алюминия: волновой пакет она будет расположен гораздо ближе к ядру, чем волновой пакет электрона. Таким образом, мюон и ядро алюминия образуют водородоподобную систему — мюонный атом, окруженный «облаком» электронов.

Описанная схема образования мюонных атомов экспериментально подтверждена наблюдением электромагнитного излучения, испускаемого такими «атомами» *). Это излучение принадлежит рентгеновской части спектра, в чем можно убедиться, рассмотрев формулу (46b): приведенная масса μ в данном случае близка к массе *мюона*.

Один из подзаголовков гл. 5 гласит: «Существует лишь одна постоянная Планка». Заметим, что экспериментальное подтверждение предсказаний теории об уровнях энергии мюонных атомов является прекрасным доказательством универсальности формулы де Бройля.

48. Подведем итоги нашему рассмотрению водородоподобных «атомов». Такие системы состоят из двух частиц. Одна из них имеет заряд $-e$, другая $+Ze$. Не решая уравнения Шредингера для системы из двух частиц, описывающего поведение таких атомов, мы пришли к выводу, что их дискретные уровни энергии даются формулой

$$E_n = (\alpha Z)^2 \mu c^2 \lambda_n, \tag{48a}$$

где μ — приведенная масса; α — постоянная тонкой структуры; безразмерное число λ_n — собственное значение безразмерного уравнения Шредингера (43d) для одной частицы. Нахождение числа λ_n представляет собой чисто математическую задачу, решение которой приведено во многих курсах. Это число равно $\lambda_n = -1/2n^2$.

Таким образом, зная спектр водорода, мы знаем также спектры дейтерия, однократно ионизованного гелия, дважды ионизованного лития и спектры всех мюонных атомов. Это возможно благодаря тому, что нам известна зависимость уровней энергии от соответствующих физических параметров: заряда ядра Z и массы обеих частиц. Наши рассуждения еще раз убеждают в силе простых соображений размерности.

Дополнительная тема: переменные положения и импульса в теории Шредингера **)

49. Попытаемся теперь найти математические объекты, которые в простой теории Шредингера играют роль координаты и импульса в классической теории.

Пусть $\psi(x, t)$ — шредингеровская волновая функция, нормированная к единице. В этом и следующем пунктах мы будем рассматривать волновые функции в данный, фиксированный момент времени. Поэтому будем игнорировать переменную t и для крат-

*) *Fitch V. L., Rainwater J.* Studies of X-rays from Mu-Mesonic Atoms.— Phys. Rev., 1953, v. 92, p. 789.

**) При первом чтении можно пропустить.

кости будем писать $\psi(x)$. Величина $|\psi(x)|^2$ дает плотность вероятности, определяющую распределение вероятности для переменной x, поэтому средние значения x и x^2 равны

$$\mathrm{Av}(x) = \bar{x} = \langle\psi \mid x \mid \psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, |\psi(x)|^2, \tag{49a}$$

$$\mathrm{Av}(x^2) = \overline{x^2} = \langle\psi \mid x^2 \mid \psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\, |\psi(x)|^2. \tag{49b}$$

Обозначение $\langle\psi|x|\psi\rangle$ эквивалентно выражению «ожидаемое значение x для состояния ψ». Такие обозначения обычны для квантовой механики.

Если $\bar{x}$ — среднее значение переменной x, то за меру *неопределенности* x можно принять корень из среднего значения квадрата отклонения от $\bar{x}$:

$$\Delta x = \sqrt{\mathrm{Av}\,(x-\bar{x})^2}, \tag{49c}$$

или

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(x-\bar{x})^2\,|\psi(x)|^2 = \mathrm{Av}(x^2) - 2\bar{x}\,\mathrm{Av}(x) + \bar{x}^2. \tag{49d}$$

Из последнего равенства следует

$$(\Delta x)^2 = \mathrm{Av}\,[(x-\bar{x})^2] = \mathrm{Av}(x^2) - [\mathrm{Av}(x)]^2. \tag{49e}$$

Заметим, что чем больше волновая функция концентрируется около среднего значения $\bar{x}$, тем меньше Δx. Состояние, для которого положение *точно* известно, т. е. состояние с $\Delta x=0$, физически неосуществимо.

