

Задачи

1. *Разрешающая сила* микроскопа определяет предел возможности рассмотреть с его помощью детали исследуемого объекта. Можно выразить разрешающую силу через наименьшее расстояние между двумя точками объекта, при котором они еще видны как две отдельные точки. В оптическом микроскопе максимально возможное разрешение ограничено длиной волны используемого для освещения света: невозможно рассмотреть детали объекта, размеры которого много меньше длины волны. Значительно увеличить разрешающую силу позволяет электронный микроскоп. Вместо стеклянных линз в нем используются электрические и магнитные поля соответствующей конфигурации. Рассмотрим типичный электронный микроскоп, в котором освещение объекта производится пучком электронов с энергией 50 кэВ. Сравните максимальную разрешающую силу такого электронного микроскопа и оптического микроскопа.

Следует заметить, что в действительности разрешающая сила, достижимая в микроскопе (электронном или оптическом), зависит от особенностей его конструкции. В частности от угла, под которым свет, рассеянный объектом, попадает в микроскоп. По техническим причинам этот угол гораздо меньше для электронного микроскопа, нежели для оптического, поэтому разрешающая сила электронного микроскопа гораздо ниже максимального теоретического значения. Несмотря на это, разрешающая сила электронного микроскопа во много раз больше, чем у оптического.

2. Рассмотрим газообразный гелий при комнатной температуре. Гелий — одноатомный газ, и средняя энергия его атомов при температуре T равна $E_k = (3/2)kT$. Это выражение позволяет найти среднюю скорость (и импульс) атомов гелия.

а) Вычислите среднюю скорость (в сантиметрах в секунду) атомов гелия.

б) Вычислите (в сантиметрах) длину волны де Бройля для этой средней скорости. Сравните длину волны со средним расстоянием между атомами газа. (Предположим, что давление равно 1 атм, и определим среднее расстояние по известной плотности.)

Можно ожидать, что квантовые эффекты играют роль, если длина волны де Бройля будет больше среднего расстояния. Классическое описание годится в противоположном случае. В классическом предствлении газ — это некое количество «биллиардных шаров», непрерывно сталкивающихся друг с другом, тогда как с точки зрения квантовой механики газ есть совокупность взаимодействующих волн. Поэтому интересно выполнить указанное сравнение для различных температур.

в) Плотность жидкого гелия равна около $0,15 \text{ г/см}^3$. Температура сжижения гелия при атмосферном давлении является наименьшей достижимой температурой. По аналогии с задачей б) сравните длину волны де Бройля со средним расстоянием между молекулами при температуре $0,01 \text{ К}$.

3. Выполните то же сравнение длины волны де Бройля и среднего расстояния для электронного «газа» в куске меди. Существуют модели металла, в которых электроны рассматриваются как газ, заполняющий объем металла, подобно тому как атомы гелия заполняют сосуд. Допустим, что в кристаллической решетке меди на каждый атом приходится один свободный электрон. В этом случае расстояние между атомами равно среднему расстоянию между электронами.

4. Рассмотрим трехмерную задачу о косом падении частицы на плоскость, разделяющую области R_1 и R_2 . Допустим, что в большей части областей R_1 и R_2 потенциальная энергия частицы постоянна и равна V_1 и V_2 соответственно. В области, примыкающей к границе раздела, потенциал быстро меняется от V_1 до V_2 . Таким образом, в областях R_1 и R_2 на частицу не действуют никакие силы, но вблизи поверхности раздела она испытывает большую силу, перпендикулярную к поверхности. Пусть полная энергия частицы равна E , причем $E > V_1$ и $E > V_2$.

Траектория частицы будет испытывать «преломление» на границе раздела, и мы рассмотрим это преломление с классической и квантовомеханической точек зрения.

а) Получите закон преломления с помощью классической механики. В этом случае при прохождении через поверхность раздела изменяется нормальная компонента импульса частицы, но касательная к поверхности компонента остается

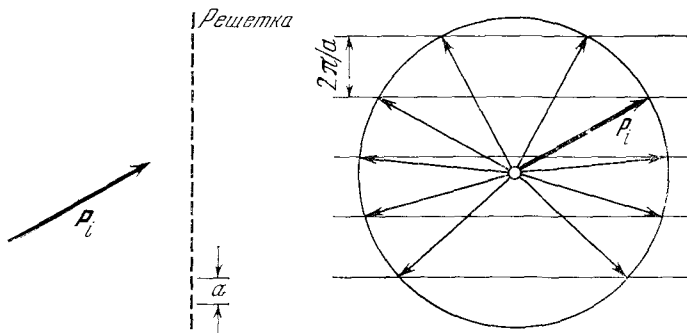
неизменной. Закон сохранения энергии дает нам импульс в области R_2 , если мы знаем импульс в области R_1 , что позволяет найти закон преломления.

