот опыт хорошо получается с белым источником света, который можно сделать из сильного ручного фонарика с 6-в лампой, если удалить линзу, а рефлектор закрыть черной материей. (Размер нити у лампы должен быть около 0,5 мм.) Расстояние между источником и препятствием должен быть не менее 3 м. При этих условиях волну в области препятствия размером в булавку можно считать «когерентной плоской волной». В качестве экрана можно взять предметное стекло микроскопа, к которому приклеен слой полупрозрачной ленты скотча. Пусть тень от препятствия падает на этот экран, расположенный на расстоянии около 30 см от глаза (подберите это расстояние по вашему глазу, чтобы вам было удобно смотреть на экран). Ваш глаз должен быть почти по линии источник света — тень на экране, так как полупрозрачный экран рассеивает свет под малым углом (в направлении вперед). Целью нашего опыта (кроме наблюдения за прекрасными дифракционными картинками) является грубая проверка предположения о «длине тени» L_0 , которая определяется уравнением $L_0\lambda \approx D^2$, где D — ширина препятствия. Среди различных препятствий используйте булавку (если ее ширина 0,5 мм, то $L_0 \approx 50$ см для видимого света) и волос (при толщине волоса 0,05 мм $L_0 \approx 0,5$ м).

Начнем с булавки. Расположим экран на расстоянии 5—6 м от булавки. При этом дифракционная картина достаточно велика, так что увеличительное стекло не нужно. Чтобы избежать от влияния неоднородностей полупрозрачной ленты скотча, можно слегка покачать экран. Обратите внимание на яркое пятно в центре тени от булавочной головки и на яркую линию по оси самой булавки. Что ярче: пятно от головки и яркая линия или сам светящийся экран вблизи изображения? Теперь рассмотрите изображение булавки, приблизив экран на расстояние 5 см от булавки. (Может понадобится увеличительное стекло, если у вас недостаточно сильное зрение.) Заметьте, что в этом случае тень совершенно темная, без ярких мест в центре. Объяснение в том, что вы приблизились на расстояние, гораздо меньшее L_0 . На края тени видны полосы. Этого следует ожидать (см. п. 9.6).

Теперь рассмотрим изображение волоса. Расположим экран непосредственно за волосом (на расстоянии ~ 1 мм) и будем смотреть на тень через увеличительное стекло. Она покажется резкой и черной, так как L мало по сравнению с L_0 . Увеличим расстояние до нескольких сантиметров. Вы увидите красивые полосы. Отодвиньте экран на 5—6 м — это расстояние в несколько сот раз больше L_0 . Из наших рассуждений следует, что теперь тень должна быть практически размазана и на фоне света от источника ее будет трудно рассмотреть. Глаз является весьма чувствительным детектором контрастов, и, возможно, вам удастся кое-что увидеть. Рассмотрите другие препятствия, например острие ножа, отверстия в алюминиевой фольге и т. п.

9.33. Опыт. Скотчлайт. Достаньте кусок красной ленты скотчлайта. Ее применяют для декораций, для устройства отражателей, связанных с техникой безопасности, для освещения пузырьковых камер и т. п. Рассмотрите ее поверхность через увеличительное стекло. Укрепите полоску скотчлайта на стене и направьте на нее свет карманного фонаря. Держите фонарь вблизи носа, чтобы наблюдать свет, отраженный под углами, близкими к 180° . Отодвиньте фонарь в сторону, но так, чтобы пучок света еще остался на скотчлайте. Этим методом вы можете оценить угловую ширину пучка света, отраженного от скотчлайта. Почему вообще отражен-

ный пучок имеет конечную ширину, т. е. почему отражение не происходит точно на 180° ?

9.34. Когерентность и поляризация. Свет неполяризованного источника проходит через поляриод, ось которого составляет 45° с осями x и y , и падает на экран с двойной щелью. Каждая щель покрыта поляриодом, ось которого направлена для одной щели по оси x , а для другой — по оси y .

а) Вы смотрите невооруженным глазом на интерференционную картину. Видите ли вы обычную картину дифракции от двух щелей? Что вы ожидаете увидеть?

б) Вы смотрите на интерференционную картину, держа у глаз поляриод. Что вы должны увидеть? Что будет происходить при вращении поляриода?

в) Вы смотрите на интерференционную картину через круговой поляризатор. Что вы увидите?

Эта задача имеет много интересных вариантов.

1. Поместите у щелей левый и правый поляризаторы и повторите рассмотренные выше мысленные опыты.

2. Поместите сразу за щелями пластинки $1/4\lambda$ и $1/2\lambda$ и т. д.

9.35. Интерферометр с двойной щелью. Одна щель покрыта предметным стеклом толщиной 1 мм, другая щель открыта. Покажите, что монохроматический свет с длиной волны 5000 Å, проходящий через первую щель, испытывает запаздывание относительно непокрытой щели, близкое к 1000 длин волн. Если при этом дифракционная картина не размазана, свет в высокой степени монохроматичен. Сколь узкой должна быть полоса частот (в Å), чтобы относительный сдвиг фаз от двух щелей менялся меньше чем на 180° от одного края полосы частот до другого? Можете ли вы использовать этот факт для измерения ширины спектральной линии? (Что следует измерить, какой график построить и как из этого графика получить ширину полосы?)

9.36. Опыт. Очень маленькое отверстие как увеличитель. Получите формулу для увеличения, которое дает небольшое отверстие. Проверьте ее следующим образом. На одном куске бумаги нанесите две метки на расстоянии 2 см друг от друга, а на другом — две метки на расстоянии 2 мм. К одному глазу поднесите экран с отверстием. Оба куска бумаги удобнее всего осветить сзади. Смотрите на 2-мм метки через отверстие, а на 2-см метки — невооруженным глазом. Приближая бумагу с 2-мм метками, добейтесь того, чтобы их изображение в одном глазу совместились с изображением 2-см меток в другом. Измерьте соответствующие расстояния.

9.37. Опыт. Шарик. Возьмите стеклянные шарик. Их можно использовать в качестве микроскопа Ливенгука. Поместите точечный источник света на расстоянии метра и сфокусируйте его с помощью шарика в «точку». На каком расстоянии от шарика находится фокус? Чему равен показатель преломления стекла? (Чтобы проверить эту величину, посмотрите, согласуется ли измеренное вами фокусное расстояние с результатом, полученным в п. 9.7, если предположить, что $n=1.5$.) Посмотрите через шарик на небольшой предмет. Используя метод, описанный в опыте 9.36, измерьте увеличение шарика.

9.38. Плоско-выпуклая линза. Это линза — плоская с одной стороны и обладающая сферической (или цилиндрической) поверхностью — с другой. Получите выражение для положения фокальной плоскости такой линзы, если свет падает на ее плоскую поверхность.

