ность регистрации, найдя интенсивность волны, прошедшей через щель.

Читатель должен вернуться к рассуждениям п. 48 гл. 4, где было показано, что при дифракции от двух щелей невозможно указать, через какую именно щель прошел фотон. Те же рассуждения применимы и к электронам. Нельзя создать прибор, который указал бы, через какую именно щель прошел электрон, не нарушив картину дифракции от двух щелей.

35. Несколько слов о терминологии. Обсуждая открытие волн де Бройля, мы говорили о «волнах, связанных с частицей». Это выражение нельзя считать удачным, ибо оно звучит так, будто бы мы имеем классическую частицу, каким-то образом движущуюся вместе с волной. Некоторые называют волну де Бройля «ведущей волной», но и это не лучше. Волна де Бройля не является волной, движущейся вместе с классической частицей и «ведущей» ее. Волна де Бройля и частица — это *один и тот же объект*. Ничего другого нет. Реальность заключается в том, что частицы, созданные природой, имеют свойства волны. Если мы хотим подчеркнуть эту реальность, то говорим о дебройлевской волне электрона, но этот термин является синонимом слова «электрон». Извинением за использование плохих терминов на предыдущих страницах служит предварительный и отчасти исторический характер изложения. Этим оправдано, например, такое выражение, как «волна, связанная с частицей». Теперь пришло время уточнить терминологию.

Вернемся к опыту с двумя щелями. В этом опыте нет ничего, что указывало бы на классическую частицу, проходящую через одну из щелей и «управляемую» волной, проходящей через обе щели. Иначе говоря: наше описание происходящего ни в чем не выиграет от такой идеи. Достаточно рассмотреть одну лишь волну совместно с квантовомеханической интерпретацией интенсивностей как вероятностей. Всякие разговоры о «скрытой» частице не имеют смысла. Они были бы обоснованы, если бы мы имели экспериментальные доказательства, что такая частица имеет свойства, не объясняемые квантовой механикой. Таких указаний нет, и мы должны отказаться от идеи о классической частице, ведомой волной.

Волновое уравнение и принцип суперпозиции

36. Теперь мы постараемся привести доводы в пользу дифференциального уравнения, описывающего распространение волн материи в *пустом* пространстве и известного как уравнение Клейна — Гордона. Мы рассмотрим идеи, на которых оно покоится.

Наиболее общей идеей является предположение, что волновое уравнение, описывающее единичную частицу с массой m, должно быть *линейным* дифференциальным уравнением. Это означает, что решения такого уравнения удовлетворяют *принципу суперпозиции*: любая линейная комбинация двух решений также является решением. Кроме того, мы предполагаем, что каждое решение уравнения, удовлетворяющее некоторым разумным условиям, соответствует, по крайней мере в принципе, определенной физической ситуации. Эти предположения имеют далеко идущие физические следствия. Амплитуды волн материи могут складываться, подобно амплитудам электромагнитного поля. (Уравнения Максвелла — также *линейные* дифференциальные уравнения.)

Читатель мог заметить, что при рассмотрении дифракции волн материи от атомов на поверхности кристалла или от двух щелей мы неявно предполагали линейность. Так, мы складывали амплитуды волн от каждой щели, чтобы получить результирующую амплитуду. Мы увидим, что эта операция является следствием общего физического принципа.

37. Попытаемся теперь найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяли бы *любые* волны материи, описывающие частицу с массой m. Начнем с дифференциального уравнения, которому удовлетворяют все *плоские* волны:

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}) = \exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i\omega t). \tag{37a}$$

Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$, и обозначаем импульс (равный волновому вектору) через $\boldsymbol{p}$, а энергию (равную частоте) — через ω. Каждая такая плоская волна задается (с точностью до постоянного множителя, определяющего амплитуду волны) импульсом $\boldsymbol{p}$.