б) Получите закон преломления с помощью волновой механики и покажите, что он совпадает с классическим результатом. Вам нужно найти связь между энергией E , импульсом p , частотой ω и волновым вектором k частицы. Наши предыдущие рассуждения в тексте относились к области, для которой потенциал равен нулю, и в данном случае не годятся. Подумайте, как нужно дополнить теорию в нашем случае. Здесь возникают следующие вопросы: будет ли частота одинаковой по обе стороны поверхности? Будет ли непрерывна тангенциальная составляющая волнового вектора вблизи поверхности? Всегда ли верны соотношения $p = \hbar k$ и $E = \hbar \omega$?

Вы знаете ответы на эти вопросы: классический закон преломления, полученный в задаче а), должен быть верен. Таким образом, вам известен результат, который *должна* дать квантовая теория в этом случае.

в) Согласно классической динамике частица не может быть *отражена* на поверхности раздела; возможно только *преломление*. Свет, падающий на поверхность раздела двух диэлектриков, преломляется и отражается. Что будет происходить в квантовомеханической теории, т. е. в случае реальных частиц?

5. Рассмотрим дифракционную решетку, показанную на рисунке к этой задаче. Такая решетка состоит из большого числа тонких параллельных царапин, нанесенных на плоской поверхности (стекло, металл, пластик и т. п.) на равном расстоянии друг от друга. Для простоты рассмотрим двухмерную задачу. Пусть падающая на решетку плоская волна распространяется в направлении, которое лежит в плоскости чертежа (перпендикулярной к плоскости решетки).



К задаче 5. Схематически показанная дифракционная решетка. Импульс падающей на решетку волны обозначен вектором p_i . Расстояние между соседними штрихами решетки равно a . Справа показано простое геометрическое построение, позволяющее найти направления дифракционных максимумов. Конечный импульс определяется пересечением окружности, радиус которой равен модулю импульса, с семейством параллельных линий, соответствующих разрешенным значениям вертикальной составляющей переданного решетке импульса. Показанные на рисунке векторы соответствуют десяти возможным конечным импульсам, включая начальный

Пусть частота (энергия) волны равна ω , а волновой вектор (импульс) равен p_i . Найдите возможные направления дифрагировавших волн и покажите, что это можно сделать таким образом. Частица с импульсом p_i сталкивается с решеткой. После столкновения ее импульс будет p_0 . В этом столкновении энергия частицы не меняется, но решетке передается импульс $q = p_i - p_0$. Покажите, что возможные направления дифрагировавших волн определяются следующим простым условием. Компонента *переданного импульса* q в направлении решетки (вертикальная компонента на рисунке) должна быть кратна величине $2\pi/a$, где a — расстояние между штрихами. Таким образом, вертикальная составляющая переданного импульса «квантуется».

6. а) Рассмотрим дифракцию видимого света на решетке, показанной в предыдущей задаче. Пусть постоянная решетки a равна двум длинам волн света, а

угол падения волны равен 45° . Найдите все углы, под которыми выходят дифрагировавшие волны. Сделайте чертеж.

б) Изменим наш мысленный опыт, поместив решетку между двумя пластинами из стекла, имеющего показатели преломления $1,51$ (крон) и $1,74$ (флинт). Толщина каждой пластины равна 5 мм. Свет падает со стороны пластины из крона. Длина волны, постоянная решетки и угол падения те же, что и в первой части этой задачи. Найдите направления выхода дифрагировавших лучей из нашей двухслойной пластинки и сравните результат с первой частью задачи.

7. В опыте Дэвиссона — Джермера электроны с энергией 88 эВ падают перпендикулярно к поверхности металлического кристалла, атомы которого расположены в квадратной решетке с периодом $a=2,9$ Å. Начертите схему, на которой нанесены точки пересечения дифрагировавших лучей с плоскостью, параллельной поверхности кристалла и находящейся от нее на расстоянии 5 см. Чертеж должен быть в соответствующем масштабе, чтобы показать все дифрагировавшие лучи.

