ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. *Простое применение распределения Гаусса.* Монету бросают 400 раз. Найдите вероятность 215 выпадаений «орла».

2. *Гауссовская плотность вероятности.* Рассмотрим идеальную систему из N спинов 1/2. Пусть каждому спину соответствует магнитный момент μ_0, который может быть направлен вверх или вниз, с вероятностью p и q соответственно. Воспользуйтесь выражением (2.74) и гауссовским приближением (П.13), пригодным для больших N, чтобы написать выражение для вероятности $\mathcal{P}(M)dM$ того, что магнитный момент системы имеет значение между M и $M+dM$.

3. *Точность гауссовского приближения.* Исследуйте степень пригодности гауссовского приближения (П.13), оценив выражение (П.7) с точностью до членов y^3 включительно.

а) Покажите, что (П.9) может быть записано в виде

$$\tilde{P}(n)=\tilde{P}e^{-(1/2)z^2}\exp\left[-\frac{p-q}{6(Npq)^{1/2}}z^3\right], \qquad \text{(I)}$$

где

$$z=\frac{y}{\sqrt{Npq}}=\frac{n-Np}{\sqrt{Npq}}. \qquad \text{(II)}$$

б) Первый экспоненциальный множитель делает вероятность P пренебрежимо малой, если $|z|\gg 1$. Таким образом, P имеет заметное значение лишь при $|z|\leqslant 1$. В этой области значений z показатель второй экспоненты в (I) значительно меньше единицы, если $\sqrt{Npq}\gg 1$. При этом условии вторую экспоненту можно разложить в степенной ряд

$$P(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}\,e^{-(1/2)z^2}\left[1-\frac{p-q}{6(Npq)^{1/2}}z^3+\ldots\right]. \qquad \text{(III)}$$

в) Покажите, что ошибка, возникающая от использования простого гауссовского приближения, имеет порядок $(Npq)^{-1/2}$. Она становится пренебрежимо малой, если N настолько велико, что $Npq\gg 1$. Покажите также, что в симметричном случае, когда $p=q$, поправочный член в (III) исчезает и порядок ошибки становится равным $(Npq)^{-1}$.

4. *Свойства распределения Пуассона.* Рассмотрите распределение Пуассона (П.23).

а) Покажите, что это распределение правильно нормировано, т. е., что $\sum_n P(n)=1$.

б) Вычислите дисперсию n и покажите, что она равна λ.

5. *Появление опечаток.* Предположим, что типографские ошибки, совершаемые наборщиком, имеют случайный характер и что книга из 600 страниц со-

держит 600 таких опечаток. Воспользовавшись распределением Пуассона, вычислите вероятность того, что

а) страница не содержит опечатки,

б) страница содержит не меньше трех опечаток.

6. *Радиоактивный распад.* Рассмотрим альфа-частицы, испускаемые радиоактивным источником в течение некоторого интервала времени t. Представим себе этот интервал разделенным на большое число малых интервалов длиной Δt. Так как альфа-частицы испускаются случайным образом, вероятность распада в течение любого из интервалов Δt совершенно не зависит от того, происходили ли распады в других интервалах времени. Кроме того, интервалы могут быть взяты настолько малыми, что вероятностью более чем одного распада в течение интервала можно пренебречь. Это означает, что если p — вероятность распада в течение интервала Δt ($p \ll 1$), то $(1-p)$ — вероятность того, что за это время не произойдет распада. Каждый наш интервал Δt может, таким образом, рассматриваться как независимое испытание; всего мы имеем $N=t/\Delta t$ таких испытаний за время t.

а) Покажите, что вероятность $P(n)$ того, что за время t произойдет n распадов, определяется распределением Пуассона.

б) Предположим, что активность радиоактивного источника такова, что среднее число распадов в минуту равно 24. Какова вероятность наблюдения n распадов за 10 *сек*? Получите приближенные значения вероятностей для всех целых n от 0 до 8.

7. *Столкновение молекул газа.* Разделим время на малые интервалы Δt. Пусть p — очень малая вероятность того, что молекула газа испытывает столкновение в течение одного из интервалов Δt.

а) Воспользовавшись распределением Пуассона, покажите, что вероятность P_N того, что молекула не испытает столкновение в течении N последовательных интервалов, равна $P_N=e^{-Np}$.

б) Записав $p=w\,\Delta t$ (здесь w — вероятность столкновения в единицу времени) и выразив N через протекшее время t, покажите, что вероятность $P(t)$ не испытать столкновения в течение времени t равна $P(t)=e^{-wt}$. Сравните этот результат с результатом, полученным в задаче 8.12 из других соображений.

8. *Флуктуации толщины тонкого слоя.* Помещенный на накаливаемую нить металл испаряется в вакууме. Атомы металла попадают на кварцевую пластинку, расположенную на некотором расстоянии от нити и образуют на ней тонкий металлический слой. Пластинка находится при низкой температуре, и каждый атом, попавший на пластинку, не испытывает миграции. Атомы с равной вероятностью поглощаются любым участком поверхности пластинки.

Рассмотрим элемент площади пластинки размером b^2 (b имеет порядок диаметра атома). Покажите, что число атомов металла, которое может поглотить такой элемент, приближенно описывается распределением Пуассона. Допустим, что испаренного металла достаточно, чтобы образовать на поверхности пластинки пленку со средней толщиной в шесть атомных слоев. Какая часть поверхности пластинки окажется вообще не покрытой металлом? Какая часть поверхности будет покрыта тремя и шестью слоями соответственно?

9. *Степень точности распределения Пуассона.* Чтобы выяснить степень точности распределения Пуассона, воспользуемся следующим порядком разложения, сделанного в (П.2).

а) Воспользуйтесь явным выражением для $N!/(N-n)!$ и разложением его логарифма, чтобы показать, что

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n \exp\left[-\frac{n(n-1)}{2N}\right].$$

б) Разложив $\ln(1-p)$ до членов, пропорциональных p^2, получите улучшенное приближение для $(1-p)^{N-n}$.

в) Покажите теперь, что биномиальное распределение может быть представлено выражением

$$P(n) \approx \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \exp\left[\frac{n-(n-\lambda)^2}{2N}\right].$$

г) Воспользовавшись этим результатом, покажите, что распределение Пуассона справедливо пока $\lambda \ll N^{1/2}$ и $n \ll N^{1/2}$, а совершаемая ошибка меньше или порядка $(\lambda^2+n^2)/N$.

10. *Флуктуации энергии системы, находящейся в тепловом контакте.* Рассмотрим две макроскопические системы, A и A', находящиеся в тепловом равновесии при абсолютной температуре T. Пусть C и C' соответственно теплоемкости этих систем (при постоянных внешних параметрах).

а) Покажите, воспользовавшись результатами (П.32) и (П.37), что стандартное отклонение энергии E системы A равно

$$\underset{\sim}{\Delta} E = kT \left[\frac{CC'}{k(C+C')} \right]^{1/2}.$$

б) Чему равно ΔE, если $C' \gg C$?

в) Предположим, что системы A и A' являются одноатомными идеальными газами, содержащими N и N' молекул соответственно. Вычислите относительную величину флуктуаций энергии $\Delta E/\tilde{E}$, где $\tilde{E}$ — средняя энергия системы A.

г) Рассмотрите ответ в) в предельных случаях $N' \gg N$ и $N' \ll N$. Согласуется ли ваш результат с тем, чего следует ожидать для $\underset{\sim}{\Delta} E$ в пределе $N' \to 0$?