Попробуем написать *линейное* дифференциальное уравнение (куда $\boldsymbol{p}$ явно не входит), которому удовлетворяет *любая* плоская волна. Поскольку оно линейно, то ему удовлетворяет любая линейная комбинация плоских волн и, как мы покажем, любая волна де Бройля, описывающая частицу с массой m. Энергия ω и импульс $\boldsymbol{p}$ частицы связаны равенством

$$\omega^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2. \tag{37b}$$

Дифференцируя волновую функцию дважды по времени, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}) = -\omega^2\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}). \tag{37c}$$

Дифференцируя ее дважды по координате x_1, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}) = -p_1^2\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}), \tag{37d}$$

и аналогично по координатам x_2 и x_3.

Принимая во внимание (37b), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}) - \nabla^2\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}) = -m^2\psi(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{p}), \tag{37e}$$

где через ∇^2 обозначен *оператор Лапласа*

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{37f}$$

Уравнение (37e) и есть то, что мы ищем. Мы видим, что ему удовлетворяют *все* плоские волны вида (37a), т. е. волны с *любыми* значениями $\boldsymbol{p}$. Поэтому любые волны де Бройля, образованные суперпозицией плоских волн, также будут ему удовлетворять.

38. Волновое уравнение (37e) известно как уравнение Клейна — Гордона. Это простейшее дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют волны де Бройля. Заметим, что электромагнитные волны в *пустом* пространстве также удовлетворяют этому уравнению (для фотона $m = 0$). Читатель легко проверит, что не существует такого уравнения *первого* порядка (т. е. уравнения, содержащего лишь первые производные по независимым переменным), которому удовлетворяли бы *все* волны де Бройля. Искомое уравнение должно быть не меньше чем второго порядка, и причина этого в том, что связь (37b) между энергией и импульсом является квадратичным выражением.

Повторяем снова, ибо это очень важно: уравнение (37e) описывает распространение частицы только в *пустом* пространстве, т. е. далеко от всех других частиц. Аналогично, *однородные* уравнения Максвелла, т. е. уравнения, в которых плотности тока и заряда равны нулю, описывают распространение электромагнитных волн в пространстве, свободном от токов и зарядов, т. е. вдали от других частиц.

39. Суперпозиция двух плоских волн, т. е. волна

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A' \exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}' - i\omega' t) + A'' \exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}'' - i\omega'' t), \tag{39a}$$

где A' и A'' — две произвольные комплексные константы, тоже удовлетворяет уравнению (37e). Иными словами,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x}, t) - \nabla^2\psi(\boldsymbol{x}, t) = -m^2\psi(\boldsymbol{x}, t). \tag{39b}$$

Рассмотрим более сложную (непрерывную) суперпозицию плоских волн, имеющую вид

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \int_{(\infty)} d^3(\boldsymbol{p})\, A(\boldsymbol{p}) \exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i\omega t). \tag{39c}$$

Здесь $A(\boldsymbol{p})$ — комплексная функция вектора $\boldsymbol{p}$. Интеграл берется по всему трехмерному $\boldsymbol{p}$-пространству. Величина ω зависит от $\boldsymbol{p}$ согласно (37b), причем $\omega > 0$. Иными словами,

$$\omega = \omega(\boldsymbol{p}) = \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{39d}$$

Волновая функция $\psi(\boldsymbol{x}, t)$, определяемая (39c), также удовлетворяет дифференциальному уравнению (39b). Это наиболее общий вид волны де Бройля. Мы предполагаем, что функция $A(\boldsymbol{p})$ ведет себя достаточно «разумно», так что интеграл в (39c) имеет смысл.