8. Некогда жил физик, который выполнил описанные выше опыты для ряда металлов. В своем отчете он написал: «С металлом A я наблюдал дифракционную картину трехкратной симметрии, с металлом B — четырехкратной, с металлом C — пятикратной, с металлом D — шестикратной». (Картина имеет n -кратную симметрию, если она не меняется при повороте на угол $2\pi/n$.) Обсудите подробно этот отчет.

9. Нейтроны из реактора проходят через колонну из поликристаллического бериллия. Это вещество выбрано потому, что оно слабо поглощает нейтроны. Оказывается, что нейтроны, вышедшие из колонны, «холодные», их кинетическая энергия соответствует температуре, меньшей 50 К. «Тепловые» нейтроны, кинетическая энергия которых отвечает комнатной температуре, сильно рассеиваются бериллием. Можете ли вы объяснить это явление?

10. Предположим, что волновая функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ является решением уравнения Клейна — Гордона для положительной частоты (масса частицы равна m). Пусть это решение описывает частицу (волновой пакет), достаточно четко ограниченную в пространстве и движущуюся в более или менее хорошо определенном направлении. Рассмотрим функцию $\psi_R(\mathbf{x}, t)$, заданную следующим образом:

$$\psi_R(\mathbf{x}, t) = \psi(-\mathbf{x}, t).$$

а) Покажите, что $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ также является решением уравнения Клейна — Гордона для положительной частоты.

б) Волновая функция $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ отвечает другому состоянию движения частицы. Поясните физически, как это состояние движения $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ связано с состоянием движения, описываемым волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, t)$. (Здесь может быть высказано ясное и простое положение. Подумайте сперва о «средних» траекториях в обоих случаях.)

11. Эта задача аналогична предыдущей, но труднее. Рассмотрим функцию $\psi_T(\mathbf{x}, t)$, заданную условием

$$\psi_T(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, -t),$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

а) Покажите, что $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ также является решением уравнения Клейна — Гордона для положительной частоты.

б) Поясните физически, как связаны друг с другом состояния движения, описываемые волновыми функциями $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t)$.

Дополнительная литература

Существует огромная литература по теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Читатель познакомится с ней в свое время, но сейчас мы обращаем его внимание на монографию, сыгравшую большую роль в физике:

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1 и 2.— М.: Гостехиздат, 1951; 2-е изд.— М.: Мир, 1964.

Во втором томе рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных. Первый том посвящен разделам математики, особенно важным для физи-

ков: фурье-анализу, теории матриц и векторных пространств, теории некоторых обычных линейных дифференциальных уравнений.

Важнейшие области математики, которые позже сыграли большую роль в придании математической строгости квантовой механике, были развиты почти одновременно с ней. Д. Гильберт из Гёттингенского университета был одним из ведущих математиков в этой области. Бесконечномерное векторное пространство, столь важное для современной формы квантовой механики, названо в его честь гильбертовым пространством. Первоначально Гильберт не имел в виду физические применения своей теории линейных пространств, но открытие квантовой механики стимулировало дальнейшие исследования, связанные с физическими применениями. Этот период характерен плодотворным взаимодействием между математиками и физиками.

Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики.— М.: Наука, 1964.

Матричная механика рассмотрена во многих учебниках по квантовой механике. В качестве вводной книги, в которой рассмотрен и применен алгебраический подход к квантовой механике, можно рекомендовать:

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8 и 9. Квантовая механика.— М.: Мир, 1966, 1967.

В данной книге очень слабо затронута физика твердого тела. Из вводных мы рекомендуем:

Киттель Ч. Введение в физику твердого тела.— М.: Физматгиз, 1962. В ней рассмотрено, в частности, строение кристаллов, теория дифракции рентгеновских лучей, теория фононов.

Представляют интерес также следующие статьи из «Scientific American»:

Darrow K. The Quantum Theory, 1952, March, p. 47.

Darrow K. Devisson and Germer, 1948, May, p. 50.

Schrödinger E. What is Matter, 1953, Sept., p. 52.

Morrison P., Morrison E., The Neutron, 1951, Oct., p. 44.

Gamov G. The Principle of Uncertainty, 1958, Jan., p. 51.