

ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Принцип неопределенностей Гейзенберга

1. В двух предыдущих главах мы узнали, что все частицы обладают волновыми свойствами. Движущаяся частица, импульс которой равен p , ведет себя подобно волне, причем соотношение между длиной волны и импульсом частицы $\lambda = h/p$ является *универсальным* соотношением, справедливым для любых частиц. Мы обращали внимание читателя на то, что волновые свойства частицы нельзя свести к представлению о некоторой «ведущей волне», каким-то образом связанной с классической частицей. Свойства реальной физической частицы нельзя свести к свойствам более привычных нам объектов. Волновые и корпускулярные свойства физических частиц являются различными аспектами их внутренней природы.

2. Мы показали, что состояние движения частицы может быть описано комплексной волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, t)$. Для изолированной частицы эта волновая функция удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона с тем дополнительным условием, что в фурье-представлении волновой функции входят только положительные частоты. Мы показали, что удовлетворяющее этому условию решение можно получить, если задать решение уравнения Клейна — Гордона $\psi(\mathbf{x}, 0)$ в момент времени $t = 0$ (или в любой другой произвольный момент времени). Эта начальная волновая функция совершенно произвольна, и мы имеем поэтому чрезвычайно большое разнообразие волн, соответствующих различным состояниям движения частицы.

Важно представлять себе, что волна в квантовой механике не должна быть подобна синусоидальной волне. Такое подобие является совершенно частным случаем. Уравнение Клейна — Гордона не накладывает никаких ограничений на вид волны в *данный момент*, но определяет зависимость волновой функции от времени. Это ограничивает, однако, возможный характер волны для двух различных моментов времени. Волновая функция $\psi(\mathbf{x}, t_1)$ в момент времени $t = t_1$ однозначно определяет волновую функцию во все другие времена и тем самым однозначно определяет состояние движения частицы. В этом смысле квантовая механика является детерминистической теорией.

3. Рассмотрим теперь состояние движения частицы, описываемое начальной волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, 0)$. Что можно сказать о положении и импульсе частицы в момент времени $t = 0$?

Мы говорили, что амплитуда волны должна быть истолкована в понятиях вероятности. Частицу вероятнее всего обнаружить там, где амплитуда волновой функции велика. Более точно, квадрат мо-

для волновой функции в данной точке является мерой вероятности обнаружить частицу (например, с помощью «небольшого» прибора) вблизи этой точки. Если начальная волновая функция такова, что ее амплитуда равна нулю всюду за пределами малой области, то можно утверждать, что (в момент $t = 0$) частица находится в пределах этой области и ее положение известно довольно точно. С другой стороны, если начальная волновая функция распространяется на большую область, в пределах которой ее амплитуда мало меняется, то нельзя приписать частице определенное положение; ее положение в момент времени $t = 0$ известно с большой неопределенностью.

Итак, из волновых представлений естественно следует, что точное положение частицы (в данный момент) в общем случае не может быть задано. Точность, с которой известно положение частицы, зависит от ее состояния движения. Возможны волновые функции (состояния движения), которые определяют положение частицы с малой погрешностью, но возможны и волновые функции другого типа, определяющие положение частицы с погрешностью, не лучшей, например, светового года.

4. Аналогичные соображения справедливы и для другой переменной, т. е. для импульса. Импульс и длина волны связаны соотношением де Бройля, поэтому интуитивно ясно, что нельзя точно знать импульс, если плохо определена длина волны. Чтобы указать длину волны, необходимо, чтобы волновая функция имела хотя бы некоторые свойства периодичности. Протяженная синусоидальная волна имеет определенную длину волны, но для нерегулярной волны произвольной формы понятие длины волны вообще неприменимо. Таким образом, точность определения импульса зависит от состояния движения частицы: импульс может быть определен весьма точно в одном состоянии и лишь очень грубо в другом.

