

возможный подход заключается в систематическом изучении различных волновых уравнений, допускающих разумную физическую интерпретацию, включая вероятностную интерпретацию, рассмотренную в п. 8. Мы хотим сохранить эту интерпретацию волновой функции для частицы, находящейся под действием сил. Можно показать, что уравнение (17а) в определенном смысле является простейшим волновым уравнением для квантовомеханических задач, которые «соответствуют» классическим задачам для частицы, движущейся в потенциальном поле $V(\mathbf{x})$. Подробное исследование этих проблем увело бы слишком далеко, и нам следует поэтому принять уравнение (17а) как рабочую гипотезу, основанную на высказанных выше соображениях.

18. Уравнение (17а) относится к волне, имеющей определенную энергию E . Для такой волны справедливо уравнение (16а), и (17а) можно переписать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t); \quad (18а)$$

здесь E отсутствует, и, таким образом, (18а) справедливо для любой энергии и, следовательно, для любой волны Шредингера.

Уравнения (17а) и (18а) представляют собой знаменитые уравнения Шредингера. Уравнение (18а) известно как *зависящее от времени уравнение Шредингера*, а уравнение (17а) — *уравнение Шредингера, не зависящее от времени*. Следует иметь в виду, что уравнение (18а) справедливо для *всех* волн Шредингера, тогда как (17а) выполняется только для волн, описывающих частицу с заданной энергией E .

Наилучшим подтверждением справедливости уравнений (17а) и (18а) является совпадение предсказаний, основанных на этих уравнениях, с опытом. Вскоре после великого открытия Шредингера его уравнения были с замечательным успехом применены ко многим областям атомной и молекулярной физики. Сам Шредингер принимал активное участие в этих исследованиях. В следующей главе мы познакомимся с тем, как он объяснял квазистабильные состояния атомов. Нельзя не восхищаться интуицией Шредингера, которая привела к уравнению (18а). Оно справедливо в пределах допущений, на которых основано.

В нашу задачу не входит рассмотрение общей теории решения уравнения (18а); мы ограничимся несколькими весьма простыми примерами, которые помогут понять, как это уравнение «работает».

Некоторые простые «барьерные» задачи

19. Предположив, что уравнения Шредингера (17а) и (18а) справедливы для любой потенциальной функции $V(\mathbf{x})$, мы при «выводе» уравнения (17а) имели, однако, дело со случаем, когда потенциал $V(\mathbf{x})$ везде меньше полной энергии E . Посмотрим теперь, что происходит в тех областях пространства, где потенциал $V(\mathbf{x})$ *больше* полной энергии E . Согласно классической механике, такие области

недоступны для частицы, но, как мы увидим, в квантовой механике возникает иная ситуация.

Для простоты ограничим наши рассуждения одномерным случаем: частица перемещается вдоль прямой, и ее положение определяется координатой x . Одномерная модель имеет то преимущество, что сводит не зависящее от времени уравнение Шредингера к обычному дифференциальному уравнению с одной независимой переменной. Математическое рассмотрение такого уравнения намного проще уравнения в частных производных, возникающего для двух- или трехмерного случая. В то же время существенные особенности явления сохраняются и в простой одномерной модели.

20. Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера (17а) для случая, когда энергия частицы $E > 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = [E - V(x)] \psi(x, t). \quad (20a)$$

Зависимость волновой функции $\psi(x, t)$ от времени определяется множителем $\exp(-itE/\hbar)$, и можно написать

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-itE/\hbar). \quad (20b)$$

Зависящая только от координаты часть волновой функции $\varphi(x)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (20а), т. е.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = [E - V(x)] \varphi(x). \quad (20c)$$

Решив его относительно $\varphi(x)$, получим с помощью (20b) шредингеровскую волновую функцию $\psi(x, t)$.

21. Рассмотрим теперь ситуацию, приведенную на рис. 21А, где жирной штриховой линией показана полная энергия E , а сплошная линия соответствует потенциальной функции $V(x)$. В левой части рисунка потенциал равен нулю, а в правой он имеет постоянное значение $V_0 > E$. Точка x_0 , где кинетическая энергия равна нулю, называется *точкой поворота*. Согласно классической механике, частица, достигнув этой точки, остановится и начнет движение в обратном направлении.

