Соотношения, в которые входит экспонента. Если в уравнении (6) положить $\alpha=+1$ и сравнить его с уравнениями (7) и (8) и сделать то же для $\alpha=-1$, получим

$$e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x, \tag{9}$$

$$e^{-x}=\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x. \tag{10}$$

Эти уравнения могут быть решены относительно ch x и sh x:

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tag{11}$$

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}. \tag{12}$$

Если в уравнении (6) положить $\alpha=+i\equiv+\sqrt{-1}$, получим

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{13}$$

Аналогично, если в уравнении (6) положить $\alpha=-i$, получим

$$e^{-ix}=1-ix-\frac{x^2}{2!}+\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{14}$$

Складывая и вычитая ряды (13) и (14) и сравнивая результаты с рядами (4) и (5), получим формулы

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x, \tag{15}$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x, \tag{16}$$

из которых следуют равенства

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \tag{17}$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \tag{18}$$

Функция $\operatorname{tg}x$. Воспользуемся следующими равенствами: $\operatorname{tg}x\equiv\sin x/\cos x$, $d(\sin x)/dx=\cos x$ и $d(\cos x)/dx=-\sin x$; тогда $d(\operatorname{tg}x)/dx=(\cos x)^{-2}$, $d^2(\operatorname{tg}x)/dx^2=2\sin x(\cos x)^{-3}$, $d^3(\operatorname{tg}x)/dx^3=2(\cos x)^{-2}-6\sin^2x(\cos x)^{-4}$.

Подставляя эти значения в ряд (3), получим при $x_0=0$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots \tag{19}$$

Биномиальный ряд $(1+x)^n$. Воспользуемся равенствами $d(1+x)^n/dx=n(1+x)^{n-1}$, $d^2(1+x)^n/dx^2=n(n-1)(1+x)^{n-2}$, $d^3(1+x)^n/dx^3=n(n-1)(n-2)\times(1+x)^{n-3}$ и т. д.

Подставляя их в ряд (3), получим при $x_0=0$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}+\ldots \tag{20}$$

Уравнение (20) справедливо для любого положительного или отрицательного n и для любого положительного или отрицательного x, удовлетворяющего условию $x^2<1$.

П.3. Суперпозиция гармонических функций

В волновых явлениях встречаются суперпозиции N гармонических функций вида

$$u(t)=\cos\omega_1t+\cos(\omega_1+\alpha)t+\cos(\omega_1+2\alpha)t+\ldots+\cos[\omega_1+(N-1)\alpha]t, \tag{21}$$

$$u(z)=\cos kz+\cos(kz+\beta)+\cos(kz+2\beta)+\ldots+\cos[\theta_1+(N-1)\beta]. \tag{22}$$

Обе эти суперпозиции можно записать следующим образом:

$$u=\cos\theta_1+\cos(\theta_1+\gamma)+\cos(\theta_1+2\gamma)+\ldots+\cos[\theta_1+(N-1)\gamma]. \qquad (23)$$

Мы хотим найти удобное выражение для суммы (23). Заметим, что u является действительной частью следующего выражения:

$$v=e^{i\theta_1}+e^{i(\theta_1+\gamma)}+e^{i(\theta_1+2\gamma)}+\ldots+e^{i[\theta_1+(N-1)\gamma]}=e^{i\theta_1}S, \qquad (24)$$

где S — сумма N членов геометрической прогрессии:

$$S=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{N-1}, \quad \text{где} \quad a=e^{i\gamma}. \qquad (25)$$

Умножим S на a. Затем вычтем почленно S из aS, получим

$$aS-S=a^N-1, \qquad (26)$$

т. е.

$$S=\frac{a^N-1}{a-1}=\frac{e^{iN\gamma}-1}{e^{i\gamma}-1}=\frac{e^{1/2\,iN\gamma}}{e^{1/2\,i\gamma}}\,\frac{(e^{1/2\,iN\gamma}-e^{-1/2\,iN\gamma})}{(e^{1/2\,i\gamma}-e^{-1/2\,i\gamma})}=$$

$$=e^{1/2\,i(N-1)\gamma}\,\frac{\sin{}^1/_2 N\gamma}{\sin{}^1/_2\gamma} \qquad (27)$$

[мы использовали равенство (16)]. Подстановка уравнения (27) в уравнение (24) дает

$$u=\cos[\theta_1+{}^1/_2(N-1)\gamma]\,\frac{\sin{}^1/_2 N\gamma}{\sin{}^1/_2\gamma}. \qquad (28)$$

Взяв действительную часть этого выражения, получим искомый результат:

$$u=\cos[\theta_1+{}^1/_2(N-1)\gamma]\,\frac{\sin{}^1/_2 N\gamma}{\sin{}^1/_2\gamma}. \qquad (29)$$

Он может быть записан в другой, более удобной форме. В выражении (23) θ_1 — аргумент первого члена. Аргумент последнего члена (назовем его θ_2) равен

$$\theta_2\equiv\theta_1+(N-1)\gamma. \qquad (30)$$

Среднее первого и последнего аргументов равно

$$\theta_{\text{ср}}\equiv{}^1/_2(\theta_1+\theta_2)={}^1/_2\,\theta_1+{}^1/_2\,\theta_1+{}^1/_2(N-1)\gamma. \qquad (31)$$

Первый член в равенстве (29) равен $\cos\theta_{\text{ср}}$. Кроме того, из равенства (30) следует, что $\gamma=(\theta_2-\theta_1)/(N-1)$. Подставляя $\cos\theta_{\text{ср}}$ и γ в равенство (29), получаем

$$u=\cos\theta_{\text{ср}}\,\frac{\sin[{}^1/_2 N(\theta_2-\theta_1)/(N-1)]}{\sin[{}^1/_2(\theta_2-\theta_1)/(N-1)]}. \qquad (32)$$

Выражение (29) зависит от величины γ, равной приращению аргументов двух последовательных членов ряда (23). Равенство (32) эквивалентно (29), но выражено через первый и последний аргументы θ_1 и θ_2 и их среднее. Заметим, что $\cos\theta_{\text{ср}}$ — гармоническое колебание той же формы, что и каждый член суперпозиции (23), но вместо единичной амплитуды это колебание имеет амплитуду $A(\theta_1, \theta_2, N)$, равную

$$A(\theta_1,\ \theta_2,\ N)=\frac{\sin[{}^1/_2 N(\theta_2-\theta_1)/(N-1)]}{\sin[{}^1/_2(\theta_2-\theta_1)/(N-1)]}. \qquad (33)$$

Наиболее компактное выражение для нашего результата имеет вид

$$u=A(\theta_1,\ \theta_2,\ N)\cos\theta_{\text{ср}}. \qquad (34)$$

Случай $N=2$ для колебаний во времени [уравнение (21)] соответствует биениям, а для колебаний в пространстве [уравнение (22)] — интерференционной картине от двух щелей. Для колебаний во времени большие значения N вызывают «модуляции», что в пределе при $N\to\infty$ приводит к появлению импульсов. Для колебаний в пространстве большие значения N приводят к интерференционной картине от многих щелей, и в пределе при $N\to\infty$ мы получаем дифракционную картину от одной щели шириной в много длин волны.