

## ГЛАВА 2

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В первой главе мы убедились, что соображения, связанные с вероятностью, имеют важнейшее значение для понимания свойств макроскопических систем, состоящих из очень большого числа частиц. Поэтому необходимо рассмотреть основные понятия теории вероятностей и выяснить, как их использовать для решения некоторых простых, но важных задач. Идеи, с которыми мы встретимся, имеют значение, выходящее за рамки этих задач. Например, они неотделимы от проблем, возникающих при анализе азартных игр, в страховом деле (теория вероятностей позволяет получить вероятность смерти или болезни страхующихся) или при выборочных опросах, проводимых с целью оценки общественного мнения. Идеи теории вероятностей имеют огромное значение и для генетики. Особенно велико их значение в физике, в таких, например, проблемах, как радиоактивный распад, падение космического излучения на поверхность Земли или случайное испускание электронов нагретой нитью электронной лампы. Наконец, вероятностные идеи чрезвычайно важны при квантовомеханическом описании атомов и молекул. Эти идеи являются основой нашего рассмотрения макроскопических систем.

## 2.1. Статистические ансамбли

Рассмотрим систему  $A$ , с которой мы производим какие-то опыты или наблюдения \*). Часто результат данного одиночного опыта не может быть предсказан с полной определенностью либо по принципиальным соображениям, связанным с внутренней сущностью явления \*\*), либо потому, что доступная нам информация недостаточна для такого предсказания. Однако, если результат данного

\*) Акт наблюдения можно трактовать как опыт, результат которого совпадает с результатом наблюдения. Поэтому нет необходимости проводить различие между опытом и наблюдением.

\*\*) Такая ситуация имеет место, например, в квантовой механике, где результат измерений, совершаемых в микроскопической системе, не может быть предсказан с полной однозначностью.

одиночного опыта и не может быть указан, все же иногда можно сделать весьма важные выводы о результатах большого числа идентичных опытов. В таком случае мы говорим о *статистическом описании* системы и используем для такого описания методы *теории вероятностей*. Это описание можно выполнить следующим образом.

Вместо того чтобы сконцентрировать наше внимание на данной системе *A*, которая нас интересует, рассмотрим набор систем, (*ансамбль* в терминологии, принятой в статистике), состоящий из большого числа  $N$  «одинаковых» систем. В принципе  $N$  можно представить себе сколь угодно большим ( $N \rightarrow \infty$ ). Системы предполагаются «одинаковыми» в том смысле, что каждая из них удовлетворяет тем же условиям, которым удовлетворяет система *A*. Это значит, что мы считаем каждую из систем подготовленной по тому же рецепту и подвергнутой тому же опыту, что и система *A*. Мы можем теперь спросить, в какой части случаев будет иметь место данный конкретный результат опыта? Чтобы быть точными, нам следует иметь возможность каким-то образом пронумеровать или обозначить различные и исключающие друг друга результаты опыта. (Полное число таких возможных результатов может быть конечным или бесконечным.) Обозначим теперь некоторый определенный результат опыта индексом *r* и предположим, что из  $N$  систем, образующих наш ансамбль,  $N_r$  систем дали такой результат. Тогда отношение

$$P_r = \frac{N_r}{N} \quad (\text{при } N \rightarrow \infty) \quad (1)$$

называется *вероятностью появления результата r*. Если  $N$  очень велико, то можно ожидать, что повторение того же опыта с данным ансамблем приведет к тому же отношению  $P_r$ . Поэтому отношение (1) дает однозначный результат в пределе, когда  $N$  может быть сделано произвольно большим.

Это рассуждение показывает, что для измерения вероятности любого возможного результата опыта с данной системой необходимо повторить этот опыт на большом числе одинаковых систем \*). Несмотря на то, что результат данного частного опыта нельзя предсказать, *статистическая теория* позволяет предсказать *вероятность появления каждого из возможных результатов опыта*. Предсказанные вероятности можно сравнить с вероятностями, измеренными на опыте с ансамблем одинаковых систем.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

**Бросание монеты или игральной kosti.** Пусть наш опыт заключается в бросании монеты. Он имеет два возможных исхода: «орел» или «решка». В принципе, результат этого опыта может быть полностью предсказан, если нам известно все об условиях бросания монеты и об ее взаимодействии с поверхностью стола. Для такого предсказания необходимо произвести сложные вычисления,

\* ) Если состояние системы не зависит от времени, то с равным успехом можно один и тот же опыт повторить  $N$  раз над одной данной системой. При этом, разумеется, нужно быть уверенным, что в начале каждого опыта система находится в одном и том же начальном состоянии.

основанные на законах классической механики. На самом же деле мы не располагаем полными данными об условиях бросания монеты и не можем поэтому предсказать результат данного бросания. (Даже если бы мы имели полную информацию о начальных условиях и могли произвести все вычисления, нас не удовлетворил бы столь сложный способ получения результата.) Статистическая формулировка этого опыта очень проста. Достаточно рассмотреть ансамбль, состоящий из очень большого числа одинаковых монет. Будем бросать эти монеты одинаковым приемом и подсчитывать число случаев выпадения «орла» или «решки» \*). Доля таких случаев дает соответственно измеренную вероятность  $p$  появления «орла» или вероятность  $q$  появления «решки».