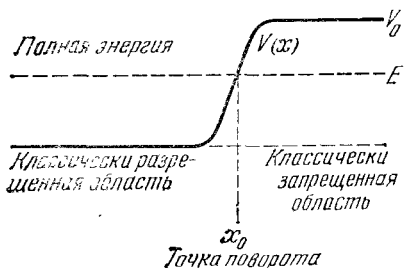


Рис. 21А. Сплошная линия соответствует потенциальной энергии $V(x)$, жирная штриховая линия — полной энергии E ; точка x_0 , в которой $V(x) = E$, — классическая точка поворота. В квантовой механике частица имеет конечную вероятность находиться в классически запрещенной области

Согласно классической механике, частица, достигнув этой точки, остановится и начнет движение в обратном направлении. Область справа от x_0 недоступна для классической частицы.

Мы должны решить уравнение (20с) для потенциала, показанного на рис. 21А. Решением $\varphi(x)$ должна быть непрерывная функция от x , имеющая непрерывную первую производную. И без явного решения приведенного уравнения можно догадаться, что волновая функция $\varphi(x)$ не может сразу обращаться в нуль справа от x_0 .

В соответствии с вероятностным истолкованием волновой функции, это означает отличную от нуля вероятность обнаружить частицу в области справа от x_0 . Таким образом, квантовая механика предсказывает, что частица может проникать в область, запрещенную классической механикой.

22. Рассмотрим это явление более подробно. Чтобы еще больше упростить ситуацию, заменим потенциал на рис. 21А ступенчатой функцией на рис. 22А, а начало координат поместим в точку поворота, так что $x_0 = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \text{ для } x < 0, \\ V(x) &= V_0 > E \text{ для } x > 0. \end{aligned} \quad (22a)$$

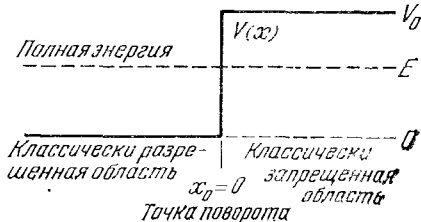


Рис. 22А. Чтобы упростить вычисления, непрерывный потенциал на рис. 21А заменен ступенчатым

Потенциал, показанный на рис. 22А, можно считать предельным случаем потенциала, изображенного на рис. 21А. Если этот потенциал растет все более и более круто, то в пределе получается идеализованная ситуация, показанная на рис. 22А. Пока потенциал является непрерывной функцией, волновая функция остается непрерывной и имеет непрерывную первую производную. Это свойство сохраняется и в предельном случае ступенчатого потенциала. Однако в последнем случае *вторая* производная волновой функции может испытать «скачок». Заметим, что все эти утверждения о поведении волновой функции и ее производных являются *математическими* утверждениями о свойствах дифференциальных уравнений, возникающих в теории Шредингера. Как физики, мы должны считать ступенчатый потенциал идеализацией реального потенциала. При такой точке зрения не возникает сомнения в том, что физическая волновая функция должна удовлетворять перечисленным выше требованиям.

23. Обратимся к области $x > 0$. Здесь волновое уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = (E - V_0) \varphi(x), \quad (23a)$$

и мы без труда можем написать два линейно независимых решения:

$$\exp(-xq), \quad \exp(+xq), \quad \text{где } q = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}. \quad (23b)$$

Решение $\exp(+xq)$ растет экспоненциально с ростом x , то же происходит и с квадратом его модуля. Согласно нашей вероятностной интерпретации волновой функции, такой рост означает, что плотность вероятности обнаружения частицы неограниченно растет с ростом координаты x . Это решение физически неприемлемо. Здесь мы имеем другой пример граничных условий, которым должно удовлетворять решение волнового уравнения, имеющее физический смысл: решение, неограниченно возрастающее на бесконечности, должно быть отброшено. Таким образом, остается единствен-

но возможное решение $\exp(-ixq)$, и если мы обозначаем волновую функцию в области $x > 0$ через $\varphi_R(x)$, то

$$\varphi_R(x) = \exp(-ixq). \quad (23c)$$

24. Рассмотрим область $x < 0$. Здесь уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = E\varphi(x). \quad (24a)$$

Два линейно независимых решения уравнения (24a) могут быть записаны в форме

$$\exp(ixk), \quad \exp(-ixk), \quad \text{где } k = \sqrt{2mE/\hbar^2}; \quad (24b)$$

они представляют собой осциллирующие функции и не возрастают при x , стремящемся к $-\infty$. Оба решения физически приемлемы*), и, обозначая через $\varphi_L(x)$ волновую функцию в области слева от $x=0$, имеем

$$\varphi_L(x) = A \exp(ixk) + B \exp(-ixk), \quad (24c)$$

где A и B — постоянные, которые нам предстоит найти.