Гейзенберг показал, что, хотя не существует пределов точности, с которой можно определить *либо* импульс, *либо* положение частицы, имеется принципиальный предел для точности определения этих

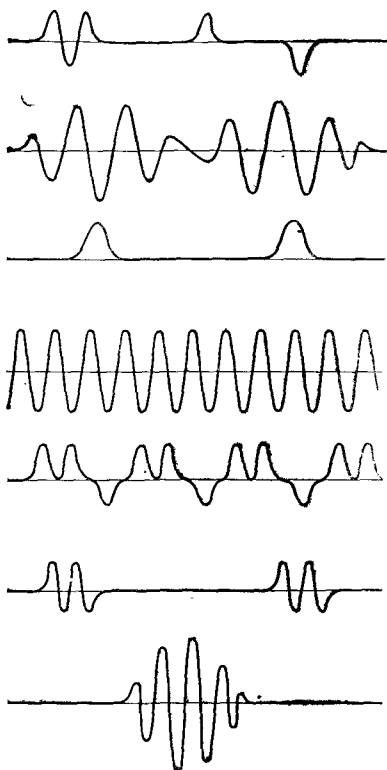


Рис. 2А. Различные типы волн в пространстве. Волны в квантовой механике, как правило, не синусоидальны в данный момент времени. Произвольная волна является произвольной функцией положения и может не походить на гармоническую волну. На графиках показана вещественная часть волновой функции. В общем случае, волновая функция является комплексной.

величин в один и тот же момент времени (т. е. для данной волновой функции). Это утверждение имеет точную математическую формулировку в виде знаменитого *принципа неопределенностей* Гейзенберга, сформулированного им в 1927 г. *). Мы получим этот принцип с помощью простых интуитивных соображений.

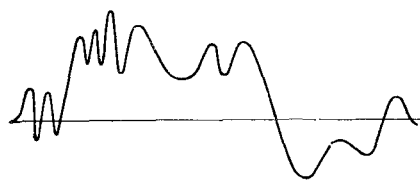


Рис. 4А. Пример волнового цуга, для которого понятие длины волны не имеет смысла. Для такого цуга импульс определен очень плохо. Это справедливо и для всех волн, изображенных на рис. 2А, за исключением четвертой волны сверху

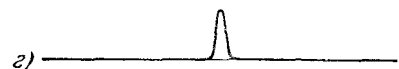
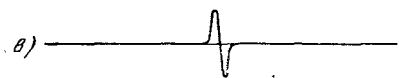
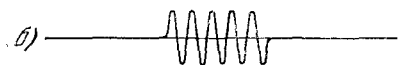


Рис. 5А. К соотношению неопределенностей для координаты и импульса. Точно определенное положение требует короткого цуга волн. Точно известный импульс требует протяженного цуга синусоидальных волн. Оба требования исключают друг друга. а) Положение определено плохо; импульс определен хорошо; б) положение определено лучше; импульс определен хуже; в) положение определено хорошо; импульс определен плохо; г) положение определено очень хорошо, импульс определен очень плохо

синусоида, простирающаяся от $-\infty$ до $+\infty$.

5. Начнем с волн де Бройля в одномерном пространстве. Для простоты возьмем систему единиц, в которой $\hbar=1$. В этом случае длина волны и импульс будут связаны формулой $\lambda=2\pi/p$ и понятия волнового вектора и импульса совпадают.

Наши рассуждения будут основаны на графическом изображении волн. На рис. 5А изображены четыре различных волновых цуга конечной протяженности (независимой переменной является координата x). В общем случае волновая функция является комплексной величиной и ее графическое изображение вызывает трудности. Мы можем, однако, изобразить в отдельности вещественную и мнимую части волновых функций, и читатель может считать, что на рис. 5А изображена одна из них.

На всех графиках показаны «прерванные» синусоидальные волны, описываемые функцией $\sin(px)$ в той области, где они не исчезают. Такие волны, «обрезанные» с обоих концов, разумеется, не являются истинно синусоидальными. Поэтому отвечающая им длина волны (и импульс) не может быть точно определена; точным значениям этих величин отвечает «чистая»

*) Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.— Zs. f. Phys. 1927, v. 43, p. 172.

Обращаясь к рис. 5А, замечаем, что чем точнее известно положение частицы, тем хуже мы знаем ее импульс. Обозначим неопределенность в положении x через Δx . В качестве грубой меры неопределенности положения можно принять длину волнового цуга; если он состоит из n полных волн, то

$$\Delta x \sim n\lambda = 2\pi n/p, \quad (5a)$$

где λ — длина волны. Однако ясно, что чем больше число полных колебаний в волновом цуге, тем точнее известна длина волны. В качестве грубой меры *относительной* неопределенности для длины волны можно принять величину

$$\frac{1}{n} \sim \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p}, \quad (5b)$$

где Δp — неопределенность в импульсе (поскольку $\lambda = 2\pi/p$, то $\Delta\lambda/\lambda = \Delta p/p$).

