

ником, расположенным левее экрана  $S_1$ . Предположим, что интенсивность источника такова, что через щель в  $S_1$  каждую секунду проходит один электрон. Если интенсивность  $I(\theta)$ , наблюдаемую счетчиком  $D$ , выражать через число электронов в единицу времени, то

$$\text{Av}[D(\theta); \rho] = I(\theta). \quad (40a)$$

В п. 27 мы рассматривали вначале интенсивность  $I(\theta; \rho)$  от гипотетического источника, испускающего электроны со строго определенным значением импульса  $\rho$ . Обозначим статистический ансамбль для такого источника через  $\rho(p)$ . В этом случае

$$\text{Av}[D(\theta; \rho(p))] = I(\theta; \rho). \quad (40b)$$

Мы указывали, что если источником электронов служит накаливаемая нить с ускоряющим электродом, то электроны, проходящие через щель в  $S_1$ , *не могут* иметь точно определенного импульса. [Мы можем, конечно, изготовить весьма монохроматический источник, воспользовавшись каким-нибудь «фильтром импульсов». Такому источнику, дающему электроны с очень малым разбросом импульсов, отвечает ансамбль  $\rho(p)$ .] Обозначим статистический ансамбль, соответствующий простому источнику с нитью и электродом, через  $\bar{\rho}$ . В соответствии с рассуждениями п. 29,

$$\text{Av}[D(\theta; \bar{\rho})] = \bar{I}(\theta) = \frac{1}{2q} \int_{\rho_0 - q}^{\rho_0 + q} dp \text{Av}[D(\theta; \rho(p))]. \quad (40c)$$

Сравним это выражение с выражением (39c). Очевидно, что ансамбль  $\bar{\rho}$ , соответствующий «реальному» источнику электронов, можно считать некогерентной суперпозицией идеальных источников, соответствующих ансамблям  $\rho(p)$ . Другими словами, по аналогии с (39b) мы имеем

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2q} \int_{\rho_0 - q}^{\rho_0 + q} dp \rho(p). \quad (40d)$$

## Амплитуды и интенсивности

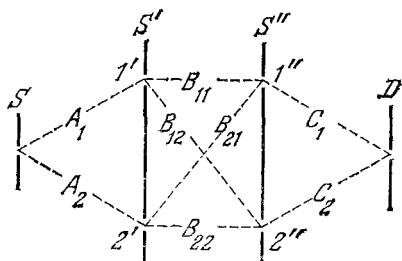
41. Различие между когерентной и некогерентной суперпозициями можно выразить следующим образом: в первом случае происходит сложение *амплитуд*, во втором — сложение *интенсивностей*.

Рассмотрим квантовомеханические представления об амплитудах и интенсивностях. На рис. 41А показана схема опыта с двумя расположенными рядом экранами, каждый из которых содержит две щели. Пусть частицы, проходящие через щель в экране  $S$ , имеют определенный импульс и их интенсивность равна одной частице в секунду. Мы наблюдаем поток частиц через остальные пять щелей, каждый раз помещая счетчик непосредственно за *одной* из них. Если измеренное для данной щели число отсчетов равно  $P$  частиц

в секунду, мы говорим, что  $P$  пропорционально вероятности того, что частица, проходящая через щель в  $S$ , проходит через рассматриваемую щель.

Предположим, что длина волны частицы велика по сравнению с шириной щели и что ширина всех щелей одинакова. В этом случае мы можем говорить о комплексной амплитуде волны в щели.

