## П. 4. Векторные тождества

Воспользуемся буквами $A$, $B$, $C$ для обозначения скалярных функций от $x$, $y$ и $z$: $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$. Аналогично через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ будем обозначать векторные функции от $x$, $y$ и $z$. Под функцией $A$ мы понимаем вектор $\hat{\mathbf{x}}A_x(x, y, z)+$ $+\hat{\mathbf{y}}A_y(x, y, z)+\hat{\mathbf{z}}A_z(x, y, z)$, где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, и $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы. Нас интересует, как работать с «оператором набла» $\nabla$, который одновременно является вектором и оператором взятия производной. «Фокус» в том, чтобы выражения с оператором $\nabla$ записывать таким образом, чтобы была ясна его «двойная» роль. Например, в выражении

$$\nabla(AB)=(\nabla A)B+A(\nabla B)=B\nabla A+A\nabla B \qquad (35)$$

первое равенство следует из правила дифференцирования произведения. Во втором равенстве круглые скобки излишни, потому что по условию оператор $\nabla$ дифференцирует только то, что стоит справа от него. Мы можем временно писать $\nabla_a$, когда $\nabla$ действует только на $\mathbf{A}$ (или $A$), и $\nabla_b$, когда $\nabla$ действует только на $\mathbf{B}$ (или $B$). В этом случае мы должны «позаботиться» о правиле дифференцирования произведения. Затем мы перемещаем операторы и векторы таким образом, чтобы величины, которые не следует дифференцировать, оказались слева от оператора набла. При этом мы не должны забывать о правилах обращения с векторами. В конце индексы $a$ и $b$ можно опустить.

Имеем

$$\nabla(AB)=\nabla_a(AB)+\nabla_b(AB)=B\nabla_a A+A\nabla_b B=B\nabla A+A\nabla B. \qquad (36)$$

Аналогично

$$\nabla\times(\mathbf{A}B)=\nabla_a\times(\mathbf{A}B)+\nabla_b\times(\mathbf{A}B)=B\nabla_a\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla_b B=B\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla B. \qquad (37)$$

После некоторой практики промежуточные равенства вам не понадобятся.

Теперь мы хотим найти, чему равна величина $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})$. Считаем, что вы знакомы с равенствами

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})= \qquad (38а)$$

$$=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}. \qquad (38б)$$

Мы можем использовать последнее равенство, заменив $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на оператор $\nabla$. Мы должны оба оператора $\nabla$ иметь слева от $\mathbf{C}$, так как они дифференцируют $\mathbf{C}$. Поэтому мы не можем использовать выражение (38а), а должны работать с (38б). Положим

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{C})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{C}. \qquad (39)$$

Для компонент $x$, $y$ и $z$ этого выражения имеем

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})]_x=\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{C})}{\partial x}-\nabla^2 C_x \qquad (40)$$

(аналогичные выражения для $y$ и $z$), где

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (41)$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ II

## О построении электрических единиц в системе СИ

В большинстве учебников по электротехнике и в ряде учебников физики применяется система электрических единиц, называемая *рационализированной* системой МКС. Эта система представляет собой раздел электромагнитных единиц системы СИ. В нее входят механические единицы, из которых основными являются *метр*, *килограмм* и *секунда*. Единица силы в системе СИ называется *ньютоном* и представляет собой силу, которая сообщает массе в один килограмм ускорение 1 *м/сек*$^2$. Таким образом, ньютон эквивалентен $10^5$ *дин*. Соответствующая единица энергии (ньютон$\times$метр), или *джоуль*, эквивалентна $10^7$ *эрг*.

Электрические единицы системы СИ содержат известные нам «практические» единицы — кулон (*к*), вольт (*в*), ампер (*а*) и *ом* — наряду с некоторыми новыми. Кто-то заметил, что давно известные практические единицы можно объединить в законченную систему, построенную следующим образом. Напишите закон Кулона в виде (1.1):

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2}. \tag{1}$$

Вместо того, чтобы считать $k=1$, найдите значение $k$, если сила $F_2$ измеряется в ньютонах, $q_1$ и $q_2$ — в кулонах и $r_{21}$ — метрах. Зная соотношение между ньютоном и диной, между кулоном и ед. СГСЭ$_q$ и между метром и сантиметром, вы легко вычислите, что коэффициент $k$ должен быть равен $0{,}8988 \cdot 10^{10}$. (Два заряда по одному кулону, находящихся на расстоянии в один метр, создают силу около миллиона тонн!) Вместо $k$ мы можем написать $1/(4\pi\varepsilon_0)$, где величина постоянной $\varepsilon_0$ такова, что $1/(4\pi\varepsilon_0)=k=0{,}8988 \cdot 10^{10}$. Теперь закон Кулона можно записать так:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{2}$$

где постоянная $\varepsilon_0$ равна

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, k^2/(н \cdot м^2). \tag{3}$$

Выделение коэффициента $1/4\pi$ предпринято для исключения величины $4\pi$ в большинстве электрических формул за счет введения этой величины в ряд других формул (как, например, в данном случае в закон Кулона). Это — все, что сделала «рационализированная» система. Постоянная $\varepsilon_0$ называется диэлектрической постоянной (или «диэлектрической проницаемостью») вакуума.