Мы утверждали, что волновая функция и ее первая производная должны быть непрерывны. Таким образом, функции $\varphi_R(x)$ и $\varphi_L(x)$ должны быть подогнаны друг к другу так, чтобы

$$\varphi_R(0) = \varphi_L(0), \quad \varphi'_R(0) = \varphi'_L(0). \quad (24d)$$

Действительно, обе эти функции представляют собой одну волновую функцию, заданную в двух различных областях, которые соединяются в точке поворота $x=0$. Два условия (24d) дают два уравнения:

$$A + B = 1, \quad ik(A - B) = -q, \quad (24e)$$

решая которые можно определить постоянные A и B :

$$A = \frac{1 + iq/k}{2}, \quad B = \frac{1 - iq/k}{2}. \quad (24f)$$

25. Нам будет легче интерпретировать полученное решение, умножив волновую функцию на коэффициент $1/A$. Такое умножение возможно, ибо уравнение Шредингера — линейное уравнение. Итак, явное выражение для полученного решения имеет вид

$$\varphi(x) = e^{ixk} + \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} e^{-ixk} \quad \text{для } x < 0, \quad (25a)$$

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-xq}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} \quad \text{для } x > 0, \quad (25b)$$

где

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}, \quad q = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}. \quad (25c)$$

*) Если читатель удивлен этим утверждением, то советуем ему обратиться к п. 51 настоящей главы.

Рассмотрим теперь выражение (25а), определяющее волновую функцию в области $x < 0$. Она образована суперпозицией двух волн. Первое слагаемое $\exp(ikx)$ соответствует волне, распространяющейся *вправо*, а второе, пропорциональное $\exp(-ikx)$, — волне, бегущей *влево*. Множитель перед экспонентой во втором слагаемом имеет модуль, равный единице:

$$\left| \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} \right| = 1, \quad (25d)$$

поэтому амплитуды обеих волн равны по модулю. Квадрат модуля амплитуды пропорционален «потoku» частицы, и, таким образом, волновая функция (25а) описывает положение, характерное тем,

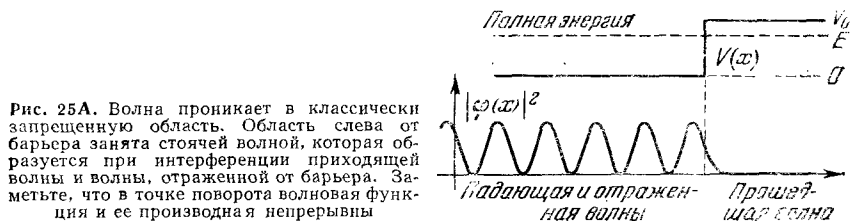


Рис. 25А. Волна проникает в классически запрещенную область. Область слева от барьера занята стоячей волной, которая образуется при интерференции входящей волны и волны, отраженной от барьера. Заметьте, что в точке поворота волновая функция и ее производная непрерывны

что частица, пришедшая слева, отражается от скачка потенциала и уходит влево. Такая интерпретация находится в согласии с классической картиной.

Волновая функция для $x > 0$ [уравнение (25b)] описывает проникновение шредингеровской волны в область, запрещенную для классической частицы. Амплитуда такой волны экспоненциально уменьшается по мере проникновения в запрещенную область, и на больших расстояниях от барьера амплитуда практически равна нулю, в согласии с классической картиной. Рис. 25А иллюстрирует эти утверждения.

26. Интересно рассмотреть предельный случай, когда высота потенциального барьера стремится к бесконечности, т. е. когда $V_0 \rightarrow +\infty$ (энергия E не меняется). Из выражений (25с) следует, что при неограниченном возрастании V_0 величина q также стремится к бесконечности, что означает бесконечно быстрое уменьшение амплитуды волновой функции по мере увеличения глубины проникновения (от классической точки поворота). По мере увеличения высоты барьера волновая функция все меньше и меньше проникает в запрещенную область. Из (25b) следует, что амплитуда прошедшей волны стремится к нулю, если V_0 стремится к бесконечности. В предельном случае бесконечно высокого барьера

$$\varphi(x) = e^{ikx} + e^{-ikx} \quad \text{для } x < 0, \quad (26a)$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{для } x > 0. \quad (26b)$$

Итак, при бесконечно высоком потенциальном барьере волновая функция должна исчезать у барьера, т. е. при $x=0$, и справа от него, т. е. при $x > 0$.