Рис. 41А. Идеализированный опыт с двумя двойными щелями (п. 41—43). Частицы (фотоны) выходят из щели в  $S$ . Нас интересуют вероятности прохождения частиц через остальные щели, в частности через щель в  $D$ . Для каждой щели мы должны складывать амплитуды волн, а не их интенсивности. Комплексными числами  $A_m, B_{mn}, C_m$  обозначены амплитуды перехода между щелями. Все интересующие нас вероятности выражаются через эти амплитуды



42. Пусть  $A_1$  — амплитуда волны в щели  $1'$ , когда амплитуда волны в щели  $S$  равна единице. Аналогично,  $A_2$  — амплитуда волны в щели  $2'$  при том же условии. Пусть  $B_{11}$  — амплитуда волны в щели  $1''$ , когда амплитуда в щели  $1'$  равна единице, но амплитуда в щели  $2'$  равна нулю. Аналогично,  $B_{21}$  — амплитуда волны в щели  $1''$ , когда амплитуда в щели  $1'$  равна нулю, но амплитуда в щели  $2'$  равна единице. Через  $C_1$  обозначим амплитуду в щели экрана  $D$ , когда амплитуда в щели  $1''$  равна единице, а амплитуда в щели  $2''$  равна нулю. Остальные амплитуды определены аналогичным образом. Назовем их амплитудами перехода, потому что они описывают распространение волн через щели слева направо. Эти переходы обозначены на рис. 41А штриховыми линиями. С каждой такой линией связана своя амплитуда перехода.

Амплитуды перехода являются комплексными числами. Квадрат их модуля определяет вероятность перехода следующим образом:  $P'_1 = |A_1|^2$  равно вероятности того, что частица, прошедшая через щель в  $S$ , будет зарегистрирована непосредственно за щелью  $1'$ ;  $P'_2 = |A_2|^2$  равно вероятности регистрации частицы, прошедшей через щель в  $S$ , за щелью  $2'$ ;  $P_{12} = |B_{12}|^2$  равно вероятности того, что частица, прошедшая через щель  $1'$ , пройдет и через щель  $2''$ . В этом случае щель  $2'$  должна быть закрыта, чтобы быть уверенным в том, что частица действительно прошла через щель  $1'$ . Квадрат модуля остальных амплитуд перехода имеет аналогичный смысл. Перечислим все вероятности перехода, соответствующие восьми амплитудам:

$$\begin{aligned} P'_1 &= |A_1|^2, & P'_2 &= |A_2|^2, & P_{11} &= |B_{11}|^2, & P_{12} &= |B_{12}|^2, \\ P_{21} &= |B_{21}|^2, & P_{22} &= |B_{22}|^2, & P''_1 &= |C_1|^2, & P''_2 &= |C_2|^2. \end{aligned} \quad (42a)$$

Читателю следует тщательно обдумать, как можно измерить эти вероятности со счетчиками, закрывая, если это необходимо, некоторые щели.

43. Зададим теперь следующий вопрос: пусть все щели открыты; чему в этом случае равна вероятность  $P$  того, что частица, пройдя через щель в  $S$ , пройдет через щель в  $D$ ?

Без долгих размышлений скажем: так как нам известны вероятности перехода через щели, то найдем  $P$ , например, комбинируя эти вероятности по правилам теории вероятностей. Вероятность того, что частица пройдет через щель  $I''$ , была бы равна сумме вероятностей ее прохождения от щелей  $I'$  и  $2'$  к щели  $I''$ . Иными словами, она равна  $P_1'P_{11} + P_2'P_{21}$ . Такой способ рассуждения привел бы нас к неверному результату:

$$P = \frac{(P_1'P_{11} + P_2'P_{21})P_{11}'' + (P_1'P_{12} + P_2'P_{22})P_{22}''}{1} \quad (\text{неверно!}) \quad (43a)$$

Теперь напишем верный ответ:

$$P = |(A_1B_{11} + A_2B_{21})C_1 + (A_1B_{12} + A_2B_{22})C_2|^2. \quad (43b)$$

Он, разумеется, отличается от выражения (43a). В каждой щели следует складывать *амплитуды* приходящих к щели волн, так как волны интерферируют. Выражение (43b) — это верный ответ, согласующийся с квантовой механикой, тогда как выражение (43a) — лишь предсказание, следующее из классической теории.