Электрический потенциал измеряется в вольтах, а величина электрического поля $E$ — в вольтах на метр. Сила, действующая на заряд $q$ в поле $\mathbf{E}$, равна

$$\mathbf{F}\,(н) = q\mathbf{E}\,(к \cdot в/м). \tag{4}$$

Один ампер равен, конечно, одному кулону в секунду. Сила, приходящаяся на метр длины каждого из двух параллельных проводов с током $I$ (в амперах), расположенных на расстоянии $r$ метров друг от друга, равна

$$f\,(н/м) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I^2}{r}\frac{(а^2)}{(м)}. \tag{5}$$

Вспомнив эту формулу в системе СГС:

$$f\,(дин/см) = \frac{2I^2}{rc^2}\frac{(ед.\ СГСЭ_q/сек)^2}{(см^3/сек^2)}, \tag{6}$$

мы вычислим, что величина $\mu_0/4\pi$ должна быть равна $10^{-7}$. Таким образом, постоянная $\mu_0$, называемая магнитной проницаемостью вакуума, равна

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ н/а^2\ (точно). \tag{7}$$

Магнитное поле $\mathbf{B}$ определяется силой Лоренца следующим образом:

$$\mathbf{F}\,(н) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частицы в *м/сек*, $q$ — заряд частицы в кулонах. Для $B$ требуется новая единица. Эта единица называется *тесла* или *вебер/м*$^2$, она в точности равна $10^4$ *гс*. В этой системе вспомогательное поле $\mathbf{H}$ выражается в других единицах и связано с $\mathbf{B}$ в вакууме следующим образом:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}\ (в\ вакууме). \tag{9}$$

Соотношение между $\mathbf{H}$ и свободным током следующее:

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = I_{своб}, \tag{10}$$

где $I_{своб}$— свободный ток (в амперах), охватываемый петлей, по которой против часовой стрелки взят линейный интеграл. Поскольку $d\mathbf{S}$ измерено в метрах, единица для **H** называется просто *ампер на метр*. Уравнения Максвелла для полей в вакууме в рационализированной системе МКС (т. е. в системе СИ) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad & \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad & \operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu_0\mathbf{J}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если вы сравните эти уравнения с теми, которые были написаны в гауссовской системе единиц СГС и в которые входит значение $c$, вы увидите, что уравнения (11) содержат волновую скорость $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (в *м/сек*, конечно). Иными словами,

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}. \tag{12}$$

В гауссовской системе единиц СГС единица заряда (ед. $СГСЭ_q$) была установлена законом Кулона при $k=1$. В системе СИ кулон определяется не уравнением (1), а уравнением (5), т. е. силой, действующей между токами, а не силой, действующей между зарядами. В уравнении (5) мы имеем $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$. Другими словами, если бы новые экспериментальные измерения скорости света изменили бы принятое значение $c$, то мы должны были бы исправить величину постоянной $\varepsilon_0$, а не $\mu_0$.

Ниже приводится список некоторых единиц системы СИ и эквивалентных им единиц в гауссовской системе единиц СГС.

| Величина | Обозначение | Единица в СИ | Эквивалент в гауссовской системе СГС |
|---|---|---|---|
| Расстояние | $s$ | метр | $10^2$ *см* |
| Сила | $\mathbf{F}$ | ньютон | $10^5$ *дин* |
| Работа, энергия | $W$ | джоуль | $10^7$ *эрг* |
| Заряд | $q$ | кулон | $2{,}998\cdot10^9$ ед. $СГСЭ_q$ |
| Ток | $I$ | ампер | $2{,}998\cdot10^9$ ед. $СГСЭ_q$/*сек* |
| Электрический потенциал | $\varphi$ | вольт | $(1/299{,}8)$ ед. $СГСЭ_v$ |
| Электрическое поле | $\mathbf{E}$ | вольт/метр | $(1/29980)$ ед. $СГСЭ_v$/*см* |
| Сопротивление | $R$ | ом | $1{,}139\cdot10^{-12}$ *сек/см* |
| Магнитное поле | $\mathbf{B}$ | тесла | $10^4$ *гс* (гаусс) |
| Магнитный поток | $\Phi$ | вебер | $10^8$ *гс·см*$^3$ |
| Вспомогательное поле $H$ | $\mathbf{H}$ | ампер/метр | $4\pi\cdot10^{-3}$*э* (эрстед) |

Система СИ удобна для инженеров. Для применения в фундаментальной физике полей и вещества она обладает одним большим дефектом. Уравнения Максвелла для полей в вакууме в этой системе симметричны по отношению к электрическому и магнитному полям только в том случае, если **H**, а не **B** выступает в роли магнитного поля. (Обратите внимание, что уравнения (11) не симметричны даже в отсутствие **J**.) С другой стороны, как мы показали, именно **B**, а не **H** является фундаментальным магнитным полем в веществе. Это не является вопросом определения или единиц, а представляет собой факт, отражающий отсутствие магнитного заряда. Следовательно, система СИ, построенная таким образом, затемняет или фундаментальную электромагнитную симметрию вакуума, или существенную асимметрию источников. Это — одна из причин предпочтения гауссовской системы единиц СГС в нашей книге. Другая причина в том, что большинство работающих физиков пользуется еще единицами системы СГС совместно с рядом практических единиц, применяемых в случае необходимости.