ПРИЛОЖЕНИЕ I

П.1. Ряды Тейлора

Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^2+\ldots, \qquad (1)$$

где c—постоянные. В этом случае говорят, что $f(x)$ разложена в ряд в окрестности точки x_0. Чтобы найти первый коэффициент c_0, положим $x=x_0$; тогда в правой части все члены, за исключением первого, исчезнут. Таким образом, $c_0=f(x_0)$. Чтобы найти следующий коэффициент c_1, продифференцируем уравнение (1) по x и снова положим $x=x_0$. Все члены, за исключением c_1, исчезнут, и мы получим $c_1=(df/dx)_0$, где индекс нуль означает, что производная df/dx вычисляется в $x=x_0$. Аналогично

$$(d^m f/dx^m)_0=m!c_m. \qquad (2)$$

Уравнение (1) примет вид

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0+\frac{(x-x_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0+\ldots \qquad (3)$$

П.2. Часто используемые ряды

Функции $\sin x$ и $\cos x$. Чтобы получить с помощью ряда (3) разложения $\sin x$ и $\cos x$, воспользуемся равенствами $d(\sin x)/dx=\cos x$, $d(\cos x)/dx=-\sin x$, $\cos(0)=1$, $\sin(0)=0$ и $x_0=0$. Получаем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots, \qquad (4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \qquad (5)$$

Экспонента $e^{\alpha x}$. Пользуясь равенствами $d(e^{\alpha x})/dx=\alpha e^{\alpha x}$, $e^0=1$ и $x_0=0$, получим из ряда (3)

$$e^{\alpha x}=1+\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2!}+\frac{\alpha^3x^3}{3!}+\frac{\alpha^4x^4}{4!}+\ldots \qquad (6)$$

Функции $\operatorname{sh} x$ *и* $\operatorname{ch} x$. Для этих функций имеем $d(\operatorname{sh})/dx=\operatorname{ch} x$, $d(\operatorname{ch}x)/dx=\operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh})(0)=0$, $\operatorname{ch}(0)=1$. Ряд (3) при $x_0=0$ дает

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, \qquad (7)$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad (8)$$

Соотношения, в которые входит экспонента. Если в уравнении (6) положить $\alpha=+1$ и сравнить его с уравнениями (7) и (8) и сделать то же для $\alpha=-1$, получим

$$e^x=\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x, \tag{9}$$

$$e^{-x}=\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x. \tag{10}$$

Эти уравнения могут быть решены относительно $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tag{11}$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}. \tag{12}$$

Если в уравнении (6) положить $\alpha=+i\equiv+\sqrt{-1}$, получим

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{13}$$

Аналогично, если в уравнении (6) положить $\alpha=-i$, получим

$$e^{-ix}=1-ix-\frac{x^2}{2!}+\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{14}$$

Складывая и вычитая ряды (13) и (14) и сравнивая результаты с рядами (4) и (5), получим формулы

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x, \tag{15}$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x, \tag{16}$$

из которых следуют равенства

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \tag{17}$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \tag{18}$$

Функция $\operatorname{tg} x$. Воспользуемся следующими равенствами: $\operatorname{tg} x\equiv\sin x/\cos x$, $d(\sin x)/dx=\cos x$ и $d(\cos x)/dx=-\sin x$; тогда $d(\operatorname{tg} x)/dx=(\cos x)^{-2}$, $d^2(\operatorname{tg} x)/dx^2=2\sin x(\cos x)^{-3}$, $d^3(\operatorname{tg} x)/dx^3=2(\cos x)^{-2}-6\sin^2 x(\cos x)^{-4}$.

Подставляя эти значения в ряд (3), получим при $x_0=0$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots \tag{19}$$

Биномиальный ряд $(1+x)^n$. Воспользуемся равенствами $d(1+x)^n/dx=n(1+x)^{n-1}$, $d^2(1+x)^n/dx^2=n(n-1)(1+x)^{n-2}$, $d^3(1+x)^n/dx^3=n(n-1)(n-2)\times(1+x)^{n-3}$ и т. д.

Подставляя их в ряд (3), получим при $x_0=0$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}+\ldots \tag{20}$$

Уравнение (20) справедливо для любого положительного или отрицательного n и для любого положительного или отрицательного x, удовлетворяющего условию $x^2<1$.

П.3. Суперпозиция гармонических функций

В волновых явлениях встречаются суперпозиции N гармонических функций вида

$$u(t)=\cos\omega_1 t+\cos(\omega_1+\alpha)t+\cos(\omega_1+2\alpha)t+\ldots+\cos[\omega_1+(N-1)\alpha]t, \tag{21}$$

$$u(z)=\cos kz+\cos(kz+\beta)+\cos(kz+2\beta)+\ldots+\cos[\theta_1+(N-1)\beta]. \tag{22}$$