44. *Вопрос:* как найти  $P$ , если нам известны лишь вероятности, а не амплитуды переходов? *Ответ:* это вообще невозможно сделать. Чтобы найти  $P$ , нужно знать как фазы, так и абсолютные значения комплексных амплитуд перехода, но вероятности перехода дают нам лишь абсолютные значения амплитуд.

Обсудим более подробно, в чем ошибка предположения о «сложении вероятностей», которое привело к неверному результату (43a). Рассмотрим величину  $P_1'P_{11}$ . Что она дает? Очевидно, вероятность того, что частица, прошедшая через щель в  $S$ , проходит через щель  $I'$ , когда щель  $2'$  закрыта. Аналогично,  $P_2'P_{21}$  соответствует вероятности, что частица, прошедшая через щель в  $S$ , пройдет через щель  $I''$ , когда закрыта щель  $I'$ . Если обе щели  $I'$  и  $2'$  открыты, то вероятность того, что частица, прошедшая через щель в  $S$ , пройдет через щель  $I''$ , не равна сумме  $P_1'P_{11} + P_2'P_{21}$ . Волны, приходящие к щели  $I''$  от щелей  $I'$  и  $2'$ , когерентны, и мы должны складывать *амплитуды*, а не *интенсивности*.

43. Рассмотрим немного измененный опыт (рис. 45A). Он отличается от рис. 41A тем, что в плечо, соединяющее щель в  $S$  с щелью  $I'$ , вставлено устройство, задерживающее фазу волны. В остальном оба прибора одинаковы. Единственным следствием задержки фазы будет замена амплитуды  $A_1$  амплитудой  $A_1 e^{i\theta}$ . Таким образом, фаза меняется на величину  $\theta$ , но амплитуда волны не меняется. Если опыт производится со светом, для изменения фазы можно использовать стеклянные пластины.

Обозначим через  $P(\theta)$  вероятность того, что частица, прошедшая через щель в  $S$ , пройдет через щель в  $D$  (все остальные щели откры-

ты). В соответствии с (43b)

$$P(\theta) = |A_1 e^{i\theta} (B_{11}C_1 + B_{12}C_2) + A_2 (B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 = \\ = |A_1 (B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + |A_2 (B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 + U \cos \theta + V \sin \theta, \quad (45a)$$

где

$$U = A_1 (B_{11}C_1 + B_{12}C_2) A_2^* (B_{21}^*C_1^* + B_{22}^*C_2^*) + \\ + A_1^* (B_{11}^*C_1^* + B_{12}^*C_2^*) A_2 (B_{21}C_1 + B_{22}C_2), \quad (45b)$$

$$V = i [A_1 (B_{11}C_1 + B_{12}C_2) A_2^* (B_{21}^*C_1^* + B_{22}^*C_2^*) - \\ - A_1^* (B_{11}^*C_1^* + B_{12}^*C_2^*) A_2 (B_{21}C_1 + B_{22}C_2)]. \quad (45c)$$

В справедливости этих формул читатель может убедиться сам. Выражение для  $P(\theta)$  можно записать в виде

$$P(\theta) = \frac{1}{2} [P(0) + P(\pi)] + \frac{1}{2} [P(0) - P(\pi)] \cos \theta + \\ + \frac{1}{2} \left[ 2P\left(\frac{\pi}{2}\right) - P(0) - P(\pi) \right] \sin \theta, \quad (45d)$$

откуда следует, что величина  $P(\theta)$  как функция  $\theta$  однозначно определяется своими значениями для трех углов  $\theta=0, \pi/2$  и  $\pi$ .