9.39. Опыт. Измерение показателя преломления жидкости. Возьмите пустую стеклянную бутылку. Подойдет также баллон от лампы накаливания. Наполним бутылку доверху прозрачной жидкостью. Мы получим толстую цилиндрическую линзу, рассмотренную в п. 9.7. Наполнив бутылку наполненную и положив ее горизонтально, мы будем иметь плоско-выпуклую линзу. Осветите ее сверху точечным или линейным источником. Измерьте расстояние до фокальной плоскости. Воспользовавшись соответствующей формулой, найдите показатель преломления жидкостей: воды, спирта, минерального масла.

9.40. Камера для спутника. Вы читали в газетах, что на спутниках имеются фотокамеры, позволяющие разрешить объекты диаметром в 30 см. Каков должен быть диаметр линзы, если спутник находится на высоте 250 км?

9.41. Опыт. «Вывернутые линзы». Пустая бутылка из-под молока, погруженная в воду, является рассеивающей линзой. Воспользуйтесь аквариумом или большой кастрюлей, в которую можно опустить зеркало, чтобы превратить вертикальный

пучок света в горизонтальный. Несколько капель молока, добавленных в воду, позволят видеть пучок. Хороший «карандашный» пучок можно получить, закрыв линзу ручного фонарика куском картона с центральным отверстием. (Лампы для ручных фонариков обычно имеют наплывы сверху баллона. Но вы используете не прямой свет от лампы, который уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, а параллельный пучок от параболического зеркала.) С помощью воды, слегка замутненной молоком (для наблюдения за пучком), вы можете исследовать воздушные линзы или линзы из масла или стекла.

9.42. Опыт. Смешивание цветов. Наш глаз (и мозг) не производит фурье-анализа света (ухо выполняет эту операцию для звука). Имея некоторый навык, вы, однако, будете в состоянии различить цвет монохроматического излучения и цвет, возникший от смешения излучений с различными длинами волн. Психологически мы различаем «белый» цвет. Дифракционная решетка говорит нам, что это смесь всех длин волн видимого спектра.

а) Посмотрите через ваш красный фильтр. Он пропускает красный и голубой цвет, но задерживает зеленый.

б) Взгляните через дифракционную решетку на два разделенных источника белого света (линейные источники или осветительные лампы). Меняйте расстояние между источниками, пока левый спектр первого порядка правой лампы не перекроется с правым спектром первого порядка левой лампы. Это дает вам возможность смешать две длины волн и рассмотреть «психологический» эффект такого смешения. Для этого опыта лучше всего использовать линейные источники света.

9.43. Точечный объект находится на расстоянии 2 м от положительной линзы силой в 1 диоптрию, на оси линзы. Где находится изображение?

9.44. Тонкая линза, используемая как увеличительное стекло, дает пятикратное увеличение. Вторая линза дает семикратное увеличение. Сложим обе линзы. Чему равно увеличение от составной линзы: 35 , 12 или 2 ?

9.45. Продольное увеличение. Пусть точечный объект на оси тонкой положительной линзы смещается вдоль оси на величину dp . При этом изображение сместится на dq . Покажите, что

$$dq = dp \frac{q^2}{p^2}.$$

9.46. Глубина фокуса. Тонкая линза диаметром D фокусирует удаленный от нее на расстоянии p точечный объект на фотопленку, расположенную на расстоянии q от линзы. Изображение другого объекта находится на расстоянии $p+dp$ и будет не в фокусе. Оно пройдет через свой фокус до или после пленки и даст на пленке «круг ошибки».

а) Покажите, что диаметр d «круга ошибки» равен $d \approx D(q/p^2)dp$. Таким образом, для данной «допустимой» величины «круга ошибки» (т. е. для данного значения d и для определенных значений q и p) «глубина фокуса» dp обратно пропорциональна диаметру линзы D . Малые D обеспечивают большую глубину фокуса. Частное от деления фокусного расстояния на диаметр называется « f -числом»^{*}). Большое значение f -числа означает малый диаметр апертурного ограничения линзы и большую глубину фокуса. Для D , равного нулю, мы имеем «камеру-обскуру»; в этом случае из формулы следует бесконечная глубина фокуса. Вы можете проверить этот вывод: в такой камере предметы, находящиеся на расстояниях от 1 см до бесконечности, будут в фокусе, и, чтобы рассмотреть их, вам не нужно напрягать аккомодирующие мышцы глаза.

б) Если D становится слишком малым, мы не можем пренебречь дифракцией. Покажите, что она создает «круг ошибки» диаметром $d \approx q\lambda/D$. Теперь допустим, что мы не ограничены «плотностью зерен» фотопленки и вообще ничем, связанным с пленкой, а также пусть нас не беспокоит вопрос интенсивности (малая интенсивность требует больших D). Введем величину $d_{\text{ср}}^2$, равную сумме квадратов диаметров «круга ошибки», возникающих из-за конечной глубины фокуса и из-за дифракции. Найдите минимум $d_{\text{ср}}^2$ по переменной D , фиксируя другие переменные.

^{*}) Обратное отношение называют *относительным отверстием*; квадрат относительного отверстия называют *светосилой линзы*. (Прим. ред.)

Покажите, что при данных λ , ρ и $\Delta\rho$ наименее размытое изображение соответствует $D^2 = \lambda\rho^2/\Delta\rho$.

в) Забудем о дифракции. Предположим, что мы фотографируем двух людей, находящихся от нас на расстояниях 4,5 и 7,5 м. Фокусное расстояние линзы равно 10 см. Вы хотите, чтобы диаметр «круга ошибки» для *обоих* людей был меньше 1 мм «в пространстве объекта». Найдите необходимое f -число. (Используйте грубые приближения, например, возьмите среднее значение $\rho \approx 6$ м.)

г) Можно ли в условиях в) заметить влияние дифракции на изображение?

О т в е т. f -число ≈ 50 . Размытость изображения в равной степени вызвана глубиной фокуса и дифракцией.

9.47. Опыт. *Диаграмма излучения камертона; квадрупольное излучение.* Поднесите к уху ножку звучащего камертона. Вращая его вокруг оси (ось рукоятки камертона), прислушайтесь к максимумам и минимумам интенсивности. Поднесите камертон к концу трубы, настроенной в резонанс с камертоном, и медленно вращайте его вокруг своей оси. При вращении на 360° вы обнаружите четыре угла нулевой и четыре угла максимальной интенсивности. Держите камертон в положении нулевой интенсивности. Не нарушая относительного положения камертона и трубы, поместите между камертоном и концом трубы кусок картона таким образом, чтобы он закрыл половину входного отверстия трубы. При этом одна ножка камертона должна остаться у открытой половины входного отверстия. Что произошло? Почему? Теперь поместите у противоположных концов трубы два камертона и слушайте биения. Установив ритм биений, поверните один камертон на 90° вокруг оси. При этом вы перейдете от одного угла максимальной интенсивности к следующему. Биения не будут продолжаться. Сразу после поворота вы услышите два биения вместо одного, а затем биения будут продолжаться в обычном ритме, но максимумы сменятся минимумами. Если у вас недостаточно острый слух, вам будет трудно заметить эту смену, но вы всегда заметите «дополнительное» биение, возникшее при повороте камертона. (Вам поможет, если вы будете считать: «1 и 2 и 3 и...», произносите цифру на максимуме, а «и» на минимуме биений; при этом не сбейтесь со счета при поворачивании камертона.)