На рис. 26А показано поведение квадрата модуля волновой функции, т. е. плотность вероятности обнаружения частицы. Заметим, что слева от барьера плотность вероятности испытывает осцилляции, которые представляют собой квантовомеханический интерференционный эффект, не имеющий аналога в классической механике. Такое же явление, естественно, видно и на рис. 25А.

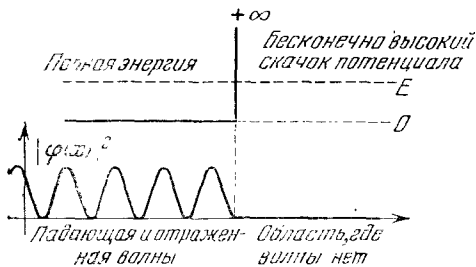


Рис. 26А. Предельный случай бесконечно большого скачка потенциальной энергии (ср. с рис. 25А). В точке поворота в нуль обращается волновая функция, производная квадрата волновой функции, но не производная самой волновой функции

27. Мы столь подробно рассмотрели случай внезапного скачка потенциала, чтобы показать существование решения уравнения Шредингера и его физическую интерпретацию. Можно быть уверенным, что решение существует и в более общем случае разумно непрерывного или составленного из отдельных скачков потенциала. Разумеется, не всегда легко найти явный вид решения, но возникающие трудности имеют чисто математический, вычислительный характер. Даже не имея точного решения, часто можно сказать очень много о его свойствах и получить, таким образом, сведения о поведении физической системы. Так, например, изучение свойств волновой функции привело нас к выводу, что шредингеровская волна может проникать в области, запрещенные для частицы классической механикой.

28. Чтобы расширить наше понимание уравнения Шредингера, рассмотрим рис. 28А, где показан внезапный скачок потенциала. Мы хотим изучить движение частицы с энергией $E > V_0$ в таком поле. (Подробное изучение этой ситуации мы оставляем для задачи I в конце главы.)

Читатель заметит, что в области слева от скачка потенциала существуют два возможных решения и столько же решений имеется для области справа от скачка. Но как узнать, какое из решений следует избрать? Это зависит от исследуемой физической ситуации. Допустим, что частица падает на барьер, двигаясь слева направо. Волна частично отразится от барьера, но часть будет продолжать распространяться в прежнем направлении. Это означает, что правильная волновая функция нашей задачи должна соответствовать частице, движущейся направо в область $x > 0$, т. е. должна иметь там вид $\exp(ikx)$. В области слева от скачка потенциала волновая функция будет иметь вид

$$A \exp(ikx) + B \exp(-ikx),$$

где первое и второе слагаемые отвечают соответственно волнам, бегущим слева направо и справа налево. Второе слагаемое соот-

ветствует *отраженной* волне, а первое — *проходящей*. Как найти коэффициенты A и B ? Для этого следует использовать два условия: непрерывность волновой функции и ее производных во всех точках, в том числе и в точке $x=0$. Таким образом получаем два уравнения для двух неизвестных A и B . Найдя амплитуды A и B , будем знать интенсивности падающей, отраженной и прошедшей волн, а тем самым и коэффициент отражения рассматриваемого «барьера».

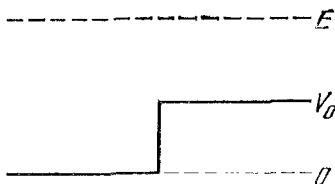


Рис. 28А. Энергия E частицы больше высоты потенциального барьера. В классической теории частица проходит такой барьер не отражаясь. В квантовой механике часть падающей волны проходит, другая часть отражается барьером

Допустим, что имеет место другая ситуация: частица движется справа налево. В таком случае волновая функция слева от барьера будет иметь вид $\exp(-ixk)$, так как в этой области мы имеем лишь волну, распространяющуюся влево. Справа от барьера волновая функция имеет вид $A'\exp(ixk') + B'\exp(-ixk')$. Снова найдем коэффициенты A' и B' из условий непрерывности волновой функции

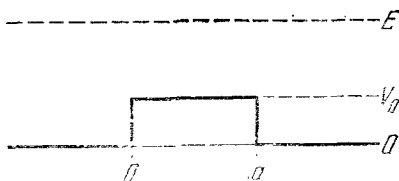


Рис. 29А. Для решения этой задачи следует рассмотреть многократные отражения и прохождения волны в точках разрыва непрерывности $x=0$ и $x=a$. Более простой способ — найти общее решение уравнения Шредингера и удовлетворить граничным условиям. При этом отпадает необходимость рассматривать многократные отражения

и ее производной в точке $x=0$. Таким образом, при заданной форме потенциала выбор волновой функции зависит от рассматриваемой задачи.