Из (5a) и (5b) получаем следующее утверждение о порядке величины произведения $\Delta x \cdot \Delta p$:

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim 1. \quad (5c)$$

Мы опустили множитель 2π , так как нас интересует лишь оценка порядка величины. Наше определение Δx и Δp не точное, а лишь качественное, поэтому и результат лишь качественный.

6. Выражение (5c) является соотношением неопределенностей для частного случая волн, показанных на рис. 5А. Соотношение неопределенностей, справедливое для общего случая *любых* волн, имеет форму *неравенства*. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим волну другого типа, показанную на рис. 6А. Очевидно, что у этой волны приблизительно та же неопределенность в положении, что и у волны *a*) на рис. 5А, но неопределенность в импульсе (в длине волны) здесь значительно больше. Поэтому более правильное выражение принципа неопределенностей имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq 1. \quad (6a)$$

Это то же самое соотношение неопределенностей, которое мы весьма кратко обсуждали в гл. 1.

7. Рассмотрим теперь волны в трехмерном пространстве. Заметим прежде всего, что все сказанное об одномерной волне применимо к каждой координате отдельно. Таким образом, если x_α и p_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — декартовы координаты и импульсы частицы, то

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\alpha \geq 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (7a)$$

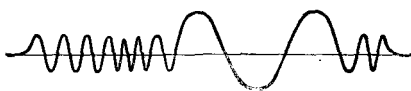


Рис. 6А. Для этого волнового цуга положение задано столь же плохо, как и для изображенного на рис. 5А, *a*. В данном случае плохо определен и импульс, во всяком случае гораздо хуже, чем на рис. 5А, *a*. Соотношение неопределенностей имеет вид неравенства; можно представить себе волну, для которой неопределенность как положения, так и импульса произвольно велика

С другой стороны, частица может быть весьма точно локализована в *пространстве*, скажем, в направлении 1, а ее импульс может быть известен с большой точностью для направления 2. Читатель должен вообразить волновой пакет, стянутый в узкую область, параллельную оси 2, но далеко распространившийся вдоль этой оси. В этом случае координата x_1 частицы известна точно. В направлении оси 2 мы можем иметь почти периодическую волну, распространившуюся на большое расстояние, а это означает точное знание импульса p_2 . При этом точность определения координаты x_1 частицы никак не ограничена точностью определения компоненты импульса p_2 , а это означает, что в общем случае

$$\Delta x_\alpha \cdot \Delta p_\beta \geq 0 \text{ для } \alpha \neq \beta. \quad (7b)$$

Неравенства (7a) и (7b) являются соотношениями неопределенностей для волн (частиц) в трехмерном пространстве.

8. Чтобы развить эти идеи, вернемся к представлению произвольной волны в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \int_{(\mathbf{x})} d^3(\mathbf{p}) A(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}), \quad (8a)$$

где

$$A(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\mathbf{x})} d^3(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, 0) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}). \quad (8b)$$

Мы обсуждали это представление в п. 39—44 гл. 5, где было сказано, что из любого из этих выражений следует другое.

Допустим теперь, что функция $A(\mathbf{p})$ локализована в очень узкой области пространства импульсов. Это означает, что $A(\mathbf{p})$ велика лишь в непосредственной близости к некоей точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, а повсюду в другом месте мала. Для простоты можно даже считать $A(\mathbf{p})$ *исчезающе малой* всюду, за исключением узкой области около \mathbf{p}_0 . Обращаясь к интегралу (8a), мы интуитивно ожидаем, что функция $\psi(\mathbf{x}, 0)$ не будет ограничена малой областью пространства, а будет иметь вид приближенно плоской волны с импульсом \mathbf{p}_0 . Действительно, рассмотрим крайний случай, когда ширина области, где $A(\mathbf{p})$ отлична от нуля, стягивается к нулю. [При переходе к такому пределу амплитуда $A(\mathbf{p})$ должна возрасти, в противном случае интеграл, дающий значение $\psi(\mathbf{x}, 0)$, обратится в нуль.]

Читатель видит, что чем лучше локализована функция $A(\mathbf{p})$, тем шире область функции $\psi(\mathbf{x}, 0)$. Существует, однако, замечательная симметрия между уравнениями (8a) и (8b), из которой следует, что чем лучше локализована функция $\psi(\mathbf{x}, 0)$, тем более размыта функция $A(\mathbf{p})$. Если функция $\psi(\mathbf{x}, 0)$ хорошо локализована, т. е. исчезает за пределами узкой области вблизи значения \mathbf{x}_0 , то положение частицы хорошо определено. В этом случае плохо определен ее импульс, как это можно видеть из формулы (8a).