В чем объяснение этих явлений? Подумайте о том, как ножки камертона действуют на окружающий воздух. Когда они удаляются друг от друга, они отталкивают от себя воздух с внешней стороны, сообщая ему направленную наружу скорость. Благодаря тому, что пространство между ножками увеличивается, в нем возникает небольшой недостаток воздуха. Воздух с боков устремляется в это пространство. Таким образом, скорость воздуха направлена наружу в плоскости ножек и внутрь области между ножками в перпендикулярной плоскости. В следующую половину цикла ножки сближаются; воздух устремляется к наружным поверхностям ножек и выталкивается из области между ними. Где-то между этими направлениями должны быть направления, для которых индуцированная скорость воздуха равна нулю, т. е. направления, где скорость имеет узлы. В этом объяснение четырех максимумов и четырех минимумов, возникающих при полном обороте камертона вокруг длинной оси. Картина излучения, показанная на рисунке а), отвечает первой половине периода, когда ножки движутся наружу. Соответствующее излучение носит название *квадрупольного излучения*. Если вы имеете лишь одну ножку, диаграмма излучения, показывающая положение максимумов и минимумов и относительные фазы колебания, соответствует *дипольному излучению*. Если вы имеете два идентичных осциллирующих диполя (в нашем примере речь идет о звуке, но с равным успехом мы можем говорить о радиоволнах или о других волнах), смещенных в пространстве и колеблющихся с фазами, отличающимися на 180° , вы получите квадрупольное излучение. В зависимости от направления смещения по отношению к направлению колебаний одного диполя, вы получите различные диаграммы квадрупольного излучения. Однако все они имеют общие свойства: четыре «лестка» интенсивных колебаний, соответствующих «конструктивной» интерференции вкладов от обоих диполей. Фазы в соседних лестках отличаются на 180° . Между лестками расположены узлы колебаний. (Диаграмма диполя имеет два лестка и две линии узлов.) На рисунках показаны диаграммы дипольных и двух типов квадрупольных колебаний. Рисунок б) представляет собой волновую функцию дипольного излучения в полярных координатах (для данного момента времени). Диаграмма в) дает суперпозицию волновых функций

двух диполей, сдвинутых относительно друг друга в направлении лепестков диглоя и колеблющихся со сдвигом фаз в 180° . Эта диаграмма соответствует колебаниям камертона. Диаграмма *г)* отвечает суперпозиции двух диполей, смещенных по линии узлов и колеблющихся с тем же сдвигом фаз в 180° .

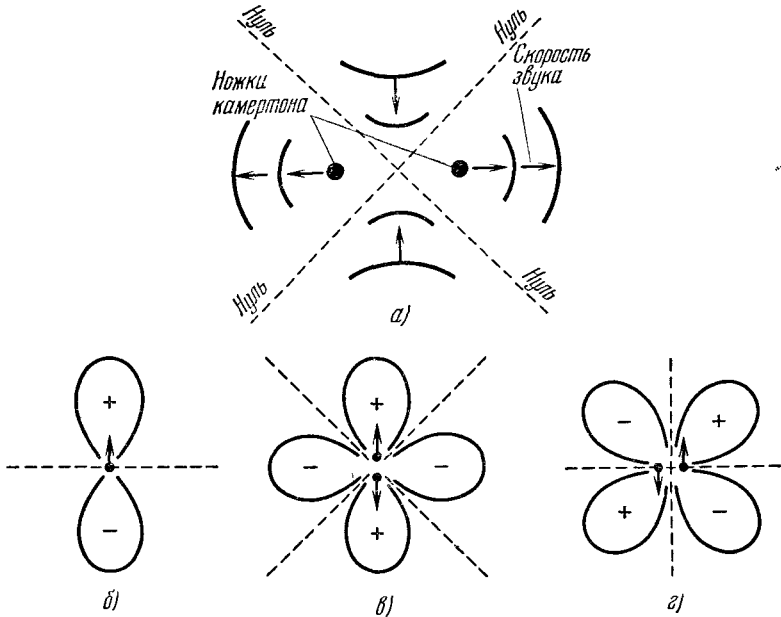


Рис. К задаче 9.47. Диаграмма излучения камертона.
а) Квадруполь; *б)* диполь; *в)* квадруполь; *г)* квадруполь.

9.48. Плоская антенна, поверхность которой имеет площадь A_T , излучает радиоволны. Они принимаются плоской антенной с площадью A_R , находящейся на большом расстоянии D от передатчика. Покажите, что излученная мощность P_T и принятая мощность P_R связаны приближенным соотношением

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{A_R A_T}{\lambda^2 D^2}.$$

Предположим, что передающая и принимающая антенны представляют собой суживающийся микроволновый «горн», апертура которого имеет форму квадрата со стороной в 3 м. Пусть частота микроволнового излучения равна 1000 МГц, а расстояние между приемником и передатчиком 30 км. Чему равно отношение P_R/P_T ?

9.49. Интерференционная картина от N идентичных щелей. Амплитуда для этого случая выражается формулой (54), п. 9.6. Получите с помощью векторной диаграммы сумму соответствующих комплексных амплитуд для произвольного значения $\Delta\varphi$ (сдвиг фаз колебаний в соседних щелях). Получите графическое представление для первого нуля, примыкающего к главному максимуму; оно получается из условия, что $\Delta\varphi = 2\pi/N$. Покажите на векторной диаграмме, что фазовая постоянная суперпозиции равна среднему из фазовых постоянных первого и последнего вкладов.

9.50. Исправление хроматической aberrации. С помощью сложной линзы из стекол двух разных сортов можно в значительной степени избавиться от хроматической aberrации. Вместо линзы рассмотрим более простой случай тонкой призмы. Из двух тонких призм с углами при вершинах α_1 и α_2 образуем сложную призму,

которая отклоняет свет с длиной волны $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ на заданный угол θ_0 и имеет нулевое значение $d\theta_0/d\lambda$. Стекло первой призмы имеет показатель преломления $n_1(\lambda)$, второй — $n_2(\lambda)$. Эти функции нам известны.

О т в е т.

$$\alpha_1 \frac{dn_1}{d\lambda} = \alpha_2 \frac{dn_2}{d\lambda}.$$

Теперь разложите величину θ для длины волны λ в ряд Тейлора по переменной $\lambda - \lambda_0$. Остановитесь на члене, пропорциональном $(\lambda - \lambda_0)^2$. Как произвести дальнейшее уменьшение хроматической aberrации? Что для этого нужно?