Отметим главный вывод из рассмотрения движения частицы в потенциальном поле, показанном на рис. 28А: в месте разрыва непрерывности потенциала происходит частичное отражение падающей волны и частичное ее проникновение в область за разрывом.

29. Обратимся теперь к случаю, показанному на рис. 29А. Разрыв непрерывности потенциала происходит в *двух* точках: $x=0$ и $x=a$. Из рассуждений предыдущего пункта следует, что в данном случае будет происходить частичное отражение и частичное прохождение волны в обеих точках.

Предположим, что мы хотим рассмотреть случай, когда частица падает на барьер слева. Читатель поймет, что это сложная ситуация. Рассмотрим волну, падающую слева, и обнаружим, что в точке $x=0$ часть волны отразится, а другая часть пройдет. Прошедшая волна натолкнется на второй разрыв потенциала в точке $x=a$ и здесь частично отразится, а частично пройдет. Отраженная волна вернется в точку $x=0$, и снова произойдет частичное отражение и прохождение. Чтобы найти волну, распространяющуюся направо

от барьера, мы должны рассмотреть бесконечное число отражений в точках $x=0$ и $x=a$ и сложить амплитуды всех волн, распространяющихся направо от точки $x=a$.

Можем ли мы решить эту задачу? Да, можем «методом многократных отражений», но есть и значительно более простой способ ее решения. Для этого следует лишь найти такое решение уравнения Шредингера, которое всюду было бы непрерывно вместе со своей

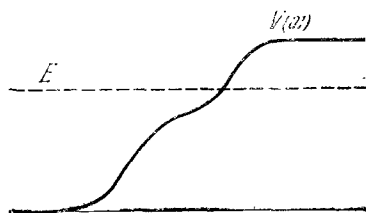


Рис. 30А. Частица (волна) отражается барьером, так как энергия E меньше предельного значения потенциала справа. Отражение происходит в области изменения потенциальной энергии

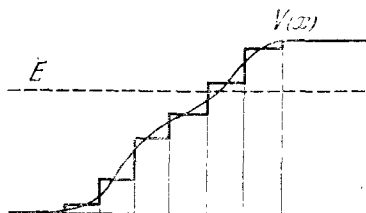


Рис. 30В. Потенциал на рис. 30А заменен потенциалом, изменяющимся скачками. В каждой точке разрыва непрерывности волна частично проходит и частично отражается. Решение уравнения Шредингера учитывает все «многократные отражения»

первой производной и имело бы вид $\exp(ikx)$ для $x>a$. Последнее условие, в соответствии с рассматриваемой физической ситуацией, означает, что часть падающей волны, прошедшая сквозь барьер, распространяется от точки $x=a$ направо.

Таким образом, для $x>a$ волновая функция имеет вид $\exp(ikx)$. Для $a>x>0$ волновая функция имеет вид

$$A \exp(ikx) + B \exp(-ikx).$$

Чтобы найти коэффициенты A и B , нужно воспользоваться условием непрерывности волновой функции и ее первой производной в точке $x=a$. В области $0>x$ волновая функция имеет вид

$$A' \exp(ikx) + B' \exp(-ikx),$$

и для определения A' и B' нужно использовать те же условия непрерывности, но в точке $x=0$. Таким способом мы найдем *полное решение* уравнения Шредингера (20с), отвечающее условиям рис. 29А, и найденное решение будет *единственным* (с точностью до постоянного множителя). Таким образом, нашу задачу можно решить без больших усилий.

30. Важно понять, что решение барьерной задачи рассмотренного типа сводится к получению решения уравнения Шредингера (20с), пригодного *во всем пространстве* и удовлетворяющего *граничным условиям*, определяемым физической ситуацией, например условию, что справа от барьера волна должна иметь вид $\exp(ikx)$. Такой способ получения решения автоматически учитывает «многократные отражения», о которых мы рассуждали, основываясь на физической интуиции. Нашу задачу можно попытаться решить,

рассматривая многократные отражения, но *гораздо проще* непосредственно найти общее решение уравнения Шредингера.

