константы $\hbar$ и c и оно примет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x}, t)-\nabla^2\psi(\boldsymbol{x}, t)=-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi(\boldsymbol{x}, t). \tag{46a}$$

Воспользовавшись соображениями размерности, читатель может проверить правильность этого уравнения. Заметим, что каждый член уравнения имеет размерность (волновая функция)/(длина)^2.

Дополнительная тема: векторное пространство физических состояний *)

47. Рассмотрим с новой точки зрения принцип суперпозиции, применимость которого к волнам материи была нашим главным предположением.

Обозначим через $\mathscr{H}'$ совокупность всех волновых функций, представляющих возможные физические состояния частицы с массой m. Пусть ни одна из них не равна нулю. Присоединим к этой совокупности новую волновую функцию, которая равна нулю для всех координат и всех значений времени. Новую совокупность обозначим $\mathscr{H}$. Она обладает следующими свойствами.

1) Если ψ_1 и ψ_2 — две волновые функции из совокупности $\mathscr{H}$, то сумма $\psi_1+\psi_2$ также принадлежит этой совокупности.

2) Если ψ принадлежит $\mathscr{H}$, а c — любое комплексное число, то функция $c\psi$ также принадлежит $\mathscr{H}$.

Принцип суперпозиции волновых функций утверждает следующее: если ψ_1 и ψ_2 — две имеющие физический смысл волновые функции, а c_1 и c_2 — два любых комплексных числа, то функция

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2 \tag{47a}$$

также является имеющей физический смысл волновой функцией при условии, что она не обращается тождественно в нуль.

48. Совокупность $\mathscr{H}$ обладает характерными свойствами абстрактного математического объекта, называемого *абстрактным комплексным векторным пространством*. Перечислим постулаты, на которых основано существование таких объектов.

Линейное комплексное векторное пространство $\mathscr{H}$ является совокупностью элементов (называемых векторами), которые обладают следующими свойствами.

1) Из любых двух векторов ψ_1 и ψ_2 в $\mathscr{H}$ можно образовать единственный вектор ψ, принадлежащий $\mathscr{H}$, который называется суммой ψ_1 и ψ_2 и обозначается $\psi=\psi_1+\psi_2$. Операция образования суммы двух векторов удовлетворяет правилам:

а) $\psi_1+\psi_2=\psi_2+\psi_1$ для любых двух ψ_1 и ψ_2 из $\mathscr{H}$;

б) $\psi_1+(\psi_2+\psi_3)=(\psi_1+\psi_2)+\psi_3$ для любых трех векторов ψ_1, ψ_2 и ψ_3 из $\mathscr{H}$;

в) в совокупности $\mathscr{H}$ существует единственный вектор, называемый нулевым, который обладает следующим свойством:

$$\psi+0=\psi \text{ для любых } \psi \text{ из } \mathscr{H}.$$

*) При первом чтении можно пропустить.

2) Рассмотрим вектор ψ из $\mathscr{H}$ и любое комплексное число c. В $\mathscr{H}$ существует единственный вектор $c\psi$, называемый произведением вектора ψ на скаляр c. Операция умножения вектора на скаляр (комплексное число) удовлетворяет правилам:

а) $(c_1c_2)\psi=c_1(c_2\psi)$ для всех векторов ψ и любых двух скаляров c_1 и c_2;

б) $(c_1+c_2)\psi=c_1\psi+c_2\psi$ для любого вектора ψ и любых двух скаляров c_1 и c_2;

в) $c(\psi_1+\psi_2)=c\psi_1+c\psi_2$ для любых двух векторов ψ_1 и ψ_2 и любого скаляра c;

г) для скаляра 1 мы имеем $1\cdot\psi=\psi$.

Эти постулаты определяют абстрактное линейное векторное пространство в поле комплексных чисел. Последняя фраза означает, что скаляры, на которые умножаются векторы, являются комплексными числами. Если мы ограничим значения этих скаляров вещественными числами, то получим определение линейного векторного пространства в поле вещественных чисел. Для краткости говорят: «комплексное векторное пространство» и «вещественное векторное пространство». Примером хорошо знакомого читателю вещественного векторного пространства является трехмерное евклидово «физическое пространство».

49. Постулат (1а) является переместительным законом сложения, а постулат (1б) — ассоциативным законом; постулат (1в) говорит о существовании и единственности нулевого вектора; постулат (2а) является ассоциативным законом умножения, а постулаты (2б) и (2в) — распределительными законами для умножения на скаляр; постулат (2г) говорит о том, что умножение «единицы» на вектор дает тот же вектор.

Из этих постулатов следует множество почти очевидных следствий, например, таких:

$$0\cdot\psi=0, \quad (-1)\cdot\psi+\psi=0, \quad (-c)\,\psi=-(c\psi) \text{ и т. п.}$$

Мы не будем перечислять здесь все тривиальные теоремы, надеясь, что читатель сам способен это сделать.

В чем значение введенного понятия об абстрактном комплексном векторном пространстве? Дело в том, что при изучении математических теорий мы постоянно встречаемся с различными совокупностями элементов, которые, помимо других возможных свойств, обладают еще свойством удовлетворять всем аксиомам, относящимся к абстрактному комплексному векторному пространству. Когда мы встречаемся с таким пространством, нет необходимости каждый раз рассматривать его свойства; зная перечисленные аксиомы, можно просто применить их к любой новой совокупности.

