

ким образом, под «монохроматической волной» мы понимаем «почти монохроматическую волну». При таком понимании можно продолжать говорить о волнах, которые зависят от координат по закону  $\exp(ix\hbar)$  или  $\exp(ix \cdot p/\hbar)$ , как обычно пишут почти во всех книгах по квантовой механике. Ненормированную волну можно считать предельным случаем нормированной волны и при желании называть волновые функции первого типа «несобственными» волновыми функциями (*improper wave functions*). Этот термин должен также умиротворить математиков. Их чувства часто страдают от того, что физики говорят о «плоских волнах» как о настоящих шредингеровских волновых функциях.

## Задачи

1. Рассмотрим барьер, показанный на рис. 28А этой главы для случая, когда  $E > V_0$ .

а) Сначала рассмотрим случай, когда частица падает на барьер слева. Волновой пакет, соответствующий частице, частично отражается, частично проходит в область скачка потенциала. Для рассмотрения этого случая нам нужно такое решение, которое в области справа от скачка представляло бы волну, бегущую вправо. Найдите это решение для всего пространства и получите выражение для коэффициента отражения  $R$ , т. е. для вероятности отражения частицы. Коэффициент пропускания  $T$  (вероятность прохождения частицы) будет равен  $1 - R$ .

б) Рассмотрим случай, когда частица падает справа. Теперь решение уравнения Шредингера должно соответствовать волне, бегущей в левой части рисунка влево. Найдите решение для всей области и получите выражение для коэффициентов отражения  $R'$  и пропускания  $T' = 1 - R'$ . Заметим, что классическая частица в случае, показанном на рис. 28А, не отражается от барьера.

2. Получите точное выражение для коэффициента пропускания в случае потенциального барьера, показанного на рис. 31А, и сравните полученное выражение с приближенной формулой (33b). Удобнее сравнить не сами выражения для  $T$ , а их логарифмы. Приближенная формула является предельным случаем «высокого и широкого» барьера.

3. Представляет интерес рассмотреть специальный пример оптического проникновения через барьер, показанного на рис. 34В. Показатель преломления флинта (сорт стекла) для длины волны 6000 Å (в воздухе) равен 1,75. Предположим, что на рис. 34В оптически более плотной средой является флинт, а менее плотной — воздух. Пусть угол падения равен  $45^\circ$ , а расстояние между пластинами равно 0,01 мм. Оцените, какая часть света проникает через барьер. (Не нужно делать точных вычислений, достаточно оценок, основанных на приближенном рассмотрении проникновения через барьер.)

Заметьте, что интенсивность прошедшего света падает экспоненциально с увеличением толщины воздушного слоя между двумя стеклянными призмами. Важным параметром является отношение толщины к длине волны. Заметьте, что составляющая волнового вектора, *параллельная* плоскости раздела, одна и та же для стекла и для воздуха. Почему?

4. Нас интересует, верен ли рис. 34В. Рассмотрим соотношение между лучами падающего и прошедшего света. Быть может, прошедший луч должен быть продолжением падающего и проходить не так, как показано на рисунке? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимы, пожалуй, некоторые опыты. Пусть толщина оптически менее плотной среды будет порядка длины волны падающего света. С помощью системы щелей создадим *крайне* узкий пучок падающего света, показанный штриховой линией на нижней части рисунка справа. Тогда мы сможем исследовать прошедший пучок и выяснить, верен ли рисунок. Нет необходимости прodelьвать этот опыт в лаборатории; можно считать его мысленным экспериментом, так как классическая электромагнитная теория описывает его полностью. Обдумайте этот опыт и решите, верен ли рис. 34В.

5. Рассмотрим движение частицы в «произвольном» потенциале, например показанном на рисунке. При  $x$ , стремящемся к  $+\infty$  или  $-\infty$ , потенциал  $V(x)$  падает до нуля.

Пусть частица с энергией  $E$  приходит слева. Волновая функция имеет вид  $\varphi(x) = e^{ixk} + Ae^{-ixk}$  для очень больших отрицательных значений  $x$  и  $\varphi(x) = Be^{ixk}$  для очень больших положительных значений  $x$ . Чтобы найти обе константы  $A$  и  $B$ , нужно решить уравнение Шредингера для потенциала  $V(x)$ , показанного на рисунке.

Мы интерпретировали  $|A|^2$  как коэффициент отражения барьера, а  $|B|^2$  — как коэффициент пропускания. Если такая интерпретация верна, то

$$|A|^2 + |B|^2 = 1. \quad (a)$$

Возникает следующий вопрос: выполняется ли написанное соотношение для *всех* потенциальных функций  $V(x)$ ? Проверьте это соотношение в общем случае.

*Указание.* Рассмотрите функцию

$$F(x) = \varphi^*(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\varphi^*(x)}{dx}$$

и покажите, что  $dF/dx = 0$ , если  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению Шредингера.