Рассмотрим потенциальный барьер, показанный на рис. 30А. Где должно произойти отражение частицы? Оно «происходит» во всей области пространства, в которой меняется потенциал. При желании непрерывно меняющийся потенциал $V(x)$ можно аппроксимировать функцией с большим числом малых скачков, как показано на рис. 30В. На каждом скачке потенциала волна частично проходит и частично отражается, и мы снова можем считать, что имеем дело с «задачей о многократном отражении». Уравнение Шредингера (20с) описывает все эти многократные отражения, и его решение можно при желании интерпретировать таким образом: найдя общее решение уравнения Шредингера (20с), мы сразу учтем все бесконечное число локальных отражений и прохождений.

31. Рассмотрим теперь другую задачу, которая следует из предыдущей. Что происходит, если потенциал имеет вид, показанный на рис. 31А, а высота барьера V_0 больше полной энергии E ?

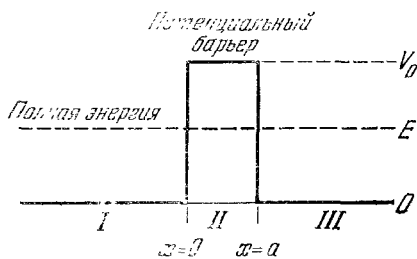


Рис. 31А. В классической теории частица, пришедшая слева, не может пройти через барьер. В квантовой механике у частицы имеется конечная вероятность «просочиться через барьер». Это явление называется «туннельным эффектом»

Ответ легко угадать: волна, падающая слева, частично отразится, а частично сможет пройти через барьер в область III. С классической точки зрения частица, находившаяся в области I, отразится в точке $x=0$ и не сможет пройти в области II и III. Согласно квантовой механике, частица может «просочиться через барьер», абсолютно непрозрачный с классической точки зрения; это одна из наиболее замечательных особенностей квантовой механики. Рассматриваемое явление называется *туннельным эффектом*.

Чтобы получить решение уравнения Шредингера для ситуации, показанной на рис. 31А, можно поступить так, как рекомендовалось в п. 28—30. Найдем общее решение для каждой из трех областей I, II и III, а затем используем условия непрерывности волновой функции и ее первой производной во всем пространстве и, в частности, в точках $x=0$ и $x=a$. Таким образом, барьерная задача, показанная на рис. 31А, в принципе нетрудна, но требует некоторых трудоемких вычислений. К счастью, можно постичь ее существенные особенности и без таких вычислений. (С ними можно познакомиться в более подробном курсе или выполнить эту задачу в качестве домашнего задания, см. также задачу 2.)

32. Рассмотрим решение для частного случая, когда частица падает на барьер слева. Она частично отражается барьером, час-

тично «просачивается» через него. Это означает, что в области III решение имеет вид $\exp(ixk)$, соответствующий частице, движущейся направо. В области I мы имеем обязательно две волны: одна распространяется влево, другая направо. Первая из них является отраженной волной, а вторая — падающей. Таким образом, волновая функция в области I имеет вид

$$\varphi(x) = e^{ixk} + Ae^{-ixk}, \text{ где } k = \sqrt{2mE/\hbar^2}; \quad (32a)$$

здесь A — постоянная, определяющая амплитуду отраженной волны. Модуль A меньше единицы, так как часть падающей волны проникает через барьер.

Внутри барьера волновая функция имеет вид экспоненты

$$\varphi(x) \approx B \exp(-xq), \quad q = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}; \quad (32b)$$

здесь B — постоянная. Эта волновая функция является лишь приближением, которое, однако, справедливо для не слишком низкого барьера.

Допустим, что aq велико по сравнению с единицей. В таком случае отношение $\varphi(a)/\varphi(0) \approx \exp(-aq)$ для волновой функции (32b) будет малым числом. Вспомнив процесс согласования двух решений в точке поворота, рассмотренный в п. 24, мы поймем, что модуль отношения амплитуд в областях III и I должен быть близок к отношению $\varphi(a)/\varphi(0) = \exp(-aq)$. В действительности это отношение не исчерпывается простым экспоненциальным множителем, но если $aq \gg 1$, т. е. если барьер высок и широк, то экспоненциальный множитель является определяющим.

33. Мы считали, что амплитуда падающей волны равна единице. В области III амплитуда волны гораздо меньше. Ее величина (точнее — порядок величины) приближенно равна $\exp(-aq)$. Квадрат T модуля амплитуды имеет простую физическую интерпретацию. Он равен вероятности того, что падающая на барьер частица пройдет через него:

$$T = |\varphi(a)|^2 \sim \exp(-2aq), \quad (33a)$$

или, имея в виду второе выражение (32b),

$$T \sim \exp \left\{ -2a \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \right\}. \quad (33b)$$

Величина T называется коэффициентом пропускания барьера. Наша грубая оценка этого коэффициента [формула (33b)] основана на весьма простом факте, а именно на приблизительно экспоненциальном уменьшении амплитуды волны справа в области барьера. Нас интересовал прежде всего случай большого aq , т. е. малого коэффициента пропускания T . Можно, разумеется, вычислить точное значение T ; тогда в выражении (33b) появляется дополнительный множитель. Порядок величины T определяется, однако, экспонентой, и для наших целей выражения (33b) совершенно достаточно.