9. Эти идеи допускают более точное выражение, и можно связать степень «концентрации» функции $A(\mathbf{p})$ со степенью «концентрации» функции $\psi(\mathbf{x}, 0)$. Результатом является *соотношение неопределенностей*: точность определения положения обратно пропорциональ-

на точности определения координаты. Мы обещали читателю, что в этой книге он не будет иметь дела с теорией интеграла Фурье, поэтому лишены возможности произвести строгий вывод соотношения неопределенностей*). Нашей целью было лишь качественное понимание этого соотношения. Как мы видим, сама идея предельно проста. Если положение частицы задано точно, волновой цуг должен быть очень коротким. Но это условие несовместимо с точным знанием импульса, когда волновой цуг должен содержать большое число полных периодов синусоидальной волны. Из волнового описания частицы немедленно следует, что ее положение и импульс нельзя *одновременно* определить с неограниченной точностью.

Вернемся к краткому рассмотрению физического значения соотношений неопределенностей в п. 20—26 гл. 1. Теперь должно быть совершенно ясно, что эти соотношения не связаны с неучитываемыми «возмущениями», которые наши измерительные приборы вносят в классическое движение классической частицы. Смысл соотношений неопределенностей в том, что они устанавливают пределы, за которыми классические идеи перестают действовать. Для квантово-механической частицы (волнового пакета) такие понятия, как одновременно измеренные *точно* положение частицы и *точное* значение импульса, просто не имеют смысла.

10. При каких условиях электрон можно считать классической частицей, подобной заряженному «биллиардному шару»? Эти условия аналогичны условиям справедливости геометрической, или лучевой, оптики: линейные размеры прибора, через который проходит частица, должны быть гораздо больше длины волны. В противном случае мы будем наблюдать характерные для волн дифракционные явления. Обозначим через d линейный размер прибора, которым может быть диаметр линзы или ширина щели, а через λ — дебройлевскую длину волны частицы. Чтобы классическое описание было достаточно точным, необходимо, чтобы $d \gg \lambda$. Так как $\lambda = 2\pi/p$, то это соотношение можно записать в форме

$$dp \gg 1. \tag{10a}$$

В системе единиц СГС написанное соотношение имеет вид $dp \gg \hbar$. Это тот же критерий, который мы обсуждали в п. 20—26 гл. 1.

11. Для иллюстрации применений соотношения неопределенностей попробуем выяснить, с какой точностью можно задать классическую траекторию в частном случае электрона. Рассматриваемая ситуация показана на рис. 11А и 11В. Слева на экран падает пучок электронов, каждый из которых описывается плоской волной. Экран имеет щель шириной d . Мы хотим выбрать такое значение d , чтобы пятно на расположенном справа экране, созданное прошедшим через щель пучком, было возможно меньше. Расстояние между обоими экранами равно L .

*) Обычный вывод соотношения неопределенностей см. в книге: *Шифф Л. Квантовая механика.*— М.: ИЛ, 1957.

Предположим, что все электроны имеют один и тот же начальный импульс p . У электрона, проходящего через левый экран, неопределенность в положении в пространстве равна d . Поэтому

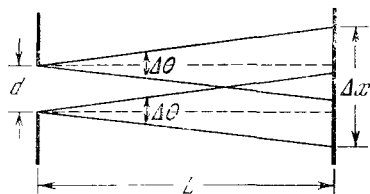


Рис. 11А. Попытка создать узкий пучок электронов, ограничив щелью широкий пучок, падающий на экран слева. Пучок дифрагирует на щели, и неопределенность $\Delta\theta$ в угле, под которым электроны выходят из щели, обратно пропорциональна ее ширине d . Размер пятна на экране справа $\Delta x \sim d + L \Delta$