9.51. Опыт. *Подводное видение.* Рассмотрите различные предметы под водой, используя маску для подводной охоты. Объясните, почему предметы кажутся удаленными на три четверти действительного расстояния. Особенно яркой демонстрацией является наблюдение за человеком, чья голова находится над водой. Погрузите нижнюю половину маски в воду так, чтобы вода была на уровне глаз. Тогда вы сможете видеть голову человека, глядя в воздух над водой, и его тело, глядя в воду.

9.52. Опыт. *Стекла для подводного видения.* Если вы смотрите под водой без маски, все кажется вам очень размытым. Это объясняется тем, что показатели преломления воды и глаза мало отличаются. Для простоты положим, что они одинаковы. Предположим также, что влияние глазной линзы невелико, т. е. что вся фокусировка происходит вследствие преломления света на первой поверхности воздух — глаз. (Это грубое приближение. Ведь все-таки мы видим под водой.) Пусть фокусное расстояние для первой поверхности равно 3 см и при этом параллельный пучок света из воздуха фокусируется на сетчатке. Под водой фокусирующее действие исчезает. Мы хотим сделать такие стекла, чтобы с их помощью можно было ясно видеть под водой. Воспользуемся стеклом с показателем преломления 1,5. Пусть фокусное расстояние сделанной из этого стекла линзы равно 3 см . Покажите, что в воздухе это расстояние будет равно 1 см . Каково увеличение, даваемое такой линзой, если ее использовать как обычное увеличительное стекло? Предположим, что вы используете в качестве линзы стеклянный шарик и хотите сформировать изображение (для параллельного пучка в воде), находящегося на расстоянии 3 см от задней поверхности шарика. Каков должен быть его диаметр?

О т в е т. Около $1,7 \text{ см}$. Проверьте это, достав подходящий шарик. (Держите его близко к глазу.)

9.53. Опыт. *Интерференция в рассеянном свете.* Мы опишем простой способ получения красивых цветных интерференционных полос. Покройте обычное зеркало тонким слоем тальковой пудры (годится также мука, порошок, пыль, наконец, можно просто подышать на зеркало, чтобы образовать капельки влаги). Станьте на расстоянии $1-2 \text{ м}$ от зеркала. Направьте на него узкий пучок света от ручного фонарика и смотрите на отражение баллона лампы. (Можно взять любой фонарик, закрыв рукой большую часть рефлектора, с тем чтобы размер источника света не превышал 1 см ; можно воспользоваться пламенем свечи, если вы работаете в темной комнате.)

Наблюдайте за полосами! Попробуйте различные положения источника света, передвигая и удаляя его от зеркала. Полосы созданы интерференцией между следующими двумя группами лучей. Первая группа — это лучи, прошедшие через зерно тальковой пудры, рассеявшиеся и отразившиеся от зеркала к вашему глазу. После отражения от зеркала они не испытывают рассеяния. Вторая группа лучей проходит через зерна пудры без рассеяния, отражается от зеркала и рассеивается в ваш глаз на том же зерне пудры.

Каждый из лучей рассеивается очень близко к первоначальному направлению. Поэтому каждый из двух интерферирующих лучей проходит одну и ту же толщину вещества зерна пудры. Объясните, почему центральная полоса (та, которая кажется проходящей через изображение точечного источника) отвечает интерференционному максимуму. Для белого света она белая. Полосы приобретают окраску только на расстоянии в несколько полос по обе стороны от центральной полосы. Расчет этого явления довольно сложен *).

*) См. A. J. de Witte, *Interference in Scattered Light* (Интерференция в рассеянном свете), *Am. J. Phys.* **35**, 301 (1967).

9.54. Звездные интерферометры.

а) Двойная щель, за которой следует линза и фотопластинка, может дать угловое разрешение $\delta\theta \approx \lambda/d$, где λ — длина волны, а d — расстояние между щелями. Это позволяет исследовать структуру астрономических объектов, испускающих видимый свет.

б) В земной атмосфере имеются связанные с турбулентностью «пузырьки» воздуха, показатель преломления которых отличается от среднего показателя преломления воздуха. При $d \sim 30$ см эти «пузырьки» создают сдвиг фаз порядка π для двух лучей от астрономического объекта к обоим щелям. Покажите, что предел углового разрешения составляет ~ 2 микрорадиана для видимого света на поверхности Земли.

в) Заменим две оптические щели двумя радиоантеннами, регистрирующими радиоволны с $\lambda = 30$ см. Вместо линз, собирающих в одну область световые волны от обеих щелей (в этой области происходит интерференция), используем для передачи сигналов от наших антенн к центральной приемной станции коаксиальные кабели или будем транслировать эти сигналы по воздуху. Приемная станция в данном случае играет роль фотопленки. Покажите, что для получения того же углового разрешения, что и в случае видимого света при расстоянии $d = 30$ см, радиоантенны должны быть разведены на расстояние в 180 км.

г) Протяженность турбулентных «пузырьков» воздуха порядка метра. Так как лучи в воздухе разведены на гораздо большее расстояние, случайный сдвиг фаз, набираемый соответствующими лучами, проходящими через обе щели, не зависит от расстояния между лучами. В первом приближении можно предположить, что действие атмосферы на две антенны, разнесенные на 180 км, аналогично ее действию на видимый свет, проходящий через две щели, разделенные расстоянием $d \approx 30$ см. Таким образом, атмосферные флуктуации коэффициента преломления будут ограничивать угловое разрешение интерферометра с двумя радиоантеннами. Показатель преломления воздуха для радиоволн в самом деле мало отличается от показателя преломления для видимого света. Однако соответствующий сдвиг фаз для 30-см волн во много тысяч раз меньше, чем для световых волн. Почему?

д) Атмосферные флуктуации показателя преломления не влияют на работу радиоинтерферометра. Поэтому расстояние между антеннами может быть значительно больше 180 км, и с помощью радиоволн можно получить лучшее разрешение, чем с видимым светом. (Разумеется, астрономические объекты должны излучать 30-см радиоволны, чтобы мы могли использовать метод радиоинтерференции.) Поэтому можно представить себе радиоинтерферометр, одна антенна которого находится в Нью-Йорке, а другая — в Калифорнии. Этим точкам соответствует база в 3000 км и угловое разрешение порядка 10^{-7} рад. К сожалению, при этом возникают такие проблемы, как сдвиг фаз радиоволн при их передаче по кабелю (вариации температуры) или по радио к центральной станции, где происходит интерференция. Слой воздуха в атмосфере над нами эквивалентен 8-км слою с равномерной плотностью, равной плотности воздуха на уровне моря. Масса воздуха между Нью-Йорком или Калифорнией и центральной станцией, расположенной где-нибудь на Среднем Западе, в несколько сот раз больше массы этого 8-км слоя, что является серьезным препятствием для радиоинтерферометра. Существует острое решение этой проблемы, данное Бротеном*). На каждой станции нужно иметь атомные часы, например водородный лазерный генератор на частоте 1000 МГц (10^9 циклов в 1 сек). Стабильность таких часов достигает 1 цикла на 10^{14} циклов. Покажите, что такие часы стабильны в течение суток (сдвиг за сутки меньше 1 цикла).