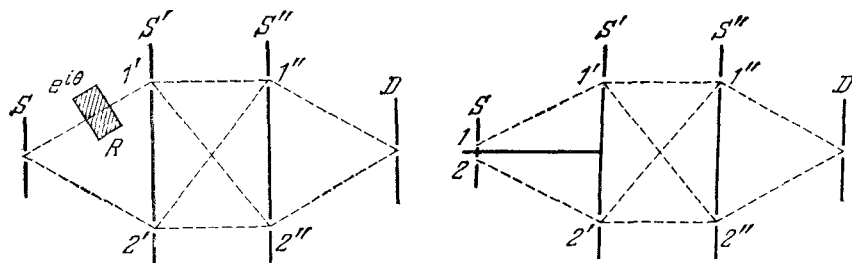


Рис. 45А. Модификация опыта, изображенного на рис. 41А. Между источником  $S$  и щелью  $1'$  установлен прибор, вызывающий запаздывание фазы. Он изменяет комплексную амплитуду волны в щели  $1'$  на множитель  $\epsilon^{i\theta}$ . Из теории опыта, показанного на рис. 41А, следует,

что в данном случае амплитуду  $A_1$  нужно заменить амплитудой  $A_1 \epsilon^{i\theta}$

Рис. 46А. Модификация опыта рисунка 41А с двумя двойными щелями. Щели  $1$  и  $2$  освещаются двумя независимыми источниками равной интенсивности. Волны от двух этих источников некогерентны, и для каждой щели интенсивность равна сумме интенсивностей, создаваемых в отдельности каждым источником. Между этим опытом и опытом, изображенным на рис. 45А, имеется интересная связь. Интенсивность, измеренная в данном опыте, является средним (по фазовому углу  $\theta$ ) значением соответствующей интенсивности, измеренной в опыте на рис. 45А. Об этом факте часто говорят, что некогерентные источники испускают волны со случайной разностью фаз

46. Теперь рассмотрим «прибор», показанный на рис. 46А. Мы имеем два *отдельных* источника  $1$  и  $2$ , освещающих щели  $1'$  и  $2'$  соответственно. Во всем остальном «прибор» такой же, как на рис. 41А. Пусть интенсивность обоих источников одинакова.

Какова вероятность  $P_i$  того, что частица, прошедшая через экран  $S$ , пройдет через щель в  $D$ ? Очевидно, что

$$P_i = \frac{1}{2} |A_1 (B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + \frac{1}{2} |A_2 (B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2. \quad (46a)$$

В этом случае, чтобы найти интенсивность, созданную на щели  $D$  при работе обоих источников, мы складываем *интенсивности*, созданные каждым источником в отдельности. Выражение  $|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2$  представляет собой вероятность того, что частица от источника 1 пройдет через щель в  $D$ ; выражение  $|A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2$  — вероятность частице из источника 2 пройти через щель в  $D$ . Для каждой частицы, проходящей через щель в  $D$ , вероятность прийти от источника 1 или 2 одна и та же; это объясняет появление коэффициента  $1/2$  в выражении (46а).

47. Обсудим дополнительные вопросы, возникающие в связи с рис. 45А и 46А. Будем считать экран  $S'$  со всем, что расположено от него слева, источником. В этом случае рис. 45А и 46А показывают один и тот же опыт, выполненный с двумя различными источниками. Возникает вопрос: какова вероятность  $P'(\theta)$  того (рис. 45А), что частица, пришедшая от экрана  $S'$ , пройдет через щель в  $D$ ? Поскольку каждая частица, прошедшая через щель в  $D$ , должна пройти через экран  $S'$ , то вероятность  $P'(\theta)$  должна быть равна отношению вероятности  $P(\theta)$ , следующей из формулы (45а), к вероятности того, что частица, вышедшая из щели в  $S$ , пройдет через экран  $S'$ . Последняя вероятность равна  $[|A_1|^2 + |A_2|^2]$ , и мы получаем

$$P'_i(\theta) = [|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + |A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 + U \cos \theta + V \sin \theta] [|A_1|^2 + |A_2|^2]^{-1}, \quad (47а)$$

что можно записать также в виде

$$P'(\theta) = \frac{1}{2} [P'(0) + P'(\pi)] + \frac{1}{2} [P'(0) - P'(\pi)] \cos \theta + \frac{1}{2} \left[ 2P' \left( \frac{\pi}{2} \right) - P'(0) - P'(\pi) \right] \sin \theta. \quad (47б)$$

