Таблица 48А. **Восемь наиболее распространенных элементов земной коры**

Элемент	Число атомов, %	Элемент	Число атомов, %	Элемент	Число атомов, %
Кислород	62,6	Натрий	2,64	Магний	1,84
Кремний	21,2	Кальций	1,94	Калий	1,42
Алюминий	6,5	Железо	1,92		

Таблица дает оценку состава 16-километрового слоя земной коры совместно с океаном и атмосферой. Перечисленные восемь элементов составляют около 99% всей массы земной коры. Гравитационное поле Земли не может удержать легкие элементы — водород и гелий. Этим объясняется их малая, по сравнению с «космической», распространенность в земной коре. Можно думать, что распространенность элементов в Земле совпадает с космической. Однако химические процессы в Земле привели к пространственному разделению элементов и данные для земной коры не характеризуют распространенность элементов для Земли в целом.

время, по-видимому, нам ясны лишь основные особенности этой кривой.

Что касается первоначального происхождения *водорода*, то автору абсолютно нечего сказать по этому вопросу.

Дополнительная тема: нормировка волновой функции*)

49. Рассмотрим шредингеровскую волновую функцию, ограничившись для простоты одномерным случаем, когда волновая функция $\psi(x, t)$ зависит только от одной координаты и времени. Мы утверждали, что квадрат модуля волновой функции пропорционален плотности вероятности. Это означает, что вероятность обнаружить частицу в момент времени t в интервале $x_2 > x > x_1$ равна

$$P(x_1, x_2) = N \int_{x_1}^{x_2} dx\, |\psi(x, t)|^2, \qquad (49a)$$

где N — некоторая постоянная, *не зависящая* от x. Как она определяется? Из очевидного условия, что вероятность обнаружить частицу *где-то* должна быть равна единице:

$$1 = N \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x, t)|^2. \qquad (49b)$$

Может случиться, однако, что интеграл в (49b) не сходится. В этом случае постоянная N равна нулю, и из (49a) следует, что вероятность обнаружить частицу в любом конечном интервале значений x также равна нулю. Такой результат не имеет физического смысла, и мы приходим к важному выводу, что *шредингеровская волновая функция $\psi(x, t)$ должна для всех значений t иметь интегрируемый квадрат модуля.* Это означает сходимость интеграла (49b).

*) При первом чтении можно пропустить.

Допустим теперь, что волновая функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет условию «квадратичной интегрируемости». Тогда новую волновую функцию $\psi_n(x, t)$ можно определить из условия

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{N}\psi(x, t), \tag{49c}$$

где N определено из выражения (49b). Такая волновая функция обладает следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi_n(x, t)|^2 = 1, \quad P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx\,|\psi_n(x, t)|^2. \tag{49d}$$

Для функции $\psi_n(x, t)$ плотность вероятности *равна* квадрату ее абсолютного значения.

Волновая функция, удовлетворяющая первому условию в (49d), называется *нормированной волновой функцией*, или функцией, *нормированной к единице*. С такой функцией удобно работать, так как квадрат ее абсолютного значения непосредственно дает плотность вероятности.

50. Теперь мы должны выяснить, может ли постоянная N, определяемая равенством (49b), зависеть от времени t? Мы предполагали, что $\psi(x, t)$ является решением уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t). \tag{50a}$$

Новая волновая функция $\psi_n(x, t)$ также будет решением (50a), если постоянная N не зависит от времени.

Докажем следующую теорему: если $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (50a) и $\psi(x, t)$ «достаточно быстро» стремится к нулю при стремлении x к $+\infty$ или $-\infty$, то

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x, t)|^2 = 0. \tag{50b}$$

Требование «достаточной быстроты», в частности, означает, что функция $\psi(x, t)$ должна иметь интегрируемый квадрат абсолютного значения.

Для доказательства этой теоремы произведем дифференцирование под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x, t)|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x, t)\,\psi(x, t) = \psi^*(x, t)\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*(x, t)}{\partial t}\psi(x, t). \tag{50c}$$

Уравнение (50a) дает нам выражение для производной по времени $\partial\psi(x, t)/\partial t$. Чтобы получить аналогичное выражение для производной комплексно сопряженной волновой функции, произведем комплексное сопряжение уравнения (50a):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x, t) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x, t) - V(x)\psi^*(x, t). \tag{50d}$$

Мы считаем $V(x)$ *вещественной* функцией. Действительно, потенциал в теории Шредингера соответствует потенциалу аналогичной классической задачи. Вещественность потенциала существенна для наших рассуждений, и это предположение характерно для теории Шредингера.

Исключая с помощью (50a) и (50d) производные по времени из (50c), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,\ t)|^2=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right)=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right). \tag{50e}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,|\psi(x,\ t)|^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,\ t)|^2=\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty}. \tag{50f}$$

Однако если производные волновой функции по x ограничены, то выражение в скобках в формуле (50f) обращается в нуль, так как волновая функция исчезает на бесконечности. Таким образом, равенство (50b) доказано, и из (49b) немедленно следует, что N есть постоянная, не зависящая от времени t. Поэтому функция $\psi_n(x,\ t)$ также является решением уравнения Шредингера (50a). *Из данной волновой функции мы всегда можем образовать нормированную волновую функцию, в частности волновую функцию, нормированную к единице.*

Эти важные выводы сохраняются и в трехмерном случае. Мы не доказали этого, но соответствующее доказательство совершенно аналогично одномерному случаю.

