

Задачи

1. а) Вернемся к задаче о частице в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (рис. 4А). Рассмотрим волновые функции [выражение (6b)] для $n'=17$ и $n''=18$. Начертите график плотности вероятности [выражение (6с)], вычислив ее для моментов времени $t=0$, $t=t_0/4$, $t=t_0/2$, $t=3t_0/4$ и $t=t_0$, где $t_0=4ma^2/35\hbar$. Этот график демонстрирует периодическое движение частицы между стенками. Период движения равен t_0 .

б) Рассмотрите движение классической частицы с массой m и энергией $E_c = (1/2)(E_{17} + E_{18})$ в той же потенциальной яме и сравните период движения с периодом t_0 .

в) Волновой пакет в части а) задачи не слишком концентрирован. Фактически он занимает около $1/2$ размера ямы. Чтобы образовать хорошо локализованный в пространстве волновой пакет, лучше представляющий свойства классической частицы, необходима суперпозиция большого числа собственных функций. При этом, чем точнее определено положение частицы, тем менее точно известны ее импульс и энергия. Заметим, что энергия n -го уровня пропорциональна n^2 , тогда как разность энергий соседних уровней приблизительно пропорциональна n . Волновой пакет с высокой средней энергией может поэтому быть суперпозицией большого числа собственных функций, обеспечивающей как локализацию частицы, так и небольшой относительный разброс энергии. Мы встречаемся здесь с другим примером перехода к классическому пределу. Волновой пакет в потенциальной яме может вести себя подобно классической частице, если его средняя энергия высока по сравнению с энергией основного состояния.

Мы не станем рассматривать здесь в подробностях условия перехода к классическому пределу. Остановимся, однако, на одной стороне проблемы. Пусть $n'=n$ и $n''=n+1$. Найдите период движения пакета, соответствующий суперпозиции (6b), и сравните его с периодом для классической частицы, энергия E которой такова, что $E_{n+1} \geq E \geq E_n$. Перейдите, в частности, к пределу $n \rightarrow \infty$.

2. Обдумайте, справедливы ли приведенные ниже рассуждения автора (они похожи на некоторые попытки «объяснения» квантовой механики, встречающиеся в популярной литературе). Плотность вероятности $P(x) = |\psi(x, t)|^2$ для стационарного состояния, представленного волновой функцией $\psi(x, t)$, может быть понята как *среднее по времени* от плотности вероятности для классической частицы, движущейся в том же потенциальном поле с энергией, равной энергии стационарного состояния. Иными словами, частица движется по классическим законам, но если усреднить это движение по времени, которое велико по сравнению с периодом движения, то получим плотность вероятности $P(x)$. В случае трехмерного движения частицы, например для электрона в атоме водорода, можно дать аналогичную интерпретацию квадрата модуля волновой функции стационарного состояния. Частица движется классически, но наши измерительные приборы слишком грубы, чтобы уследить за подробностями этого движения, поэтому мы наблюдаем распределение вероятностей для электрона в атоме, которое может быть понята как результат усреднения классического движения по большому интервалу времени.

Читатель заметит, что это утверждение, понятое буквально, может быть немедленно отвергнуто. Поэтому автор немного отступит назад: он скажет, что данная им интерпретация квадрата модуля волновой функции не является строго корректной, но тем не менее она дает удобный способ размышления о квантовомеханической природе частицы и позволяет проникнуть в происходящее.

Оба эти утверждения, наивное первое и измененное второе, должны быть безусловно отвергнуты, и читатель должен объяснить, почему. При этом следует еще раз обдумать рассуждения, приведенные в начале этой главы, а также «опыт с двойной щелью», рассмотренный в гл. 4 и 5.

3. Интеграл (22а) вычислен в пределах от $-a$ до $+a$. Предположим, что мы интегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Как такой интеграл зависит от времени t и чему он равен при $t=0$?

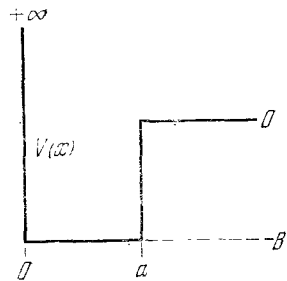
4. Мы должны убедиться в том, что потенциал притяжения не обязательно приводит к связанному состоянию. Для этого обратимся к рисунку. Пусть B — глубина ямы, a — ее ширина, m — масса частицы. Покажите, что если величина $G = a^2 B m / \hbar^2$ меньше определенной величины G_0 , то связанное состояние отсутствует, а если $G > G_0$, то будет по меньшей мере одно связанное состояние. Найдите вели-

чину G_0 . Заметьте, что это рассуждение относится к яме, одна стенка которой бесконечно высока. Для ямы, показанной на рис. 19А этой главы, всегда существует по крайней мере одно связанное состояние независимо от глубины ямы.

Руководствуясь этим примером, объясните, почему каждое из написанных ниже условий благоприятствует образованию связанного состояния: а) большая масса m ; б) большая глубина ямы; в) широкая яма.