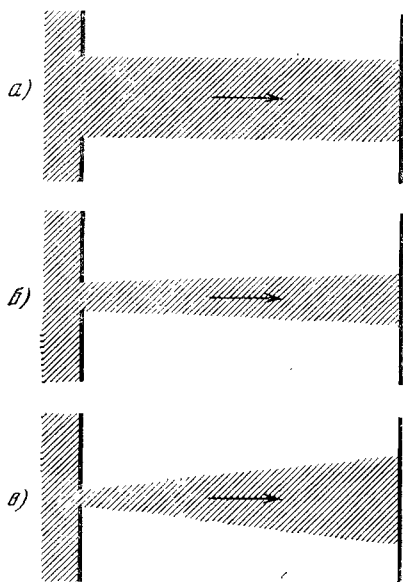


Рис. 11В. Эти три схемы показывают, как ширина пучка зависит от ширины d входной щели. Заметим, что на этих схемах длина волны электрона меньше, чем на рис. 11А. В случае а) пятно на экране велико, так как велика входная щель. Если сильно уменьшить размер входной щели, как это показано в случае в), пятно все же остается большим за счет дифракции пучка. **Наименьшее пятно мы получим, выбрав $d \sim \sqrt{\lambda L}$.** В этом случае размер пятна будет того же порядка. Такой оптимальный выбор показан в случае б)

неопределенность в импульсе

$$\Delta p \sim \frac{1}{d}. \quad (11a)$$

Предположим, что Δp мало по сравнению с p . В этом случае мы можем выразить (11a) через неопределенность $\Delta\theta$ в значении угла θ (угол отсчитывается от направления первичного пучка), под которым электрон выходит из экрана, и

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{1}{pd}. \quad (11b)$$

Пусть Δx измеряет размер пятна на правом экране. Величина Δx определяется двумя факторами — размером отверстия в левом экране и расширением волны вследствие дифракции на щели (рис. 11А).

Таким образом,

$$\Delta x \sim d + L\Delta\theta \sim d + L/pd. \quad (11c)$$

Поскольку длина волны $\lambda = 2\pi/p$, то можно записать (11c) в виде

$$\Delta x \sim d + \lambda L/d, \quad (11d)$$

если пренебречь множителем 2π в последнем слагаемом. Здесь мы хотим оценить только порядок величины, и поскольку конечный результат имеет более удобный вид без множителя 2π , то мы его опускаем.

Итак, если величину d сделать очень малой, то второе слагаемое в (11d), возникающее вследствие дифракции, станет очень большим, а если d велико, то велико первое слагаемое. Нетрудно вычислить оптимальное значение d_0 , для которого величина Δx , оцененная по (11d), проходит через минимум. Мы находим

$$d_0 = \sqrt{\lambda L}, \quad \Delta x_{\min} = 2d_0 = 2\sqrt{\lambda L}. \quad (11e)$$

В оптимальном случае размер пятна на экране будет в два раза больше ширины щели. (Множитель 2 не следует понимать буквально. Вспомним, что мы оцениваем порядок величины и считаем $2\pi \sim \sim 1$.) Пусть $L = 1$ м, а энергия электронов равна 150 эВ. Этой энергии отвечает длина волны $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$, и из оценки (11e) следует, что размер пятна на правом экране может быть порядка 0,02 мм. Таким образом, с макроскопической точки зрения траектория электрона между двумя экранами оказывается достаточно узкой.

12. Подробное изучение условий, при которых физическую систему можно описывать законами классической физики, — интересная, но не простая задача. Иногда поступают следующим образом. Начинают с того, что решают задачу квантовомеханически, а затем полагают $\hbar = 0$, чтобы перейти к классическому пределу. Такой подход недостаточно строг. Мы не можем полагать $\hbar = 0$, так как знаем, что в действительности $\hbar = 1$ (в соответствующих единицах). Истинная проблема в том, чтобы показать, каким образом система, в действительности управляемая законами квантовой механики (как вообще все системы), кажется с достаточной точностью управляемой классическими законами. При рассмотрении этой проблемы естественно пользоваться системой единиц, в которой $\hbar = 1$, как было сделано в нашем примере.

Вопрос о достижении классического предела имеет много аспектов. Его нельзя исчерпать с помощью какого-либо одного утверждения. Если, например, понимать под «классическим пределом» классическую динамику частиц, то условием его достижения является ненаблюдаемость дифракционных явлений. Мы обсуждали это условие в предыдущем пункте. Чтобы волновой пакет был хорошо локализован и мы могли бы указать его траекторию (интерпретируемую как траектория частицы), линейные размеры щелей,

определяющих траекторию, должны быть велики по сравнению с длиной волны де Бройля. Классической динамикой не исчерпывается, однако, «классический предел». Важно также выяснить условия применимости классической электромагнитной теории. Они отнюдь не сводятся к отсутствию дифракционных явлений, а заключаются в том, чтобы отдельные фотоны не проявляли себя как *частицы*.

