П. 4. Векторные тождества

Воспользуемся буквами A, B, C для обозначения скалярных функций от x, y и z: $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$. Аналогично через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ будем обозначать векторные функции от x, y и z. Под функцией A мы понимаем вектор $\hat{\mathbf{x}}A_x(x, y, z)+\hat{\mathbf{y}}A_y(x, y, z)+\hat{\mathbf{z}}A_z(x, y, z)$, где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, и $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы. Нас интересует, как работать с «оператором набла» ∇, который одновременно является вектором и оператором взятия производной. «Фокус» в том, чтобы выражения с оператором ∇ записывать таким образом, чтобы была ясна его «двойная» роль. Например, в выражении

$$\nabla(AB)=(\nabla A)B+A(\nabla B)=B\nabla A+A\nabla B \tag{35}$$

первое равенство следует из правила дифференцирования произведения. Во втором равенстве круглые скобки излишни, потому что по условию оператор ∇ дифференцирует только то, что стоит справа от него. Мы можем временно писать ∇_a, когда ∇ действует только на $\mathbf{A}$ (или A), и ∇_b, когда ∇ действует только на $\mathbf{B}$ (или B). В этом случае мы должны «позаботиться» о правиле дифференцирования произведения. Затем мы перемещаем операторы и векторы таким образом, чтобы величины, которые не следует дифференцировать, оказались слева от оператора набла. При этом мы не должны забывать о правилах обращения с векторами. В конце индексы a и b можно опустить.

Имеем

$$\nabla(AB)=\nabla_a(AB)+\nabla_b(AB)=B\nabla_aA+A\nabla_bB=B\nabla A+A\nabla B. \tag{36}$$

Аналогично

$$\nabla\times(\mathbf{A}B)=\nabla_a\times(\mathbf{A}B)+\nabla_b\times(\mathbf{A}B)=B\nabla_a\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla_bB=B\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla B. \tag{37}$$

После некоторой практики промежуточные равенства вам не понадобятся.

Теперь мы хотим найти, чему равна величина $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})$. Считаем, что вы знакомы с равенствами

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})= \tag{38а}$$

$$=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{38б}$$

Мы можем использовать последнее равенство, заменив $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на оператор ∇. Мы должны оба оператора ∇ иметь слева от $\mathbf{C}$, так как они дифференцируют $\mathbf{C}$. Поэтому мы не можем использовать выражение (38а), а должны работать с (38б). Положим

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{C})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{C}. \tag{39}$$

Для компонент x, y и z этого выражения имеем

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})]_x=\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{C})}{\partial x}-\nabla^2C_x \tag{40}$$

(аналогичные выражения для y и z), где

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{41}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

О построении электрических единиц в системе СИ

В большинстве учебников по электротехнике и в ряде учебников физики применяется система электрических единиц, называемая *рационализированной* системой МКС. Эта система представляет собой раздел электромагнитных единиц системы СИ. В нее входят механические единицы, из которых основными являются *метр*, *килограмм* и *секунда*. Единица силы в системе СИ называется *ньютоном* и представляет собой силу, которая сообщает массе в один килограмм ускоре-