40. В теории интегралов Фурье доказывается следующая теорема. Если $\psi(\boldsymbol{x}, 0)$ — достаточно «разумно» ведущая себя функция $\boldsymbol{x}$ и если мы определим функцию $A(\boldsymbol{p})$ через интеграл

$$A(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\infty)} d^3(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, 0) \exp(-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}), \tag{40a}$$

$$\psi(\boldsymbol{x},\ 0) = \int\limits_{(\infty)} d^3(\boldsymbol{p})\, A\ (\boldsymbol{p}) \exp[(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}). \qquad (40b)$$

Смысл и доказательство приведенной теоремы связаны с определением «разумно ведущей себя» функции. Мы не станем доказывать здесь эту теорему, и вообще нам не понадобится теория интеграла Фурье. Наша цель — выяснить физический смысл теоремы и показать огромное значение интеграла Фурье в физике.

41. Постараемся понять смысл этой теоремы. Предположим, что $\psi(\boldsymbol{x},\ 0)$ — волновая функция де Бройля для момента времени $t=0$. С помощью интеграла (40a) можно сопоставить этой волновой функции амплитуду $A(\boldsymbol{p})$ в пространстве импульсов. Имея эту амплитуду, можно определить новую волновую функцию $\psi_1(\boldsymbol{x},\ t)$ с помощью равенства

$$\psi_1(\boldsymbol{x},\ t) = \int\limits_{(\infty)} d^3(\boldsymbol{p})\, A(\boldsymbol{p}) \exp[(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i\omega t). \qquad (41a)$$

Если мы положим в этом равенстве $t=0$ и сравним его с (40b), то увидим, что $\psi_1(\boldsymbol{x},\ 0)=\psi(\boldsymbol{x},\ 0)$. Новая волновая функция удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (39b) и в «начальный момент» времени $t=0$ совпадает с волновой функцией $\psi(\boldsymbol{x},\ 0)$. Это значит, что мы получили метод для решения уравнения Клейна — Гордона, пригодный для того случая, когда *начальные условия* заданы в виде функции от $\boldsymbol{x}$ в момент $t=0$.

42. Рассмотрим вопрос о единственности полученного таким методом решения уравнения Клейна — Гордона. Этот метод, в соответствии с которым мы образуем функции $A(\boldsymbol{p})$ и $\psi_1(\boldsymbol{x},\ t)$ из данной функции $\psi(\boldsymbol{x},\ 0)$, действительно дает функцию $\psi_1(\boldsymbol{x},\ t)$, удовлетворяющую уравнению (39b). Вопрос в том, нет ли других решений дифференциального уравнения (39b), которые в момент $t=0$ совпадают с функцией $\psi(\boldsymbol{x},\ 0)$? Такое решение существует. Дифференциальному уравнению (39b) удовлетворяет также волновая функция вида

$$\psi'(\boldsymbol{x},\ t) = \exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} + i\omega t), \qquad \omega = \sqrt{p^2+m^2}.$$

Это решение мы называем «решением для отрицательной частоты», чтобы отличить его от «решения для положительной частоты», заданного выражением (37a).

Мы исключаем из рассмотрения решения с отрицательной частотой по физическим соображениям. Они не годятся для частиц с положительной энергией (т. е. с положительной частотой). Однако ясно, что любому решению уравнения (39b) для положительной частоты соответствует решение для того же импульса $\boldsymbol{p}$, но отрицательной частоты, и уравнение Клейна — Гордона имеет поэтому в два раза больше решений, чем нам нужно. Происходит это потому, что уравнение (37b) имеет *два* решения ω для каждого $\boldsymbol{p}$: одно положительное, а другое отрицательное. Только положительное решение имеет физический смысл: энергия частицы — величина положительная.

Таким образом, уравнение Клейна — Гордона (39b) не определяет полностью волну де Бройля. Мы присоединим к нему условие, требующее *исключения решений с отрицательной частотой* (*отрицательной энергией*). С этим ограничением можно показать, что каждое решение уравнения (39b) однозначно определяется значением этого решения при $t=0$. Таков ответ на поставленный нами вопрос, но мы не будем заниматься доказательством этой теоремы.