50. Теперь можно понять, что совокупность $\mathscr{H}$ всех физически допустимых волновых функций совместно с волновой функцией, тождественно равной нулю, образует *конкретное* комплексное векторное пространство. Это пространство *конкретно*, потому что его векторы являются определенными комплексными функциями пространства и времени. Сравнивая постулаты п. 48 со свойствами совокупности волновых функций, перечисленными в п. 47, мы видим, что перечень постулатов занимает больше места. Однако большая часть этих постулатов абстрактного векторного пространства тривиально выполняется совокупностью конкретных волновых функций.

51. Заметим, что, определяя абстрактное комплексное векторное пространство, мы ничего не говорили о его *размерности*: оно могло быть конечно- или бесконечномерным. Уделим этому вопросу некоторое внимание.

Совокупность N векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ в комплексном векторном пространстве $\mathscr{H}$ является *линейно независимой*, если равенство

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n = 0 \tag{51a}$$

удовлетворяется лишь при $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$. В противном случае векторы *линейно зависимы*.

Комплексное векторное пространство имеет размерность N, если в этом пространстве можно определить совокупность N линейно независимых векторов, но нельзя определить большее число таких векторов. Векторное пространство бесконечномерно, если для *любого* целого N можно найти N линейно независимых векторов.

Векторное пространство $\mathscr{H}$ всех физически разумных волн де Бройля является *бесконечномерным*: имеется бесконечно большое число линейно независимых волновых функций.

52. Мы имели дело с решениями уравнения Клейна — Гордона, но теперь можно сказать, что совокупность решений любого линейного дифференциального уравнения образует (комплексное) векторное пространство. В рамках квантовой механики существующие в природе частицы могут быть описаны различными типами дифференциальных уравнений. Совокупность физически приемлемых решений этих уравнений всегда образует векторное пространство.

Можно выразить это иначе. Чтобы описать частицы данного типа, необходимо ввести комплексное векторное пространство и связать вектор этого пространства с возможным состоянием (движения) частицы.

Это великая идея, и лежит она в основе математической теории квантовой физики. С первого взгляда это кажется непонятным; утверждение, что состояние (движения) частицы описывается вектором в комплексном векторном пространстве, может показаться лишь новой формулировкой принципа суперпозиции, которому удовлетворяет решение волнового уравнения. При дальнейшем изучении квантовой физики мы поймем, однако, сколь велико значение этой идеи. Например, благодаря тому, что волновые функции образуют векторное пространство, можно упростить многие практические вычислительные задачи. Для векторного пространства вычислительные методы являются, по существу, *алгебраическими*, поэтому становятся важными алгебраические аспекты решений дифференциальных уравнений. Следует заметить, что алгебраические методы имеют большое преимущество (в смысле экономии вычислений) перед прямым решением дифференциальных уравнений, особенно для задач, характеризующихся специальными симметриями. В этой книге мы не сможем привести соответствующие примеры, тем не менее важно обратить внимание на указанное обстоятельство: кажущаяся весьма абстрактной теория векторных пространств ведет к большому упрощению решений ряда практических задач. Одним из аспектов такого упрощения является упрощение обозначений. (Вопрос обозначений нельзя считать второстепенным. Неудачные обозначения могут затруднить, а удачные облегчить решение задачи.)

53. Матричная механика Гейзенберга является примером такой формулировки квантовой механики, в которой главное внимание уделено векторному аспекту теории, а волновые уравнения играют второстепенную роль. На первый взгляд кажется, что между теорией Гейзенберга и волновыми теориями, примером которых является волновая механика Шредингера, существует большое различие. В действительности же они совершенно эквивалентны и ведут к тем же самым физическим следствиям. Они имеют общую основу, которой является теория абстрактного векторного пространства. Мы не будем рассматривать теорию Гейзенберга, так как читатель еще не обладает достаточной математической подготовкой и не знает теории матриц, к тому же мы не хотим перегружать книгу отступлениями.

Первая работа Вернера Гейзенберга по квантовой механике относится к 1925 г.*). В этой работе матричная механика не была сформулирована в явной форме. В то время Гейзенберг еще не понимал, что его математический аппарат имеет матричное представление. Связь его теории с теорией матриц была вскоре выяснена в работе Макса Борна и Паскуаля Иордана, имевшей большое значение **).

54. Читатель может заметить, что исторически матричная механика *предшествовала* волновой механике Шредингера. Нет сомнения, что если бы историческая последовательность открытий была обратной, то вскоре за волновой механикой Шредингера появилась бы и матричная механика как другая формулировка волновой теории. Однако этого не произошло. Действительная последовательность открытий в настоящее время кажется почти невероятной, так как матричная механика была одним из наиболее удивительных свершений в физической теории.

Физическая эквивалентность матричной и волновой механик была показана Шредингером в 1926 г. ***).

---

*) *Heisenberg W.* Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.— Zs. f. Phys., 1925, v. 33, p. 879.

**) *Born M., Jordan P.* Zur Quantenmechanik, I.— Zs. f. Phys., 1925, v. 34, p. 858. Дальнейшее развитие принципов квантовой механики произведено этими авторами и Гейзенбергом в работе: *Born M., Heisenberg W., Jordan P.* Zur Quantenmechanik, II.— Zs. f. Phys., 1926, v. 35, p. 557.

***) *Schrödinger E.* Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen.— Ann. d. Phys., 1926, v. 79, p. 734.