Иллюстрируйте ваши соображения (которые должны быть применимы к более общему типу потенциальной ямы, чем показанный на рисунке) соответствующими графиками.

Этот пример позволяет понять, почему два атома не всегда образуют стабильную молекулу, несмотря на то, что при определенных расстояниях между атомами действуют силы притяжения. (Если силы при всех расстояниях создают *отталкивание*, как это иногда бывает, связанные состояния, разумеется, не образуются.) Мы можем считать потенциал, показанный на рисунке, идеализацией более реального молекулярного потенциала, приведенного на рис. 30А.



К задачам 4 и 5. В задаче 5 сплошная кривая дает потенциальную энергию для очень простой модели системы протон — нейтрон. Несмотря на простоту, эта модель позволяет понять некоторые свойства дейтрона и особенности протон-нейтронного рассеяния при малых энергиях. По оси абсцисс отложено расстояние между нейтроном и протоном

5. В качестве простой *одномерной* модели дейтрона (представляющего собой связанное состояние протона и нейтрона) примем потенциал протон-нейтронного взаимодействия, показанный на рисунке. Пусть $a = 1,85 \cdot 10^{-13}$ см и $B = 41,6$ МэВ. Найдите энергию связи дейтрона в этой модели и сравните ее с экспериментальным значением, которое равно 2,21 МэВ. Близкое согласие нельзя, разумеется, считать триумфом теории, так как для получения указанных значений a и B было использовано наблюдаемое значение энергии связи дейтрона и другие экспериментальные данные. Хотя использованный нами потенциал сильно идеализирован, он правильно воспроизводит *некоторые* особенности протон-нейтронного взаимодействия. Задача нахождения эффективного потенциала на основании неких «общих принципов» не решена. *Указание.* Масса m — приведенная масса системы протон — нейтрон: $m = M_p/2$.

6. При рассмотрении *колебательного* спектра хлористого водорода HCl обнаружено, что спектральные линии оказываются близко расположенными дублетами. Интенсивность коротковолнового члена дублета приблизительно в три раза превышает интенсивность длинноволнового. Для линий, расположенных в области спектра, близкой к 5600 см^{-1} (волновое число), разделение двух компонент составляет 4 см^{-1} . Объясните это явление и получите расчетом расстояние между компонентами. Объясните также относительную интенсивность обеих компонент.

7. При изучении частот, связанных с вращательными переходами в молекулах, получены следующие значения частот (в мегагерцах):

^{35}Cl	6980,	27 336;
^{37}Cl	6684,	26 181.

Для молекул, содержащих изотоп ^{35}Cl , цифры указаны в верхней строке; содержащих изотоп ^{37}Cl — в нижней строке. Йод представлен одним изотопом $^{127}_{53}\text{I}$ в обеих молекулах.

а) Как получить частоты нижней строки, зная частоты верхней?

б) Если образец, используемый для измерений, изготовлен из природного хлора, то наблюдают все четыре частоты. Можете ли вы предсказать отношение интенсивностей линий верхней строки к интенсивностям соответствующих линий нижней строки?

в) Рассмотрим изотопический эффект для вращательных уровней двухатомной молекулы в общем случае. Пусть имеются два типа молекул, у которых массы изотопических ядер равны M_1' и M_2' для молекул первого типа и M_1'' и M_2'' для молекул второго типа. Соответствующие частоты переходов для этих химически

Идентичных молекул обозначим ω'_r и ω''_r . Можно связать ω'_r и ω''_r , даже не имея детальной теории молекул. Покажите, что отношение обеих частот

$$\frac{\omega'_r}{\omega''_r} = \left(\frac{M_1'' M_2'' (M_1' + M_2')}{M_1' M_2' (M_1'' + M_2'')} \right)^k,$$

и определите показатель степени k . Сравните это выражение с выражением (37а), которое описывает изотопический эффект для колебательных уровней.

8. Рассмотрим «типичный» кристалл, построенный из атомов с атомной массой A , который имеет форму куба с длиной стороны L .

Оцените порядок следующих величин: а) низшая резонансная частота колебаний кристалла; б) высшая резонансная частота. Запишите результат в такой форме, чтобы зависимость частот от фундаментальных констант α , $\beta = m/M_p$ и \hbar/mc^2 , а также от констант A и $N \sim L/a_0$ (a_0 — боровский радиус, M_p — масса протона) была ясно видна. в) Рассмотрите численные примеры и получите для них частоту в мегагерцах.

9. В п. 50 гл. 2 было указано, что в принципе отношение c_s/c скорости звука в кристалле c_s к скорости света c можно выразить через следующие четыре константы: постоянную тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$, отношение масс электрона и протона $\beta = m/M_p$, атомную массу A и атомный номер Z атомов кристалла. Точное вычисление отношения c_s/c — задача сложная, но порядок величины и характер зависимости от констант α , β и A оценить нетрудно. Выполните такую оценку и проверьте полученную формулу в случае меди ($A=63,5$; $c_s=4700$ м/с).