На рис. 33А схематически показан барьерный эффект. В верхней части рисунка приведен потенциал, а в нижней — модуль квадрата волновой функции. Прошедшая волна оказывается бегущей вправо волной с комплексной амплитудой. Модуль амплитуды есть величина постоянная, что и показано на рисунке.

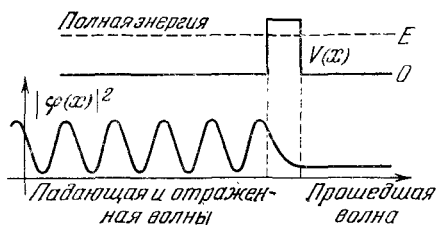


Рис. 33А. Схема, иллюстрирующая туннельный эффект. Обратите внимание на прошедшую волну и на ее экспоненциальное затухание в пределах барьера. Слева от барьера мы имеем несовершенную стоячую волну. Амплитуда отраженной волны меньше амплитуды падающей, и суммарная амплитуда нигде не обращается в нуль

34. Прежде чем перейти к физическим приложениям рассмотренной теории квантовомеханического туннельного эффекта, следует указать на его аналогию в классической электромагнитной теории. Речь идет об отражении плоской электромагнитной волны от плоской поверхности раздела двух сред с различными показателями преломления.

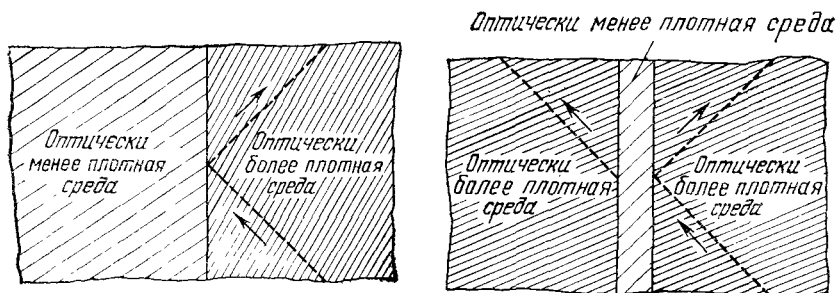


Рис. 34А. Полное отражение плоской электромагнитной волны на поверхности раздела двух сред с различными показателями преломления. Падающий и отраженный лучи показаны штриховыми линиями

Рис. 34В. Классическая электромагнитная теория предсказывает, что волна, падающая на тонкий слой под углом, большим критического угла полного отражения, частично проходит и частично отражается. Это явление аналогично квантовомеханическому туннельному эффекту. Падающий, прошедший и отраженный лучи показаны штриховыми линиями

Рассмотрим плоскую волну, падающую на границу, разделяющую две среды с различной оптической плотностью. Пусть волна (рис. 34А) падает из оптически более плотной среды в среду менее плотную, т. е. в среду с меньшим показателем преломления. Предположим, что угол падения больше угла полного отражения и что менее плотная среда простирается до бесконечности влево от поверхности раздела. В этом случае происходит полное отражение волны, схематически показанное на рис. 34А, где штриховой линией показан «луч», т. е. нормаль к плоскому фронту волны. Несмотря на то, что волна не может проникнуть в менее плотную среду, элек-

трическое поле вблизи от поверхности раздела не равно нулю: поле в эту среду проникает, но по мере перехода влево от поверхности раздела амплитуда поля экспоненциально уменьшается. Ситуация полностью аналогична квантовомеханической задаче, рассмотренной в п. 22—25.

Обратимся теперь к рис. 34В. Здесь оптически менее плотная среда представляет собой тонкий слой между двумя более плотными средами. В этом случае волна, падающая на границу справа, *частично* отражается, но малая доля волны все же проникает через «запрещенную область» и распространяется в более плотной среде в виде бегущей влево волны. Ситуация аналогична квантовомеханическому проникновению через барьер. Заметим, что мы не нарисовали «лучей» в запрещенной области. Действительно, здесь «лучевая оптика» неприменима: волновой вектор имеет комплексное значение.