е) Предположим, что мы хотим измерить радиоизлучение звезд на частоте $\nu_0 = 1000$ МГц (это 30-см радиоволны) при ширине полосы $\Delta\nu = 1$ МГц. Местные генераторы каждой приемной станции работают на частоте 1000 МГц. На каждой станции сигнал местного генератора смешивается с сигналом, поступающим из антенны. Пусть токи генератора и антенны равны соответственно $\cos \omega_0 t$ и $A \cos(\omega t + \phi)$. Тогда среднее (по одному циклу быстрых колебаний) значение квадрата суперпозиции обоих токов дает мощность $P = I^2 R$. Величина мощности

*) N. B. Broten et al, Lond Base-line Interferometry Using Atomic Clocks and Tape Recorders, Science 156, 1592 (1967).

пропорциональна

$$P = 1 + A^2 + 2A \cos [(\omega_0 - \omega) t - \varphi].$$

Получите эту формулу.

ж) Если $v_0 t$ известно с точностью 1 цикла за $t=1$ сутки, то точность, с которой мы знаем P , составит 1 цикл на величину $(v_0 - v)t$. Пусть частота v_0 находится в центре полосы Δv , тогда среднее значение $v_0 - v$ в полосе равно нулю. Ширина полосы равна 1 Мгц. Сигнал P , частотный спектр которого простирается от нуля до частот порядка 1 Мгц, записывается на каждой станции магнитофоном. (Для этой записи подходят видеомагнитофоны телевидения.) Пленки с записью (которая длится меньше суток) могут быть доставлены в лабораторию, удаленную от обеих станций. Здесь, после синхронизации магнитофонной записи, можно произвести сложение сигналов. Чтобы не потерять информацию о фазе, необходимо, чтобы была выдержана точность синхронизации в 1 цикл (1 цикл на частоту колебаний сигнала P в каждом магнитофоне). Этот сигнал имеет частотные компоненты в интервале от 0 до 1 Мгц в соответствии с шириной полосы. Все это означает, что синхронизация обеих записей должна быть лучше 1 мксек. При записи сигналов от местных антенн на ленты были нанесены марки времени. Точность их нанесения должна быть лучше 1 мксек. Это обычная точность синхронизации видеомагнитофонов телевидения. Таким способом можно создать звездный интерферометр, состоящий из расположенной в Нью-Йорке антенны, сигналы которой смешиваются с сигналами водородного лазера и записываются магнитофоном аналогичного устройства в Калифорнии. При вращении Земли интерферометр сканирует небо. Фазовая «постоянная» φ тока каждой антенны равна величине kr , где r — расстояние от антенны до звезды. Таким образом, ток от данной звезды в нью-йоркской антенне равен $A_1 \cos(\omega t + kr_1)$, а в калифорнийской равен $A_2 \cos(\omega t + kr_2)$ для одной и той же частотной компоненты сигнала. Положим для простоты, что $A_1 = A_2 = A$. Покажите, что ток, возникающий при суперпозиции обеих магнитофонных записей P_1 и P_2 , пропорционален $1 + A^2 + 2A \cos^{1/2}(\omega_0 - \omega) t \cos^{1/2} k(r_1 - r_2)$. Возведем этот ток в квадрат и усредним по циклу колебаний с частотой $v_0 - v$. Покажите, что полученное в результате этой операции среднее значение мощности пропорционально $(1 + A^2)^2 + A^2[1 + \cos k(r_1 - r_2)]$. Член $\cos k(r_1 - r_2)$ совершает цикл изменений каждый раз, когда калифорнийская станция приближается на 15 см к звезде, а нью-йоркская удаляется от нее на такое же расстояние (предполагаем, что $\lambda = 30$ см). Если мы имеем другую звезду, она будет разрешена, если ее значение $k(r_1 - r_2)$ отличается от значения этой величины для первой звезды на величину π , т. е. если ее угловое расстояние от первой звезды будет порядка λ/d .

з) Мы ничего не сказали о других технических проблемах. Так, например, существует много радиозвезд, а мы хотели бы, чтобы данный телескоп рассматривал лишь небольшую часть неба, наблюдая за определенной звездой. Как это сделать? (Предположим, что диаметр каждого телескопа 50 м.)

и) Рассмотрим другую проблему. Нам необходимо знать положение «центральной» полосы в интерференционной картине, так как именно эта полоса дает точное направление на звезду. (З а м е ч а н и е. Вы наблюдаете за точечным источником света с помощью двойной щели. Если вы работаете, например, с зеленым или красным фильтром, то обнаружить центральную полосу трудно. Но если вы используете белый свет, это легко сделать.) Почему? Покажите, как использовать в каждой антенне две полосы частот (они аналогичны красному и зеленому свету), смешав каждую с сигналом местного генератора. Рассмотренный здесь интерферометр для радиозвезд можно использовать для точных измерений флуктуаций периода вращения Земли *).

9.55. Преобразование амплитудной модуляции в фазовую для радиоволн. (Эта задача тесно связана с задачей 9.56.)

а) Амплитудно-модулированное напряжение имеет вид

$$V(t) = V_0 [1 + a(t)] \cos \omega_0 t.$$

Здесь ω_0 — несущая частота, $a(t)$ — относительная амплитудная модуляция. При

*) См. T. G o l d, Science 157, 302 (1967) и G. J. F. M a c D o n a l d, Science 157, 304 (1967).

фазовой модуляции напряжения имеет форму

$$V(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $\varphi(t)$ — модулированная (т. е. зависящая от времени) фазовая «постоянная». Покажите, что мгновенная угловая частота в такой волне равна $\omega(t) = \omega_0 + d\varphi(t)/dt$. Таким образом, вместо фазовой модуляции мы можем говорить о частотной модуляции (ЧМ).

б) Величина относительной амплитудной модуляции $a(t)$ или модулированная фаза $\varphi(t)$ содержит в себе передаваемую информацию, например речь, музыку и т. п. Произведем фурье-анализ передаваемой музыки и рассмотрим одну из фурье-компонент с частотой ω_m (индекс m означает модуляцию). Заменим $a(t)$ на $a_m \cos \omega_m t$ (можно было бы рассмотреть и член с $\sin \omega_m t$, но мы не будем этого делать). Амплитудно-модулированное напряжение приобретает вид

$$V(t) = V_0 [1 + a_m \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t = V_0 \cos \omega_0 t + V_0 a_m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t.$$

Оно эквивалентно суперпозиции чисто гармонических колебаний с несущей частотой ω_0 , колебаний верхней боковой полосы $\omega_0 + \omega_m$ и нижней боковой полосы $\omega_0 - \omega_m$. Докажите это утверждение, преобразовав написанное выражение для $V(t)$.