Среднее значение любой функции от x вычисляется по аналогии с формулами (49a) и (49b), которые дают средние значения x и x^2. В частности, среднее значение потенциальной энергии равно

$$\mathrm{Av}(E_{\text{пот}}) = \mathrm{Av}(V(x)) = \langle\psi \mid V(x) \mid \psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, V(x)\, |\psi(x)|^2. \tag{49f}$$

50. Постараемся тщательно обдумать значение сказанного. Вероятностная интерпретация шредингеровской волновой функции привела нас к понятию о *среднем* значении координаты частицы, определенном выражением (49a). Интеграл в правой части этого выражения позволяет найти численное значение *среднего квантовомеханической переменной* x, если известна волновая функция, описывающая состояние частицы. Но чему равно численное значение «*самой* квантовомеханической переменной x»? Ответ заключается в том, что квантовомеханическая переменная не может быть выражена *численным* значением: *она определяется лишь той операцией, которую нужно совершить над волновой функцией, чтобы получить среднее значение.*

Переменная координаты x является в теории Шредингера особенно простой переменной. В этом случае значение основного принципа, заключающегося в том, что квантовомеханическая переменная определяется через свое среднее (для всех состояний), оказывается несколько замаскированным. Символ x присутствует в качестве независимой переменной в волновой функции, и поэтому глубокий смысл определения (49a) не проявляется с достаточной ясностью. Рассмотрим, однако, такую квантовомеханическую переменную, как импульс (обозначим ее через p). Символ p отсутствует в волновой функции, поэтому позволено усомниться в существовании такой переменной. Чтобы решить этот вопрос, *определим* квантовомеханическую переменную импульса p, дав определенное предписание, как вычислить *среднее* значение импульса p для любого данного состояния. Реальная проблема сводится к тому, можем ли мы определить среднее значение импульса физически разумным способом.

51. Начнем с частного случая нормированной к единице волновой функции, которая в большом интервале имеет вид $\psi(x)=C\exp(ix\overline{p'}/\hbar)$. Вне этого интервала волновая функция быстро падает до нуля. Для такой волны средний импульс очень близок к $\overline{p'}$, и можно написать $\mathrm{Av}(p)\approx\overline{p'}$. В рассматриваемом интервале

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)=\overline{p'}\psi(x), \tag{51a}$$

и поскольку волновая функция нормирована к единице, то

$$\overline{p'}\approx\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x). \tag{51b}$$

Мы предполагаем здесь, что основной вклад в интеграл возникает от области, где выполняется равенство (51a). Для рассматриваемой волновой функции специальной формы можно найти средний импульс, вычислив интеграл (51b). Предположим теперь, что этот интеграл дает точно среднее значение для всех нормированных функций. Таким образом, *постулируем*:

$$\mathrm{Av}(p)=\langle\psi|p|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \tag{51c}$$

для *любой* нормированной шредингеровской волновой функции $\psi(x)$. Наш постулат означает, что в теории Шредингера переменной импульса p отвечает *дифференциальный оператор*, действующий на волновую функцию, расположенную справа от него в интеграле (51c). Иными словами,

$$p=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{51d}$$

52. Переменной квадрата импульса соответствует дифференциальный оператор

$$p^2=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{52a}$$

и среднее значение квадрата импульса поэтому равно

$$\mathrm{Av}(p^2) = \langle\psi | p^2 | \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi(x). \tag{52b}$$

Совершенно аналогично формулам (49c) — (49e) найдем неопределенность Δp значения импульса:

$$\Delta p = \sqrt{\mathrm{Av}(p - \overline{p})^2}, \tag{52c}$$

$$(\Delta p)^2 = \mathrm{Av}\,[(p-\overline{p})^2] = \mathrm{Av}\,(p^2) - [\mathrm{Av}\,(p)]^2, \tag{52d}$$

где $\overline{p} = \mathrm{Av}(p)$. Заметим, что те же соображения, которые привели нас к определению среднего значения импульса [формула (51c)], применимы и к определению среднего значения p^2 [формула (52b)].

53. Рассматривая выражения (49a), (49b), (49f), (51c) и (52b), мы замечаем, что их структура одинакова: среднее значение квантовомеханической переменной Q определяется выражением

$$\mathrm{Av}\,(Q) = \langle\psi | Q | \psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\, Q\psi(x); \tag{53a}$$

здесь Q — либо дифференциальный оператор, действующий на расположенную справа от него волновую функцию, либо переменная x или x^2, либо некоторая функция от x.

Формула (53a) выражает общую схему, с помощью которой определяется квантовомеханическая переменная в теории Шредингера. *Среднее* значение переменной Q равно интегралу в правой части (53a), где Q — некоторый линейный оператор, действующий на расположенную справа от него волновую функцию. (Для переменной координаты линейный оператор представляет собой «умножение на x».) Далее, среднее значение Q^2 получается заменой в интеграле оператора Q оператором Q^2. При этом $Q^2\psi(x)$ представляет собой результат повторного действия оператором Q на функцию $\psi(x)$.

54. Рассмотрим новые примеры, иллюстрирующие эту идею. Кинетическая энергия E_k частицы с массой m описывается дифференциальным оператором

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{54a}$$

Полной энергии частицы отвечает оператор H, представляющий собой сумму операторов кинетической и потенциальной энергий. В теории Шредингера оператор энергии имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \tag{54b}$$

в согласии с рассуждениями п. 10 этой главы.

55. Читатель мог заметить, что до п. 51 у нас не было ясного понимания смысла импульса в теории Шредингера. Пока мы имели дело с волновой функцией вида $\exp(ixp/\hbar)$, было ясно, что p в экспоненте представляет собой импульс. Мы должны были, однако, определить импульс p для общего случая *любой* (нормированной) волновой функции Шредингера, и именно это было сделано соотношениями (51c) и (51d).