43. Наиболее важный вывод из наших рассуждений заключается в том, что каждая имеющая физический смысл волновая функция де Бройля $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ может быть представлена в форме (41a). Здесь амплитуда $A(\boldsymbol{p})$ однозначно определяется равенством (40a) по волновой функции в некоторый определенный момент времени, например при $t=0$. Таким образом, любая волна материи может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн. Если угодно, мы можем считать это нашим основным предположением, что несколько снижает значение уравнения Клейна — Гордона. Оно не больше чем красивое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют физически приемлемые волновые функции.

44. Соответствующим выбором амплитуды $A(\boldsymbol{p})$ в импульсном пространстве интеграла Фурье (39c) [или (41a)] мы можем образовать волновые пакеты, которые будут в данный момент приближенно локализованы в некоторой ограниченной области пространства. Такие волновые пакеты будут обладать заметным значением лишь в этой области пространства, а за ее пределами при $|x|$, стремящемся к бесконечности, быстро уменьшаться до нулевого значения. Волновой пакет с такими свойствами соответствует частице, положение которой приблизительно ограничено определенной областью пространства. Ясно, что все исследуемые частицы могут быть описаны такими волновыми функциями. Мы предполагаем, конечно, что частицу легче всего обнаружить (если мы наблюдаем ее с помощью счетчика) в той области пространства, где значение волновой функции велико. Такое предположение находится в согласии с нашей квантовомеханической интерпретацией квадрата модуля амплитуды как вероятности некоторого процесса. Пока что нам достаточно понимать, что «частицу легче всего найти там, где амплитуда волновой функции велика». Позже мы рассмотрим частный случай волновых функций, для которых можно будет указать точный рецепт вычисления вероятности обнаружить частицу в данной области пространства.

Уже сейчас можно сказать, что частица в любом реальном эксперименте не может быть описана простой плоской волной. У такой волны квадрат модуля амплитуды есть величина постоянная, не зависящая ни от $\boldsymbol{x}$, ни от t, и вероятность найти частицу в любой области с единичным объемом одна и та же, т. е. не зависит от положения этой области. Поскольку все пространство образовано бесконечно большим числом таких единичных областей, то вероятность нахождения частицы в любой из них равна нулю. Вероятность нахождения частицы в пределах *любой* конечной области также равна нулю, и это лишено физического смысла.

Таким образом, строго монохроматических волн быть не может. Возможно, однако, что в произвольно большой области пространства волну приближенно можно считать плоской волной с постоянной амплитудой. За пределами этой области амплитуда должна падать до нуля. Если данная область включает и ту часть пространства, где происходит исследуемое нами явление, можно считать волновую функцию идеализированной плоской волной. В физике очень часто говорят о плоских волнах. При этом молчаливо предполагают, что волна является приближенно плоской: она похожа на плоскую волну в очень большой части пространства.

45. Любая волновая функция, описывающая состояние (движения) частицы с массой m, удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (39b). Положив $m=0$, получим уравнение, которому удовлетворяют электрические и магнитные векторные поля. Уравнение Клейна — Гордона не идентично уравнениям Максвелла, и об этом не следует забывать. Можно ли считать, что в уравнениях Максвелла содержится больше, чем в уравнении Клейна — Гордона? На этот вопрос ответим утвердительно. Уравнения Максвелла описывают такое явление, как *поляризация* фотона. Состояние движения фотона не определено полностью, если известны энергия и импульс. Остается еще поляризация. Для каждого значения импульса мы имеем у фотона два линейно независимых состояния поляризации. Ими могут быть, например, состояния левой и правой круговой поляризаций.

Возникает вопрос: может ли и материальная частица находиться в различных состояниях поляризации? Ответ заключается в том, что некоторые частицы могут быть поляризованы, а другие нет. Примерами частиц, не обладающих поляризацией, являются пионы и α-частицы. Электроны, протоны и нейтроны — примеры частиц, которые можно поляризовать. У этих последних имеется внутренний момент импульса, называемый *спином*. Различные ориентации спина соответствуют разным состояниям поляризации. Пионы и α-частицы спина не имеют; в их системе покоя нет ничего, что указывало бы направление. Эти частицы сферически симметричны.