Из этого примера видно, что иногда можно выяснить свойства решения, не имея явно самого решения. В данном частном случае мы нашли важное общее свойство уравнения Шредингера и его решений. Если теория имеет смысл, уравнение (a) должно выполняться.

6. Есть еще интересные вопросы, возникающие в связи с рисунком к предыдущей задаче. Например, одинакова ли прозрачность барьера в обоих направлениях? *Теорема.* Коэффициент пропускания для частицы, падающей на барьер слева и справа, одинаков, если энергия частицы в обоих случаях одна и та же.

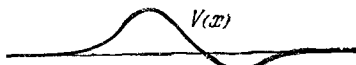
Докажите эту теорему.

*Указание.* Заметим, что если рассмотренная в предыдущей задаче функция  $\varphi(x)$  является решением уравнения Шредингера, то решением будет и сопряженная с ней функция  $\varphi^*(x)$ , а также любая линейная комбинация функций  $\varphi(x)$  и  $\varphi^*(x)$ . Рассмотрите *подходящую* линейную комбинацию  $\varphi(x)$  и  $\varphi^*(x)$ .

7. Многие нестабильные ядра распадаются, испуская позитрон и нейтрино. Энергия позитрона обычно лежит в интервале от 10 кэВ до нескольких мегаэлектрон-вольт. Как мы отмечали, причиной такого распада является слабое взаимодействие. Мы отмечали также, что причиной больших времен жизни  $\beta$ -активных ядер является крайне малое слабое взаимодействие. Это не исключает возможности, что проникновение через барьер играет важную роль. Исследуйте этот вопрос на каком-нибудь примере. Оцените коэффициент пропускания для позитрона, проходящего через «типичный» потенциальный барьер. Это позволит вам убедиться, что проникновение через барьер не играет заметной роли в  $\beta$ -распаде.

8. Л. Мейтнер и В. Ортман (Zs. f. Phys., 1930, v. 60, p. 143) осуществили калориметрические измерения энергии, освобождающейся при  $\beta$ -распаде RaE. (Это старое название ядер  $^{210}\text{Bi}$ .) Опыт заключался в том, что источник RaE был помещен в калориметр и измерялась выделяемая в калориметре теплота. Зная период полураспада RaE (5 суток) и количество препарата, они могли вычислить число распадов в секунду, а тем самым и энергию, выделяемую при одном распаде. Ее значение оказалось равным  $(0,337 \pm 0,020)$  МэВ на распад.

С другой стороны, было известно, что максимальная кинетическая энергии электронов при  $\beta$ -распаде RaE равна 1,170 МэВ, и таким образом, возникло большое расхождение между двумя указанными значениями энергии, чрезвычайно тревожившее физиков. Если мы верим, что распад заключается в переходе между двумя уровнями с точно заданной энергией каждого уровня, то должны считать, что при каждом распаде выделяется энергия, равная 1,170 МэВ, но часть этой энергии не улавливается калориметром или «исчезает» в нем. Этот результат так обескураживал, что некоторые физики, в их числе Бор, обсуждали возможность нарушения закона сохранения энергии в микрофизике.



К задаче 5. Докажите для произвольного барьера показанного типа, что коэффициенты отражения и пропускания, выраженные через амплитуды волн, распространяющихся налево и направо, в сумме равны единице

Опираясь на известные вам законы  $\beta$ -распада, дайте подробное объяснение результатов опыта Мейтнер и Ортмана.

9. Распространенности изотопов 235 и 238 в природном уране составляют соответственно 0,71 и 98,28%, а их периоды полураспада равны  $7,1 \cdot 10^9$  и  $4,50 \cdot 10^9$  лет.

а) Такая распространенность наблюдается как в земных образцах урана, так и для урана из метеоритов. Какие выводы можно сделать из этих фактов?

б) Предположим для упрощения задачи, что начальные распространенности обоих изотопов урана в Солнечной системе одинаковы. Какова при этом предположении оценка возраста Солнечной системы?

10. а) Вычислите массу радия в урановой руде, которая содержит 1 т урана. Зависит ли эта масса от возраста руды, равно, например, 1 миллиону или 500 миллионам лет?

б) Какую массу свинца можно обнаружить в руде, возраст которой равен 500 миллионов лет?

## Дополнительная литература

*Шифф Л.* Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.

*Ландау Л., Лифшиц Е.* Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.

*Бете Г., Моррисон Ф.* Элементарная теория ядра.— М.: ИЛ, 1958.

*Де Бенедетти С.* Ядерные взаимодействия.— М.: Атомиздат, 1968.

*Локк У.* Ядерная физика частиц высоких энергий.— М.: ИЛ, 1962.

*Хойл Ф.* Галактика, ядра и квазары.— М.: Мир, 1968.

*Вуд Дж.* Метеориты и происхождение Солнечной системы.— М.: Мир, 1971.