При АМ-радиовещании эти частоты излучаются и их принимает наша радиодиагностика. Всякого рода помехи, например помехи от электрической бритвы или от освещения, также излучают на этих частотах, и их вклад в амплитудную модуляцию заключается во внезапном возрастании или уменьшении амплитуды для данной частоты. Эти помехи можно в большой степени убрать, если преобразовать АМ-напряжение в ЧМ-напряжение. Действительно, «освещение» производит внезапное изменение амплитуды, а ЧМ-приемник «знает», что это изменение не может быть частью музыки, так как музыка передается на постоянной амплитуде. Приемник с ЧМ может быть устроен так, чтобы отфильтровать внезапные изменения амплитуды.

Вопрос в том, как преобразовать АМ-колебания в ЧМ. АМ-напряжение подается на вход полосового фильтра, который пропускает узкую полосу частот, включающую частоту ω_0 , но частоты $\omega_0 \pm \omega_m$ находятся за пределами полосы пропускания фильтра. После того, как несущая частота изолирована от боковых полос, она получает сдвиг по фазе на четверть периода ($+90^\circ$ или -90°) и снова смешивается с боковыми частотами, которые остались без изменений. (Мы можем также уменьшить или увеличить амплитуду несущей частоты, но эту возможность мы не рассматриваем.) Это означает, что в выражении $V_0 \cos \omega_0 t$ мы должны заменить $\cos \omega_0 t$ на $\sin \omega_0 t$. Получаем

$$V'(t) = V_0 \sin \omega_0 t + V_0 a_m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t.$$

Обозначим теперь через $\varphi(t)$ величину $a_m \cos \omega_m t$, которая является относительной амплитудой модуляции $a(t)$ для данной модуляционной частоты. Для простоты положим, что величина $a(t)$, т. е. $\varphi(t)$, мала по сравнению с единицей. Тогда $\cos \varphi(t) \approx 1$, $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$.

в)) Покажите, что написанное выше выражение можно преобразовать к виду

$$V'(t) = V_0 \sin [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \varphi(t) = a_m \cos \omega_m t.$$

Итак, мы нашли способ преобразования АМ в ЧМ (и наоборот): фазу несущей волны нужно сдвинуть на $\pm 90^\circ$ относительно боковой полосы. Это открытие Армстронга в 1936 г. сделало возможным коммерческое радио на ЧМ.

9.56. Преобразование модулированного по фазе света в свет, модулированный по частоте.

а) Начнем с обыкновенного микроскопа. Нас не интересует проблема увеличения, и мы положим, что увеличение микроскопа равно единице. Пусть предметное стекло микроскопа лежит в плоскости xy в точке $z=0$. Поместим в $z=2f$ простую линзу (f — фокусное расстояние этой линзы), а в $z=4f$ экран или фотопластинку. Тогда стекло микроскопа изобразится на экране, а увеличение будет равно единице.

б) Теперь в каплю воды, лежащую на предметном стекле, поместим амёбу и образуем ее изображение на экране. К сожалению, мы не сможем увидеть это изображение, так как показатели преломления амёбы и воды очень близки и амёба

прозрачна. Чтобы увидеть амёбу, нам придется погрузить ее в краситель, который убьет ее, а мы хотим изучать живую амёбу. Роль красителя сводится к модуляции амплитуды света, испущенного «точкой» амёбы с координатой $+z$.

В отсутствие красителя амплитуда на конце амёбы $+z$ при данном значении поперечной координаты x такая же, как если бы амёбы не было. Фазы для этих двух случаев различны, потому что свет проходит через разные толщи амёбы, зависящие от x , а показатель преломления амёбы все же отличается от показателя преломления воды. Предположим, что предметное стекло микроскопа освещено плоской волной монохроматического света от источника S , помещенного в фокальной плоскости линзы (см. рисунок к задаче). Предположим, что в точке $z=0$ электрическое поле в отсутствие амёбы одинаково для всех x и равно

$$E(x, z, t) = E_0 \sin \omega t.$$

При наличии амёбы существует сдвиг фаз, зависящий от x , и электрическое поле в плоскости $z=0$ равно

$$E(x, z, t) = E_0 [\omega t + \varphi(x)].$$

Итак, свет, прошедший через амёбу, модулирован по фазе. Линза в $z=2f$ образует

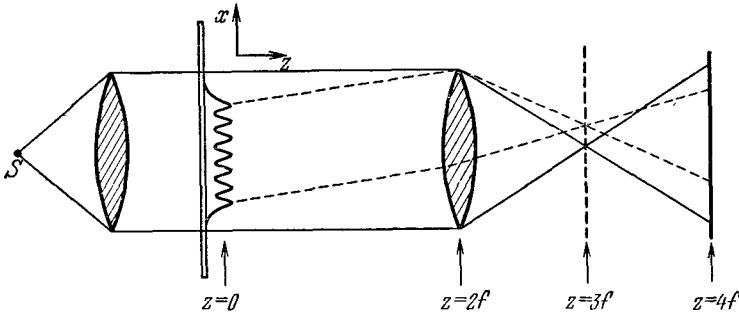


Рис. к задаче 9.56. Фазово-контрастный микроскоп.

В этом примере увеличение, для простоты, равно единице. Объект находится в плоскости $z=0$. Плоскость изображения $z=4f$. Фокальная плоскость объектива $z=3f$.

изображение амёбы на экране в плоскости $z=4f$. Электрическое поле в этой плоскости определяется тем же выражением, что и в плоскости $z=0$ (если пренебречь потерями света и не заботиться о том, что изображение перевернуто, т. е. x заменено на $-x$). Среднее по времени значение квадрата электрического поля равно $E_0^2/2$ независимо от x , и мы не видим никакого изображения.

