# ПРИЛОЖЕНИЕ I

## П.1. Ряды Тейлора

Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^2+\ldots, \tag{1}$$

где $c$—постоянные. В этом случае говорят, что $f(x)$ разложена в ряд в окрестности точки $x_0$. Чтобы найти первый коэффициент $c_0$, положим $x=x_0$; тогда в правой части все члены, за исключением первого, исчезнут. Таким образом, $c_0=f(x_0)$. Чтобы найти следующий коэффициент $c_1$, продифференцируем уравнение (1) по $x$ и снова положим $x=x_0$. Все члены, за исключением $c_1$, исчезнут, и мы получим $c_1=(df/dx)_0$, где индекс нуль означает, что производная $df/dx$ вычисляется в $x=x_0$. Аналогично

$$(d^m f/dx^m)_0=m!c_m. \tag{2}$$

Уравнение (1) примет вид

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0+\frac{(x-x_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0+\cdots \tag{3}$$

## П.2. Часто используемые ряды

*Функции* $\sin x$ и $\cos x$. Чтобы получить с помощью ряда (3) разложения $\sin x$ и $\cos x$, воспользуемся равенствами $d(\sin x)/dx=\cos x$, $d(\cos x)/dx=-\sin x$, $\cos(0)=1$, $\sin(0)=0$ и $x_0=0$. Получаем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots, \tag{4}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \tag{5}$$

*Экспонента* $e^{\alpha x}$. Пользуясь равенствами $d(e^{\alpha x})/dx=\alpha e^{\alpha x}$, $e^0=1$ и $x_0=0$, получим из ряда (3)

$$e^{\alpha x}=1+\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2!}+\frac{\alpha^3x^3}{3!}+\frac{\alpha^4x^4}{4!}+\ldots \tag{6}$$

*Функции* $\mathrm{sh}\, x$ *и* $\mathrm{ch}\, x$. Для этих функций имеем $d(\mathrm{sh})/dx=\mathrm{ch}\, x$, $d(\mathrm{ch} x)/dx=\mathrm{sh}\, x$, $(\mathrm{sh})(0)=0$, $\mathrm{ch}(0)=1$. Ряд (3) при $x_0=0$ дает

$$\mathrm{sh}\, x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, \tag{7}$$

$$\mathrm{ch}\, x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \tag{8}$$