Возникает вопрос: можно ли определить понятие импульса иначе? Тщательное исследование проблемы показало, что наше определение является единственным. Лишь оно удовлетворяет тому требованию, чтобы квантовомеханическая переменная импульса имела физическую интерпретацию, находящуюся в соответствии с понятием об импульсе в классической физике.

56. Разумный характер определения (51c) среднего значения импульса может быть подтвержден следующей теоремой, принадлежащей П. Эренфесту. Мы приведем ее без доказательства *).

Средние значения квантовомеханических переменных удовлетворяют тем же уравнениям движения, что и соответствующие классические переменные. В частности, из этой теоремы следует

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Av}\,(x)=\frac{1}{m}\,\mathrm{Av}\,(p), \tag{56a}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Av}\,(p)=-\,\mathrm{Av}\left(\frac{dV(x)}{dx}\right), \tag{56b}$$

если только волновая функция Шредингера $\psi(x,\ t)$, для которой вычисляются указанные выше средние, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H\psi(x,\ t)=i\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t}, \tag{56c}$$

где H — дифференциальный оператор (54b).

Шредингеровская волновая функция $\psi(x,\ t)$ зависит от времени t, и эта зависимость описывается уравнением Шредингера (56c). Отсюда средние значения x и p также зависят от времени, и нетрудно доказать, что эта зависимость удовлетворяет уравнениям (56a) и (56b). Действительно, нужно произвести дифференцирование под знаком интеграла, определяющего интересующие нас средние. Затем следует исключить производные по времени от ψ и ψ^* с помощью уравнения Шредингера (56c) и сопряженного ему уравнения. После интегрирования по частям и группировки членов получаем результаты (56a) и (56b). Мы не приводим этих вычислений, так как они несколько утомительны, но вполне доступны для самостоятельной работы **).

57. Рассмотренная теорема, которую легко обобщить на случай трех измерений, имеет большое значение для понимания основных концепций квантовой механики. Она объясняет, в частности, почему классическая механика представляет собой предельный случай квантовой механики: обе теории эквивалентны, если можно

---

*) *Ehrenfest P.* Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik.— Zs. f. Phys., 1927, v. 45, p. 455.

**) Читатель найдет доказательство в книге: *Шифф Л.* Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.

пренебречь неопределенностью переменных, т. е. их статистическим разбросом.

Нам необходимо существование такого соответствия между классической и квантовой механикой, чтобы считать последнюю верной теорией, и теорема Эренфеста подтверждает наш выбор переменной импульса.

Идея о том, что классическую механику следует считать предельным случаем квантовой механики, является содержанием так называемого *принципа соответствия* Бора. Этот принцип имеет большое значение, ибо если квантовая механика претендует на полное описание явлений, то она должна описывать *все* физические явления, включая и те, которые имеют классическое объяснение. Исторически принцип соответствия был ведущим принципом на ранней стадии развития квантовой механики. Он накладывал ограничения на возможные новые теории, хотя, конечно, для однозначного выбора верной теории его недостаточно. В частности, принцип соответствия позволил с самого начала скептически отнестись к правилам «квантования», которые представляли собой предписания того, как нужно перейти от классического описания к квантовомеханическому. Очевидно бессмысленно указание следующего типа: «Чтобы найти *верные* (квантовомеханические) уравнения, будем исходить из *неверных* (классических) уравнений, снабдив их неким магическим правилом квантования». Более верный путь к истинным уравнениям физики заключается в основанной на экспериментальных фактах догадке, которая в свою очередь подвергается экспериментальной проверке.

58. Для каждой квантовомеханической переменной Q величина

$$\Delta Q = \sqrt{\mathrm{Av}\,(Q^2) - [\mathrm{Av}\,(Q)]^2}, \tag{58a}$$

вычисленная для данной волновой функции, есть мера точности, с которой эта переменная Q известна в состоянии, описываемом волновой функцией. Переменная Q имеет в данном состоянии *точное* значение лишь в том случае, если $\Delta Q = 0$. В качестве примера рассмотрим переменную энергии H. Ее значение точно задано для каждого стационарного состояния и равно E — энергии этого состояния. Для нестационарных состояний $\Delta H > 0$.

Принцип неопределенностей накладывает ограничение на точность, с которой одновременно могут быть известны две различные переменные. Он имеет форму неравенства, связывающего $\Delta Q'$ и $\Delta Q''$ для двух переменных Q' и Q''. Равенства (49e) и (52d) дают нам определение величин Δx и Δp соответственно. С их помощью можно проверить, что соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2 \tag{58b}$$

действительно выполняется для *всех* волновых функций и что существуют волновые функции, для которых соотношение (58b) имеет вид равенства. Мы не будем производить этих вычислений, так как и без них приобрели достаточно ясное качественное понимание смысла соотношения (58b).