в) Окрашивание модулирует амплитуду E_0 , но убивает амёбу. Поэтому нам нужно преобразовать модулированный по фазе свет в свет, модулированный по амплитуде. Чтобы понять, как это делается, воспользуемся аналогией между этой задачей и проблемой преобразования АМ-напряжения в ЧМ-напряжение. Нам нужно обратить эту задачу и осуществить преобразование ЧМ-света в АМ-свет. [Заметим, что здесь мы имеем дело с модуляцией в пространстве $\varphi(x)$, а не с модуляцией во времени $\varphi(t)$. Это не должно, однако, беспокоить нас.] Возвращаясь к задаче 9.55, мы видим, что начав с амплитудной модуляции $a(t) = a_m \cos \omega_m t$, мы кончим фазовой модуляцией $\varphi(t) = a_m \cos \omega_m t$. Здесь мы начинаем с фазовой модуляции $\varphi(x)$. Предположим, что для любых x величина $\varphi(x)$ мала по сравнению с радианом. Покажите, что фазово-модулированный свет в плоскости $z=0$ или $z=4f$ может быть записан (если $\varphi < 1$) следующим образом:

$$E(x, z, t) = E_0 \sin \omega t + E_0 \varphi(x) \cos \omega t.$$

Теперь произведем фурье-анализ функции $\varphi(x)$ и рассмотрим единственную фурье-компоненту с волновым числом k_m , т. е. положим $\varphi(x) = a_m \cos k_m x$. В этом случае выражение для фазово-модулированного света в плоскости $z=0$ или $z=4f$ принимает вид

$$E(x, z, t) = E_0 \sin \omega t + E_0 a_m \cos k_m x \cos \omega t.$$

Это все еще фазово-модулированный свет и изображение в плоскости $z=4f$ невидимо. Но обратимся снова к задаче 9.55. Назовем по аналогии член $E_0 \sin \omega t$ «несущей световой волной». Мы видим, что, если бы нам удалось сдвинуть на 90° фазу несущей волны по отношению к фазе модулированного члена (с амплитудой a_m), мы получили бы АМ-свет. Не беспокоясь о том, как это можно сделать, заменим в первом члене написанного выше выражения $\sin \omega t$ на $\cos \omega t$. Тогда для света на экране в $z=4f$ получим

$$E'(x, z, t) = E_0 \cos \omega t + E_0 a_m \cos k_m x \cos \omega t = \\ = E_0 [1 + a_m \cos k_m x] \cos \omega t = E_0 [1 + a(x)] \cos \omega t.$$

Интенсивность АМ-света пропорциональна среднему по времени значению E'^2 , т. е. $1/2 E_0^2 [1 + a(x)]^2$, которое зависит от x . Таким образом, мы получили амплитуду, зависящую от толщины амебы. Теперь мы можем «видеть» амебу.

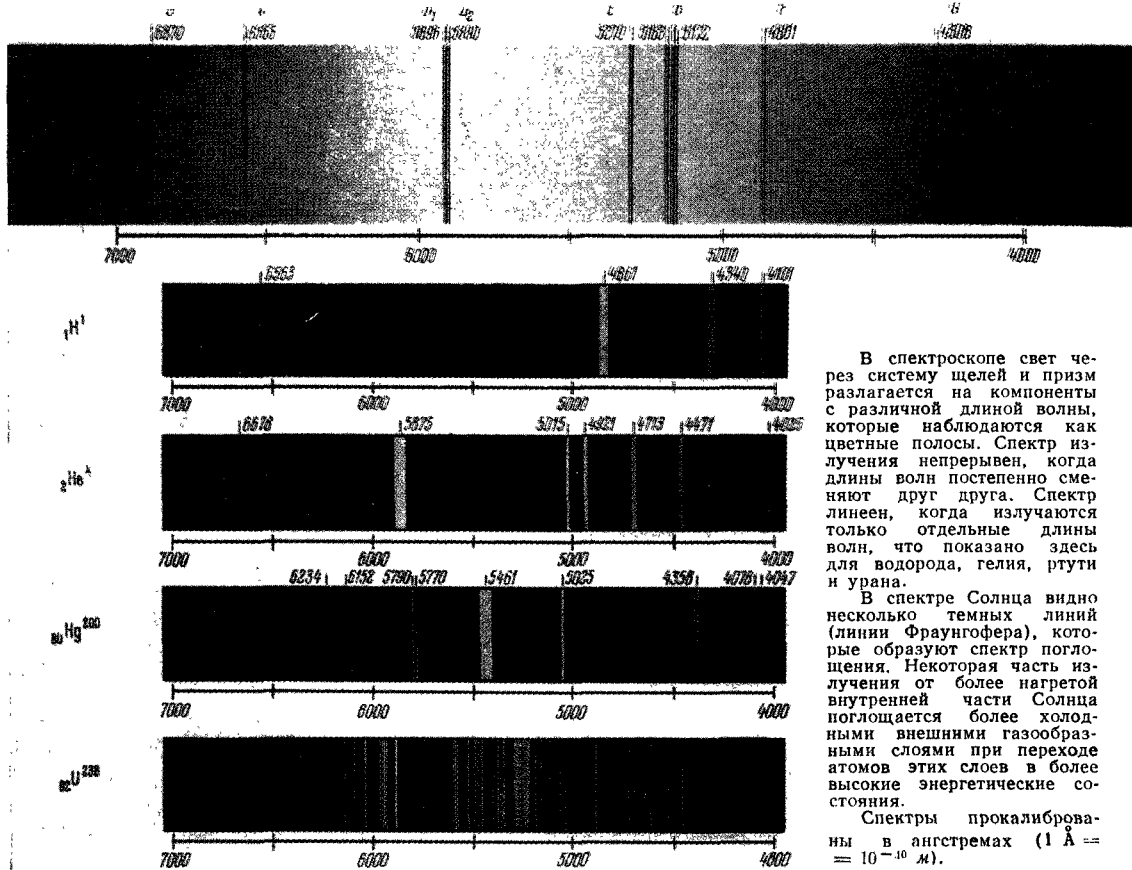
г) Остается последняя проблема: как можно изолировать несущую световую волну от второй части волны и осуществить 90° -ный сдвиг фазы и последующую суперпозицию обеих частей волны на экране? Все это должно быть сделано между $z=0$ и $z=4f$. В случае преобразования АМ-напряжения в ЧМ-напряжение ключ к решению проблемы — в полосовом фильтре, который разделяет несущую частоту ω_0 от боковых полос $\omega = \omega_0 \pm \omega_m$. По аналогии нам нужен полосовой фильтр волновых чисел, который разделит бы волновое число $k_x = k_0 = 0$ от боковых полос $k_x = k_0 \pm k_m$. Последнее утверждение станет яснее, если мы запишем моделированное по фазе электрическое поле в плоскости $z=0$ в виде

$$E(x, z, t) = E_0 \sin [\omega t - k_0 x] + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos [\omega t - (k_0 + k_m) x] + \\ + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos [\omega t - (k_0 - k_m) x],$$

где $k_0=0$ и стоячая волна $\cos k_m t \cos \omega t$ представлена суперпозицией двух бегущих волн с $k_x = +k_m$ и $k_x = -k_m$. Обсудим это выражение. Мы видим, что модулированные по фазе колебания в плоскости $z=0$ состоят из трех волн: несущей волны с $k_x=0$, модуляция добавляет две волны с $k_x = +k_m$ и $k_x = -k_m$. У всех трех бегущих волн почти одна и та же величина k_z , равная ω/c , так как мы полагаем, что k_x мало по сравнению с k_z , т. е. что волны распространяются главным образом в направлении z , и поэтому величина $\omega/c = \sqrt{k_z^2 + k_x^2}$ вектора распространения мало отличается от k_z для всех трех волн. (В этом рассуждении мы не принимаем во внимание k_y .)