Аналогичный вопрос можно поставить и для рис. 46А. Какова вероятность  $P'_i$  того, что частица, прошедшая через  $S'$ , пройдет через щель в  $D$ ? Легко видеть, что

$$P'_i = [|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + |A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2] [|A_1|^2 + |A_2|^2]^{-1}. \quad (47с)$$

Сравнивая выражения (47с) и (47а), замечаем интересную особенность: если  $P'(\theta)$  усреднить по всем углам  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ , то получим  $P'_i$ :

$$P'_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta P'(\theta). \quad (47д)$$

В действительности даже нет необходимости в таком усреднении, так как

$$P'_i = \frac{1}{2} [P'(0) + P'(\pi)]. \quad (47е)$$

Таким образом, можно считать статистический ансамбль, определяемый источником, показанным на рис. 46А (этим источником

является экран  $S'$  и все расположенное от него слева), некогерентной суперпозицией двух или бесконечного числа статистических ансамблей, каждый из которых определяется источником, показанным на рис. 45А, при  $\theta$ , рассматриваемом как переменный параметр. (Различные значения  $\theta$  отвечают различным источникам.)

48. Результат (47d) иллюстрирует общий принцип, касающийся некогерентной суперпозиции. Имея два некогерентных источника, можно начать с того, чтобы считать их когерентными и складывать амплитуды волн обоих источников, имея в виду, однако, множитель  $e^{i\theta}$ , соответствующий переменной относительной фазе. Вычисляем интересующую нас «интенсивность»  $I(\theta)$  в зависимости от угла  $\theta$  и, наконец, усредняем  $I(\theta)$  по всем углам  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ . Полученное таким образом среднее  $I$  и будет действительным средним для двух некогерентных источников. Два источника, относительная фаза которых случайна, некогерентны.

49. После этих упражнений с амплитудами, интенсивностями и вероятностями продолжим систематическое рассмотрение статистических ансамблей.

Совокупность всех статистических ансамблей, очевидно, состоит из двух совокупностей: ансамбли, которые можно рассматривать как некогерентные суперпозиции двух или большего числа отдельных статистических ансамблей, и ансамбли, которые нельзя представить в виде такой суперпозиции. Статистические ансамбли последнего типа называются *чистыми ансамблями* или *чистыми состояниями*. Все остальные ансамбли называются *смешанными ансамблями* или *статистической смесью*.

Рассмотрим смешанный ансамбль. Известно, что это некогерентная суперпозиция других ансамблей. Верно ли также, что подобный ансамбль есть некогерентная суперпозиция *чистых* ансамблей? Этот вопрос фактически касается природы *всех* физически реализуемых статистических ансамблей. Несомненно, возможен случай, когда совокупность всех физически реализуемых ансамблей не содержит *никакого* чистого ансамбля. В этом случае на наш вопрос следует отрицательный ответ. С другой стороны, мы должны считать *чистый ансамбль* предельным случаем смешанного и можем поэтому *увеличить* наш набор статистических ансамблей, включив в него не только все физически реализуемые ансамбли, но и все предельные случаи этих ансамблей. Если мы выполним эту чисто математическую абстракцию, то интуитивно можно ожидать, что наша расширенная совокупность ансамблей будет обладать тем свойством, что каждый статистический ансамбль представляет либо чистый ансамбль, либо некогерентную суперпозицию чистых ансамблей.

В дальнейшем мы используем это предположение. Как *физическое* предположение это идеализация: мы воображаем, что осуществление всех чистых ансамблей возможно, и рассматриваем другие ансамбли как статистическую смесь чистых ансамблей. На практике, может быть, и невозможно реализовать идею чистого ансамбля, но нет никаких причин, по которым нельзя было бы сколь угодно приблизиться к нему.