10. а) Мы отмечали, что для потенциала $U(r)$, показанного на рис. 30А, расстояние между соседними уровнями уменьшается с увеличением квантового числа n . Дайте этому качественное объяснение.

б) Начертите параболу, соответствующую потенциалу для строго гармонического осциллятора. На том же графике начертите две потенциальные кривые, симметричные по отношению к началу, отвечающие «почти гармоническим» колебаниям, причем радиус кривизны всех трех кривых в начале координат (где потенциал имеет минимум) должен быть одинаков. Эти две кривые должны быть такими, чтобы для первой из них расстояние между соседними уровнями энергии *возрастало* с ростом квантового числа n , а для второй *уменьшалось*. Как объяснить указанные свойства обеих кривых?

11. В п. 47 было показано, что уровни энергии дважды ионизованного лития получаются простым изменением масштаба уровней однократно ионизованного гелия, причем коэффициент подобия близок к $9/4$. Оба иона представляют собой водородоподобные одноэлектронные системы. Исходя из таких же соображений, автор хотел бы доказать, что уровни энергии однократно ионизованного лития также можно получить изменением масштаба из уровней нейтрального гелия, ибо оба атома представляют собой двухэлектронную систему, отличающуюся лишь зарядом ядра. Иными словами, отношение длин волн соответствующих спектральных линий должно быть постоянным, как в случае дважды ионизованного лития. Однако опыт не подтверждает это предположение. Оба атома имеют весьма похожую схему уровней, которые не могут тем не менее быть совмещены изменением масштаба. Объясните, почему простые масштабные изображения, справедливые для одноэлектронных систем, перестают работать для двухэлектронных систем.

12. Среднее время жизни $2p$ -состояния водорода равно $0,16 \cdot 10^{-8}$ с. Чему равно это время для $2p$ -состояния однократно ионизованного гелия?

13. Чему равно среднее время жизни $2f$ -состояния мюонного атома, образованного при захвате отрицательного мюона ядром алюминия?

14. Вычислите длину волны фотона, испущенного мюонным атомом алюминия при переходе из $3s$ - в $2p$ -состояние.

15. Найдите «боровский радиус» для: а) мюонного атома алюминия; б) мюонного атома свинца. Сравните эти величины с радиусами ядер. Если «боровский радиус» сравним с радиусом ядра, то последнее нельзя больше считать точечным зарядом и уровни энергии мюонного атома не могут быть точно описаны формулой, подобной (46b). Действительно, из эксперимента следует, что уровни энергии тяжелых мюонных атомов сильно отклоняются от уровней, предсказываемых фор-

мудой (46b). Систематическое изучение этих отклонений позволило сделать определенные выводы о распределении заряда в ядрах и об их размерах.

16 *). Попробуйте доказать теорему Эренфеста, упомянутую в п. 56, следуя намеченному там ходу рассуждений (см. также п. 50 гл. 7).

17 *). а) Примените теорему Эренфеста к гармоническому осциллятору, для которого потенциал имеет вид $V(x) = (K/2)x^2$, и получите два дифференциальных уравнения, которым удовлетворяют $\Delta v [x(t)]$ и $\Delta v [p(t)]$. Решите эти уравнения и выразите $\Delta v [x(t)]$ через $\Delta v [x(0)]$ и $\Delta v [p(0)]$. Сравните полученные решения с решениями соответствующей классической задачи.

б) Для стационарного состояния $\Delta v [x(t)] = 0$, но для нестационарного состояния $\Delta v [x(t)]$ в общем случае представляет собой осциллирующую функцию времени. Имея в виду рассуждения п. 27 и результаты части а) этой задачи, приведите доводы в пользу того, что расстояние между соседними уровнями энергии гармонического осциллятора постоянно и равно $\hbar \sqrt{K/m}$. Заметим, что из рассуждения п. 27 следует, что это расстояние должно быть приблизительно постоянно, но в действительности оно строго постоянно и равно $\hbar \sqrt{K/m}$.

18. Рассмотрим двухатомную молекулу в виде «гантели». Вращательное возбуждение такой молекулы было рассмотрено в п. 38—40. Предположим, что центр зарядов молекулы не совпадает с ее центром масс. Молекула будет иметь электрический дипольный момент, который будет вращаться. Классически следует ожидать испускания электромагнитного излучения, частота которого равна классической круговой частоте ω_a .

Квантовая механика дает для нашей молекулы уровни энергии, выражаемые формулой (39с). Разумно предположить, что квантовое число j меняется на единицу, когда молекула испускает или поглощает квант дипольного излучения. Выразите частоту испускаемого излучения через квантовое число j момента импульса начального состояния молекулы и сравните полученный результат с классической формулой. Мы ожидаем, что при больших значениях j будет достигнут «классический предел». Верно ли это?

Дополнительная литература

Кроме книг, приведенных в библиографии к гл. 7, укажем следующие:

Ферми Э. Молекулы и кристаллы.— М.: ИЛ, 1960.

Борн М. Атомная физика.— М.: ИЛ, 1960.

*) Эти задачи относятся к дополнительной теме.