Чтобы описать состояние поляризации частицы с ненулевым спином, нужно, кроме переменных x и t, иметь новую переменную, отвечающую спину. Поэтому волновое уравнение для частиц со спином, например для электронов, протонов и нейтронов, должно быть более сложным, чем уравнение Клейна — Гордона (39b), но тем не менее волновая функция этих частиц будет *также* удовлетворять уравнению Клейна — Гордона. Можно сказать, что это уравнение описывает пространственно-временны́е свойства частицы, не обращая внимания на спин. Мы не будем здесь рассматривать квантовомеханические методы описания спина. Они в значительной мере аналогичны описанию поляризации электромагнитных волн.

46. В заключение этой части главы перепишем волновое уравнение (39b) в системе единиц СГС (или СИ). При этом в нем появятся константы $\hbar$ и c и оно примет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},\ t)-\nabla^2\psi(\boldsymbol{x},\ t)=-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi(\boldsymbol{x},\ t). \tag{46a}$$

Воспользовавшись соображениями размерности, читатель может проверить правильность этого уравнения. Заметим, что каждый член уравнения имеет размерность (волновая функция)/(длина)^2.

Дополнительная тема: векторное пространство физических состояний *)

47. Рассмотрим с новой точки зрения принцип суперпозиции, применимость которого к волнам материи была нашим главным предположением.

Обозначим через $\mathscr{H}'$ совокупность всех волновых функций, представляющих возможные физические состояния частицы с массой m. Пусть ни одна из них не равна нулю. Присоединим к этой совокупности новую волновую функцию, которая равна нулю для всех координат и всех значений времени. Новую совокупность обозначим $\mathscr{H}$. Она обладает следующими свойствами.

1) Если ψ_1 и ψ_2 — две волновые функции из совокупности $\mathscr{H}$, то сумма $\psi_1+\psi_2$ также принадлежит этой совокупности.

2) Если ψ принадлежит $\mathscr{H}$, а c — любое комплексное число, то функция $c\psi$ также принадлежит $\mathscr{H}$.

Принцип суперпозиции волновых функций утверждает следующее: если ψ_1 и ψ_2 — две имеющие физический смысл волновые функции, а c_1 и c_2 — два любых комплексных числа, то функция

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2 \tag{47a}$$

также является имеющей физический смысл волновой функцией при условии, что она не обращается тождественно в нуль.

48. Совокупность $\mathscr{H}$ обладает характерными свойствами абстрактного математического объекта, называемого *абстрактным комплексным векторным пространством*. Перечислим постулаты, на которых основано существование таких объектов.

Линейное комплексное векторное пространство $\mathscr{H}$ является совокупностью элементов (называемых векторами), которые обладают следующими свойствами.

1) Из любых двух векторов ψ_1 и ψ_2 в $\mathscr{H}$ можно образовать единственный вектор ψ, принадлежащий $\mathscr{H}$, который называется суммой ψ_1 и ψ_2 и обозначается $\psi=\psi_1+\psi_2$. Операция образования суммы двух векторов удовлетворяет правилам:

а) $\psi_1+\psi_2=\psi_2+\psi_1$ для любых двух ψ_1 и ψ_2 из $\mathscr{H}$;

б) $\psi_1+(\psi_2+\psi_3)=(\psi_1+\psi_2)+\psi_3$ для любых трех векторов ψ_1, ψ_2 и ψ_3 из $\mathscr{H}$;

в) в совокупности $\mathscr{H}$ существует единственный вектор, называемый нулевым, который обладает следующим свойством:

$$\psi+0=\psi \text{ для любых } \psi \text{ из } \mathscr{H}.$$

*) При первом чтении можно пропустить.