51. Читатель может усомниться в нашем утверждении, что каждая волновая функция, имеющая физический смысл, должна быть квадратично интегрируемой в смысле (49a).

Поводом для сомнения является плоская монохроматическая волна $\exp(ixp/\hbar-itp^2/2m\hbar)$. Ясно, что эта функция не обладает таким свойством и, следовательно, не может быть нормирована к единице. Нам пришлось сделать вывод, что волна с *точно* заданным значением импульса p, зависимость которой от координаты x имеет вид $\exp(ixp/\hbar)$, не отвечает физически реализуемому состоянию движения частицы.

С другой стороны, ничто не мешает нам рассматривать волну, которая в очень *большом* интервале значений x зависит от x по закону $\exp(ixp/\hbar)$ и стремится к нулю при x, стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому возникшую трудность можно разрешить, согласившись, что под «волной с точно определенным импульсом» мы не будем подразумевать волну, которая при любых x имеет вид $\exp(ixp/\hbar)$. Мы предполагаем, что волна должна исчезнуть на бесконечности, но она имеет вид $\exp(ixp/\hbar)$ в достаточно большом интервале значений x, включающем и интересующую нас область. Таким образом, под «монохроматической волной» мы понимаем «почти монохроматическую волну». При таком понимании можно продолжать говорить о волнах, которые зависят от координат по закону $\exp(ixp/\hbar)$ или $\exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar)$, как обычно пишут почти во всех книгах по квантовой механике. Ненормированную волну можно считать предельным случаем нормированной волны и при желании называть волновые функции первого типа *«несобственными» волновыми функциями* (improper wave functions). Этот термин должен также умиротворить математиков. Их чувства часто страдают от того, что физики говорят о «плоских волнах» как о настоящих шредингеровских волновых функциях.

Задачи

1. Рассмотрим барьер, показанный на рис. 28А этой главы для случая, когда $E > V_0$.

а) Сначала рассмотрим случай, когда частица падает на барьер слева. Волновой пакет, соответствующий частице, частично отражается, частично проходит в область скачка потенциала. Для рассмотрения этого случая нам нужно такое решение, которое в области справа от скачка представляло бы волну, бегущую вправо. Найдите это решение для всего пространства и получите выражение для коэффициента отражения R, т. е. для вероятности отражения частицы. Коэффициент пропускания T (вероятность прохождения частицы) будет равен $1-R$.

б) Рассмотрим случай, когда частица падает справа. Теперь решение уравнения Шредингера должно соответствовать волне, бегущей в левой части рисунка влево. Найдите решение для всей области и получите выражение для коэффициентов отражения R' и пропускания $T' = 1-R'$. Заметим, что классическая частица в случае, показанном на рис. 28А, не отражается от барьера.

2. Получите точное выражение для коэффициента пропускания в случае потенциального барьера, показанного на рис. 31А, и сравните полученное выражение с приближенной формулой (33b). Удобнее сравнить не сами выражения для T, а их логарифмы. Приближенная формула является предельным случаем «высокого и широкого» барьера.

3. Представляет интерес рассмотреть специальный пример оптического проникновения через барьер, показанного на рис. 34В. Показатель преломления флинта (сорт стекла) для длины волны 6000 Å (в воздухе) равен 1,75. Предположим, что на рис. 34В оптически более плотной средой является флинт, а менее плотной — воздух. Пусть угол падения равен 45°, а расстояние между пластинами равно 0,01 мм. Оцените, какая часть света проникает через барьер. (Не нужно делать точных вычислений, достаточно оценок, основанных на приближенном рассмотрении проникновения через барьер.)

Заметьте, что интенсивность прошедшего света падает экспоненциально с увеличением толщины воздушного слоя между двумя стеклянными призмами. Важным параметром является отношение толщины к длине волны. Заметьте, что составляющая волнового вектора, *параллельная* плоскости раздела, одна и та же для стекла и для воздуха. Почему?

4. Нас интересует, верен ли рис. 34В. Рассмотрим соотношение между лучами падающего и прошедшего света. Быть может, прошедший луч должен быть продолжением падающего и проходить не так, как показано на рисунке? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимы, пожалуй, некоторые опыты. Пусть толщина оптически менее плотной среды будет порядка длины волны падающего света. С помощью системы щелей создадим *крайне* узкий пучок падающего света, показанный штриховой линией на нижней части рисунка справа. Тогда мы сможем исследовать прошедший пучок и выяснить, верен ли рисунок. Нет необходимости проделывать этот опыт в лаборатории; можно считать его мысленным экспериментом, так как классическая электромагнитная теория описывает его полностью. Обдумайте этот опыт и решите, верен ли рис. 34В.