Рассмотренное явление полностью объясняется классической электромагнитной теорией. В ситуации, показанной на рис. 34В, коэффициент прохождения очень мал, если толщина оптически менее плотной среды намного больше длины волны падающего излучения. При уменьшении толщины коэффициент прохождения возрастает, достигая значения, равного единице, при толщине, стремящейся к нулю.

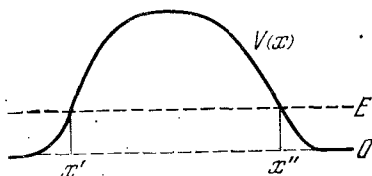


Рис. 35А. Как получить выражение для коэффициента пропускания такого барьера?

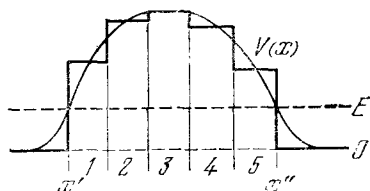


Рис. 35В. К выводу приближенного выражения для коэффициента пропускания барьера (рис. 35А). Заменяем непрерывно меняющийся потенциал приближением из ряда ступенчатых барьеров. Полный коэффициент пропускания равен произведению коэффициентов пропускания для всех ступенчатых барьеров. Отметим приближенный характер этого метода — не учтены многократные отражения

35. Обобщим наши рассуждения о квантовомеханическом туннельном эффекте. Вместо показанного на рис. 31А прямоугольного потенциального барьера рассмотрим барьер произвольной формы (рис. 35А). Пусть слева на барьер падает волна с энергией E . Волна частично отразится, частично пройдет через барьер. Нас интересует прежде всего полный коэффициент пропускания барьера, и, чтобы найти его точное значение, нужно решить уравнение Шредингера для потенциала $V(x)$. Воспользовавшись методом, рассмотренным в п. 32 и 33, можно, однако, получить приближенное выражение для T . Такое приближение тем лучше, чем меньше длина волны по сравнению с шириной барьера.

Чтобы получить приближенное значение величины T , вообразим, что область потенциального барьера разделена на несколько малых областей, как показано на рис. 35В. Заменяем в каждой ма-

лой области реальный потенциал $V(x)$ постоянным потенциалом. Мы уже вычисляли коэффициент пропускания прямоугольного барьера. Пусть коэффициенты пропускания пяти прямоугольных барьеров, показанных на рис. 35В, равны T_1, T_2, \dots, T_5 . Полный коэффициент пропускания приблизительно равен произведению коэффициентов пропускания малых областей:

$$T \approx T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \quad (35a)$$

или

$$\ln T = \ln T_1 + \ln T_2 + \ln T_3 + \ln T_4 + \ln T_5. \quad (35b)$$

36. Вернемся к выражению (33b). Пусть dx_n — толщина одного прямоугольного барьера, а $V(x_n)$ — его высота. Коэффициент пропускания такого барьера равен

$$\ln T_n \approx -2 \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{2m[V(x) - E] / \hbar^2}. \quad (36a)$$

Из формулы (35b) следует, что логарифм коэффициента пропускания всего барьера получается суммированием по всем областям. Переходя к бесконечному пределу и заменяя сумму интегралом, получаем

$$\ln T \approx -2 \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}}. \quad (36b)$$

Не следует забывать, что это выражение для коэффициента пропускания является *приближенным*. Тем не менее приведенная формула очень полезна, так как дает правильное качественное описание явлений проникновения через барьер. Заметим, что пределами для написанного интеграла являются классические точки поворота x' и x'' .

Рассмотрим зависимость коэффициента пропускания от параметров, входящих в выражение (36b). Если остальные параметры фиксированы, то коэффициент пропускания тем меньше, чем больше масса частицы. Коэффициент пропускания T возрастает с увеличением полной энергии E , и для этого есть две причины. Во-первых, уменьшается подинтегральное выражение, которое всегда положительно, а во-вторых, область интегрирования по мере сближения точек поворота становится меньше. Разумеется, коэффициент пропускания возрастает при уменьшении ширины барьера.

Теория альфа-радиоактивности

37. Попытаемся теперь применить теорию проникновения через барьер к реальному физическому явлению.

В задаче 3 гл. 2 мы отмечали, что период полураспада ядер радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$, испускающих α -частицы, оказывается «неестественно большим». Он равен 1622 годам, что совершенно несовместимо ни с какой разумной ядерной шкалой времени. В качестве характеристического времени для ядерных процессов можно принять время, необходимое свету, чтобы пройти через ядро, т. е. время поряд-