д) На рисунке показано предметное стекло микроскопа и k_m -компонента зависимости толщины амебы от x . Несущая волна создается точечным источником S . Ее траектория показана сплошными линиями. Лучи для верхней полосы частот ($k_x = +k_m$) показаны штриховыми линиями, а ход лучей для нижней полосы ($k_x = -k_m$) на рисунке не показан. Каждая из этих волн является почти плоской волной, и линза фокусирует их. В фокальной плоскости при $z=3f$, как видно из чертежа, происходит пространственное разделение всех трех волн. Лучи проходят дальше, к экрану, где происходит их суперпозиция. Заметьте, что в фокальной плоскости при $z=3f$ три компонента волны полностью разделены в пространстве. В этом месте можем воздействовать на несущую волну, не возмущая боковые волны. Здесь мы должны иметь пространственный фильтр, чтобы выделить данное k_x , аналогично временному фильтру (схема, осуществляющая фурье-анализ) предыдущей задачи, выделявшему данное значение ω . Выделив несущую волну в точке $z=3f$, мы сможем изменить ее фазу на 90° , не трогая боковые полосы. Предложите способ сдвинуть фазу несущей волны на 90° . Фазово-контрастный микроскоп был предложен Ф. Цирнике в 1934 г.

Теперь мы можем в более общем виде описать рассмотренные нами методы. В плоскости $z=0$ существует некоторая функциональная зависимость от координаты x амплитуды и фазы колебаний $A(x) \cos [\omega t + \varphi(x)]$. (В нашем примере амплитудной модуляции в $z=0$ не было, т. е. $A(x) = \text{const.}$) Мы производим фурье-анализ зависимости от x и получаем при $z=0$ стоячие волны, которые действуют как суперпозиция бегущих волн с известными значениями k_x и k_z . Затем с помощью линзы мы преобразуем зависимость от k_x (при $z=0$) в зависимость от x (в фокаль-



В спектроскопе свет через систему щелей и призм разлагается на компоненты с различной длиной волны, которые наблюдаются как цветные полосы. Спектр излучения непрерывен, когда длины волн постепенно сменяют друг друга. Спектр линейен, когда излучаются только отдельные длины волн, что показано здесь для водорода, гелия, ртути и урана.

В спектре Солнца видно несколько темных линий (линии Фраунгофера), которые образуют спектр поглощения. Некоторая часть излучения от более нагретой внутренней части Солнца поглощается более холодными внешними газообразными слоями при переходе атомов этих слоев в более высокие энергетические состояния.

Спектры прокалиброваны в ангстремах ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$).

ной плоскости линзы при $z=3f$). При этом волны с различными значениями k_x фиксируются при различных значениях x . Таким образом, создается однозначное соответствие между k_x и x и зависимость от x в фокальной плоскости равна (с точностью до множителя) *фурье-преобразованию* зависимости от x объекта при $z=0$. На оси z нет другой плоскости, для которой это было бы верно. Когда волны достигают экрана (плоскости изображения), у них опять та же зависимость от x , что и в плоскости $z=0$ (если пренебречь заменой x на $-x$ и отличим коэффициента усиления от единицы). Таким образом, проходя от плоскости предмета до фокальной плоскости за линзами и затем до экрана, волны оказываются функциями x в плоскости предмета, функциями k_x в фокальной плоскости и опять функциями x в плоскости изображения. Последний переход (от k_x -зависимости в плоскости $z=3f$ до x -зависимости в плоскости изображения) отвечает *обратному преобразованию Фурье*. Таким образом, можно сказать, что в фазово-контрастном микроскопе мы начинаем с функции от x , совершаем над ней фурье-преобразование и работаем с ним (сдвигаем фазу у одной части преобразованной волны и меняем ее амплитуду), а затем совершаем обратное фурье-преобразование. Этим методом можно получить много замечательных явлений. Сам метод получил название «спекроскопии фурье-преобразования» или «спекроскопии фокальной плоскости».

е) Опишите преобразование АМ-напряжения в ЧМ-напряжение с помощью тех же понятий, которые мы применили для описания фазово-контрастной микроскопии.

ж) В наших рассуждениях мы не учитывали полной ширины амебы и самого пучка света в x -направлении. Предположим, что эти ширины равны, соответственно, ω и W . Как повлияют эти ширины на зависимость интенсивности от x (при $z=3f$) и изменит ли это последующий результат?

з) Предположим, что вместо сдвига фаз мы полностью убрали бы несущую волну, поместив на соответствующем месте в фокальной плоскости непрозрачный экран. Какой была бы в этом случае зависимость интенсивности изображения от x ?

9.57. Две тонкие линзы, расположенные одна за другой. Расположим одну за другой вдоль общей оси на расстоянии s друг от друга две тонкие линзы, сила которых равна f_1^{-1} и f_2^{-1} . Допустим, что обе линзы положительны. Рассмотрим луч, параллельный оси и находящийся от нее на расстоянии h , падающий слева на первую линзу. Она отклоняет луч к оси. Пусть луч пройдет через вторую линзу до того, как пересечет ось. Найдите положение фокальной плоскости, т. е. плоскости, в которой луч пересекет ось, пройдя вторую линзу. Покажите, что положение F не зависит от h (в приближении малых углов). Теперь введем плоскость P (мы назовем ее главной плоскостью), положение которой определим следующим образом: продолжим входящий луч вперед (вправо), а выходящий луч (который проходит через F) назад (влево) до пересечения. Плоскость, в которой лежит точка пересечения, называется главной плоскостью P . Обозначим через x расстояние от плоскости F до правой поверхности второй линзы и через y расстояние от P до левой поверхности второй линзы. Тогда $x+y$ будет расстоянием от фокальной плоскости F до главной плоскости P . Это расстояние называется фокусным расстоянием f для нашей системы двух линз, которые можно считать, таким образом, одной линзой, расположенной в главной плоскости P . Выразите x , y и f через f_1 , f_2 и s . Найдя f и P для лучей, идущих слева направо, сделайте то же самое для лучей, идущих в противоположном направлении. Равны ли оба фокусных расстояния? Совпадают ли положения главных плоскостей?

О т в е т. $f^{-1} = f_1^{-1} + f_2^{-1} - s f_1^{-1} f_2^{-1}$, $x = (1 - s f_1^{-1})f$, $y = s f_1^{-1} f$.

9.58. Две линзы, для которых $f_1 = +20$ см и $f_2 = +30$ см, находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Предмет высотой 5 см находится на расстоянии 30 см от первой линзы. Найдите положение, ориентацию и размеры окончательного изображения. Методом пробных лучей определите положение изображения на графике.

9.59. Далекий объект зеленого цвета снимается с помощью камеры-обскуры, у которой расстояние от отверстия до пластинки равно D . Каков должен быть диаметр отверстия, чтобы картина была максимально резкой?