Мы не станем больше заниматься вопросом о классическом пределе. Для дальнейшего достаточно грубых качественных представлений. Читатель должен сам обдумать этот вопрос. Наше и рассуждения показывают, что условия осуществления «классического предела» зависят от рассматриваемой системы, и это обстоятельство нельзя забывать.

13. В качестве нового примера плодотворного применения соотношения неопределенностей попытаемся оценить с его помощью энергию связи атома водорода. Мы обещали сделать это в п. 26 гл. 2. Воспользуемся системой единиц СГС, в которой соотношение неопределенностей имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar. \quad (13a)$$

Допустим, что классическое выражение для полной энергии электрона в электростатическом поле протона

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (13b)$$

имеет смысл и в квантовой механике. Переменная p характеризует импульс в электронной волне, а переменная r является некоторой «координатой положения» для волны.

Первый член в (13b) всегда положителен, второй — отрицателен. В основном состоянии системы энергия имеет минимальное из возможных значений. Мы знаем, что она должна быть отрицательной, в противном случае не будет связанного состояния. В классической теории, выбрав орбиту электрона достаточно малого радиуса, можно обеспечить сколь угодно малое значение энергии связи. Для такого состояния неопределенность в *положении* будет мала, и из квантовомеханического принципа неопределенностей немедленно следует, что в этом состоянии должна быть велика неопределенность в значении импульса, что означает, что величина $p^2/2m$ велика. Иными словами, сделав подходящим выбором малого r потенциальную энергию большой (и отрицательной), мы получим большое значение кинетической энергии, и если последняя «перевесит», то значение полной энергии будет большим. С другой стороны, взяв малое значение p , мы будем иметь небольшую кинетическую энергию, но тогда r будет велико и отрицательная потенциальная энергия мала. Легко понять, что существует некое оптимальное значение радиуса, для которого полная энергия принимает минимальное значение.

14. Чтобы увидеть, каким образом «баланс» между кинетической и потенциальной энергией приводит к установлению связанного состояния, сделаем некоторые *грубые* приближения. Заменяем не-

определенность в положении на радиус r , а неопределенность в импульсе на сам импульс p и перенесем соотношение неопределенностей в виде

$$rp \sim \hbar. \quad (14a)$$

Для определенности предположим, что

$$rp = \hbar. \quad (14b)$$

Вспользуемся теперь равенством (14b), чтобы исключить r из выражения (13b) для полной энергии. Получаем

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar}. \quad (14c)$$

Полная энергия имеет минимум в точке $p = p_0$, которую мы получим, приравняв нулю производную $\partial E / \partial p$:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)_{p=p_0} = \frac{p_0}{m} - \frac{e^2}{\hbar} = 0. \quad (14d)$$

Решая это уравнение относительно p_0 и полагая $r_0 = \hbar / p_0$, имеем

$$p_0 = e^2 m / \hbar, \quad r_0 = \hbar^2 / e^2 m, \quad (14e)$$

а также

$$E = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{e^2 p_0}{\hbar} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} = -R_\infty. \quad (14f)$$

Сравним этот результат со значением энергии, полученным в п. 23 гл. 2. Мы видим, что оба результата совпадают. То же следует сказать и о радиусе r_0 , совпадающем со значением боровского радиуса, $r_0 = a_0 = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см.

15. Разумеется, совпадение наших грубых оценок с точным значением энергии связи нужно считать «случайным». Важно лишь то, что мы получили верный порядок величины как для энергии свя-

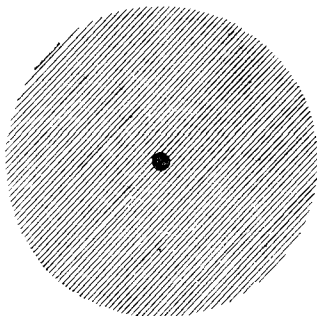


Рис. 15А. Если электрон локализован в небольшой области около ядра, неопределенность его положения мала. В этом случае велика неопределенность импульса, что означает большую кинетическую энергию электрона. Его потенциальная энергия при этом будет отрицательной и большой по модулю

Рис. 15В. Чтобы кинетическая энергия была небольшой, электрону должна быть доступна значительная область пространства. У электрона должна быть большая неопределенность в положении. В этом случае его среднее расстояние от ядра велико и потенциальная энергия мала по модулю. Основное состояние определяется компромиссом, при котором полная энергия имеет наименьшее возможное значение, допускаемое принципом неопределенности

зи, так и для размера атома и что, основываясь на волновых представлениях, можно понять, почему атомный электрон не падает на ядро. Структура атома является результатом компромисса. Энергия основного состояния — это наименьшая энергия, при которой

возможно существование атома, и она является суммой двух слагаемых противоположного знака. Если мы сделаем отрицательное слагаемое (потенциальную энергию) больше, сконцентрировав электронную волну в небольшой области вблизи ядра, то увеличим кинетическую энергию, ибо такая волна отвечает большому импульсу. С другой стороны, нельзя слишком сильно увеличить размеры волнового пакета, так как при этом слагаемое с потенциальной энергией станет несущественным. Основное состояние отвечает «наилучшему» возможному компромиссу. Эти рассуждения иллюстрируют рис. 15А и 15В.

Наши рассуждения показывают также, что идея о классической орбите электрона в атоме несовместима с волновыми представлениями. В предыдущем пункте мы показали, что неопределенность положения электрона в атоме водорода должна быть порядка боровского радиуса a_0 . Эта оценка координаты в равной мере применима для всех возможных направлений в пространстве, и поэтому понятие о круговой орбите с радиусом a_0 теряет смысл.

16. Воспользуемся теперь принципом неопределенностей для грубой оценки ядерных сил. Рассмотрим нуклон, входящий в состав ядра, которое мы представляем себе в виде сферы радиуса $r_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-13}$ см. Из соотношения неопределенности следует, что импульс нуклона имеет порядок $p \sim \hbar/r_0$; таким образом, его кинетическая энергия должна быть порядка

$$E_k \sim \frac{1}{2M_p} \left(\frac{\hbar}{r_0} \right)^2 \sim 10 \text{ МэВ.} \quad (16a)$$

Поскольку нуклон связан в ядре, среднее значение потенциальной энергии $\langle U \rangle$ должно быть отрицательно и по модулю больше кинетической энергии:

$$-\langle U \rangle \geq 10 \text{ МэВ.} \quad (16b)$$

Выполненная оценка *очень груба*, но дает, однако, представление о порядке величины ядерных сил.

17. Те же доводы, основанные на принципе неопределенностей, показывают, что ядро не может состоять из протонов и *электронов*. Из равенства (16a) следует, что кинетическая энергия обратно пропорциональна массе частицы. Поэтому средняя потенциальная энергия электронов в ядре была бы приблизительно в 2000 раз больше оценки (16b). Это совершенно несовместимо с хорошо известным экспериментальным фактом, что электрон слабо взаимодействует с ядром и что доминирующим взаимодействием электрона является электромагнитное взаимодействие.

18. Покажем, что время и частота связаны соотношением неопределенностей, которое совершенно аналогично принципу неопределенностей, связывающему координату и импульс. Обозначим через $f(t)$ амплитуду (комплексную) некоторого физического процесса. Например, $f(t)$ может быть амплитудой электромагнитной волны в заданной точке пространства в любой момент времени t . Если волна испускается атомом, она представляет собой волновой пук конечной

длины, и амплитуда стремится к нулю при t , стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$. Такую волну можно представить как результат суперпозиции *монокроматических* волн. Разложение волны на монокроматические компоненты выражается с помощью интеграла Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (18a)$$

где функция

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega t}. \quad (18b)$$

Как было указано в гл. 5, существует теорема, по которой для большого класса «хорошо ведущих себя» функций $f(t)$ и $g(\omega)$ существование одного из этих интегралов означает существование другого. Таким образом, указанная теорема позволяет рассматривать любой зависящий от времени процесс через его гармонические компоненты.

Если функция $g(\omega)$ в интеграле (18a) велика лишь в непосредственной близости от точки $\omega = \omega_0$, то можно утверждать, что частота процесса хорошо определена: амплитуда $f(t)$ соответствует почти монокроматическому процессу. Для большого интервала времени эта амплитуда приближенно имеет вид $f(t) = Ae^{-i\omega t}$. Если, с другой стороны, амплитуда $f(t)$ велика только в небольшом интервале времени вблизи $t = t_0$, то она соответствует резкому импульсу,

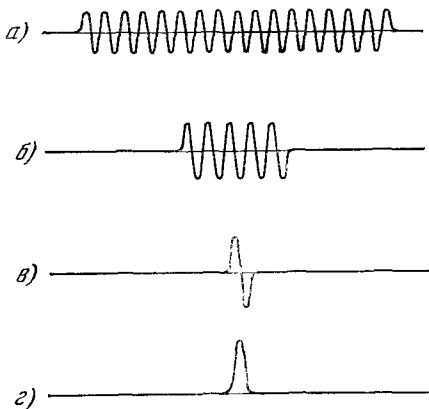


Рис. 18А. К соотношению неопределенностей для частоты и времени. Этот рисунок идентичен рис. 5А, но ось абсцисс в данном случае является осью времени. а) Время определено плохо, частота определена хорошо; б) время определено лучше, частота определена хуже; в) время определено хорошо, частота определена плохо; г) время определено очень хорошо, частота определена очень плохо

и частота определена очень плохо. В этом случае функция $g(\omega)$, определяемая (18b), задана в большом интервале частот. Частота, связанная с процессом, и момент времени, в котором он происходит, не могут быть определены с произвольной точностью. Неопределенность $\Delta\omega$ в частоте и неопределенность Δt в моменте времени связаны соотношением

$$\Delta\omega \Delta t \geq 1, \quad (18c)$$

которое также носит название соотношения неопределенностей. Причина возникновения этого соотношения совершенно аналогична причине появления соотношения неопределенностей для координаты и импульса. Эти идеи иллюстрируются рисунком 18А.

19. Напомним, что в п. 20—23 гл. 3 мы обсуждали вопрос о связи между средним временем τ жизни возбужденного состояния и конечной шириной ΔE соответствующего у овня энергии. Мы пришли к выводу, что ширина ΔE обратно пропорциональна среднему времени τ . Рассмотрим эту связь с точки зрения соотношения неопределенностей для времени и частоты.

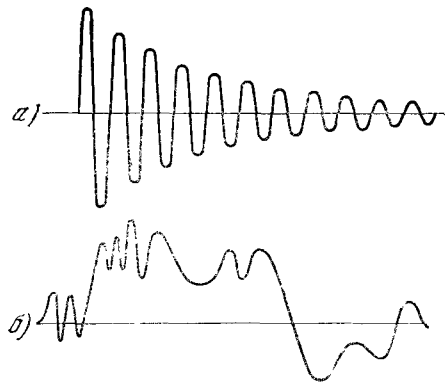


Рис. 19А. а) Колебания экспоненциально затухающего гармонического осциллятора; б) интуиция подсказывает нам, что частота для такого процесса определена гораздо лучше, чем для «нерегулярного» процесса. Разумно предположить, что в случае а) неравенство в соотношении неопределенностей можно заменить приближенным равенством

Предположим, что распад системы заключается в переходе из возбужденного состояния в основное, сопровождающемся испусканием фотона. В этом случае неопределенность в частоте фотона равна $\Delta\omega = \Delta E/\hbar$, если ΔE — ширина возбужденного уровня. Продолжительность процесса испускания имеет порядок среднего времени τ , и неопределенность в моменте испускания также порядка τ . Имея в виду (18с), можно написать

$$\tau \cdot \Delta\omega \approx 1 \quad \text{или} \quad \tau \cdot \Delta E \approx \hbar. \quad (19a)$$

Мы написали приближенное равенство вместо неравенства. В данном случае мы имеем дело как бы с экспоненциально затухающим гармоническим осциллятором, амплитуда колебаний которого схематически показана на рис. 19А. Временная зависимость амплитуды в этом случае больше похожа на амплитуду a на рис. 18А, для которой неопределенности в частоте и времени достигают крайних значений, чем на амплитуду b на рис. 18А, для которой как время, так и частота известны весьма грубо.

В п. 20—23 гл. 3 мы получили соотношение (19а) с помощью рассуждений, которые могут казаться отличными от приведенных здесь. Вдумавшись в проблему, читатель, однако, обнаружит, что между основными идеями обоих выводов нет существенного различия. Рассуждения, приведенные в гл. 3, можно назвать «замаскированным фурье-анализом».

Измерения и статистические ансамбли

20. Оставшуюся часть главы мы посвятим проблеме измерений в физике. Для этого подвергнем анализу с точки зрения известных нам законов некоторые простые физические ситуации. Нашей целью является выяснение характерных особенностей квантовомеханического мышления, а отнюдь не полная теория измерений. Физические измерения чрезвычайно разнообразны по своей природе, и