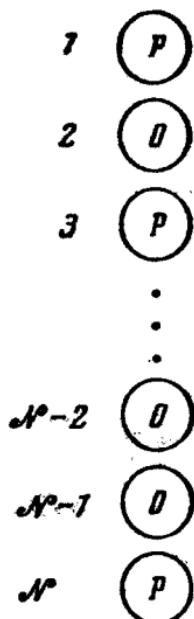


Рис. 2.1. Чтобы сделать предсказания о вероятных результатах бросания данной монеты, рассмотрим ансамбль, состоящий из большого числа одинаковых монет. На рисунке показано состояние ансамбля после бросания всех монет. Символ  $O$  означает «орел», символ  $P$  — «решка».

Статистическая теория должна уметь предсказывать эти вероятности. Например, если центр масс монеты совпадает с ее геометрическим центром, то из соображений симметрии следует, что в законах механики не содержится ничего, что позволило бы различить «орла» и «решку». В таком случае половина экспериментальных результатов должна дать «орла», другая половина «решку», поэтому  $p=q=\frac{1}{2}$ . Сравнение с опытом может подтвердить или опровергнуть такую теорию. Например, если «орел» появляется чаще «решки», мы будем считать, что теория неверна в той части, которая предполагает совпадение центра масс с геометрическим центром.

Рассмотрим теперь несколько более сложный опыт бросания  $N$  монет. Бросание каждой монеты имеет два возможных исхода, поэтому бросание  $N$  монет приводит к появлению  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^N$  результатов \*\*). Статистическая формулировка этого опыта заключается в том, что вместо одного набора из  $N$  монет мы рассматриваем ансамбль, состоящий из  $\sqrt{N}$  таких наборов по  $N$  монет в каждом, и над каждым набором производим одинаковый опыт. Вопрос, который может представлять интерес при таком одинаковом бросании наборов монет, заключается, например, в вероятности появления одного из  $2^N$  возможных результатов опыта. Примером менее детального вопроса является нахождение вероятности того, что  $n$  монет из нашего набора выпадут «орлом», а остальные ( $N - n$ ) монет выпадут «решкой».

Задача о бросании набора из  $N$  одинаковых игральных костей имеет, конечно, аналогичный характер. Единственное различие связано с тем, что бросание любой кости дает шесть возможных исходов, в зависимости от того, какая из шести граней смотрит вверх.

Исход некоторого опыта или результат наблюдения часто удобно обозначать простым словом *случай*. Заметим, что вероятность реализации данного случая существенным образом зависит от доступной нам информации относительно рассматриваемой системы. Действительно, эта информация определяет наш статистический ансамбль, состоящий из систем, свойства которых совпадают со свойствами рассматриваемой системы. Поясним это на следующем примере.

\* ) Мы можем поступить иначе, бросая  $\sqrt{N}$  раз одну и ту же монету и подсчитывая случаи «орла» и «решки».

\*\*) В частном случае  $N=4$  возможны  $2^4=16$  возможных результатов. Они перечислены в табл. I.1 (стр. 20), где букву  $L$  можно принять за «орла», а букву  $D$  за «решку».

П р и м е р. Нас интересует следующий вопрос: какова вероятность того, что житель Соединенных Штатов окажется в больнице в возрасте между 23 и 24 годами. В этом случае мы должны рассмотреть ансамбль, состоящий из большого числа жителей Соединенных Штатов, и определить, какая их доля между 23 и 24 годами жизни окажется в больнице. Предположим, что существует дополнительное условие, заключающееся в том, что это женщины. Ответ на наш вопрос изменится, так как теперь мы должны будем рассмотреть ансамбль женщин — жительниц Соединенных Штатов и определить, какая их часть оказалась в больнице в возрасте от 23 до 24 лет. (Очевидно, что благодаря деторождению женщины этого возраста будут находиться в больнице чаще, чем мужчины.)

*Системы с большим количеством частиц.* Рассмотрим макроскопическую систему  $A$ , состоящую из многих частиц. Такой системой может быть, например, идеальный газ, содержащий  $N$  молекул, или система из  $N$  спинов, или жидкость, или кусок меди. Ни в одном из этих случаев мы не можем предсказать поведение каждой частицы, образующей систему, к тому же такое предсказание не представляет интереса \*) и поэтому следует обратиться к статистическому рассмотрению системы  $A$ . Вместо того чтобы исследовать одну такую систему, рассмотрим ансамбль, состоящий из большого числа  $\mathcal{N}$  систем, аналогичных системе  $A$ .

Чтобы высказать некоторые статистические утверждения о нашей системе в момент времени  $t$ , мы произведем в этот момент времени наблюдения над  $\mathcal{N}$  системами. Это даст нам вероятность  $P_r(t)$  наблюдения определенного результата опыта в момент времени  $t$ . Предполагаемая процедура станет значительно более ясной, если мы вообразим, что имеем фильмы, на которых снята каждая система нашего ансамбля. Поведение любой, скажем,  $k$ -й, системы ансамбля в зависимости от времени мы можем теперь изучать, рассматривая  $k$ -й фильм (для этого нужно смотреть соответствующую горизонталь на рис. 2.3). С другой стороны, для получения каких-то вероятностных утверждений о системе в некоторый момент времени  $t$  необходимо рассмотреть те кадры на всех фильмах, которые относятся к определенному моменту времени  $t$  (для этого нужно изучить кадры, расположенные на рис. 2.3 вдоль вертикали, и сосчитать долю кадров, на которых обнаружен интересующий нас результат опыта).

Мы говорим, что свойства статистического ансамбля не зависят от времени, если число систем, отвечающих данному случаю, одно и то же в любой момент времени (или, что то же самое, если

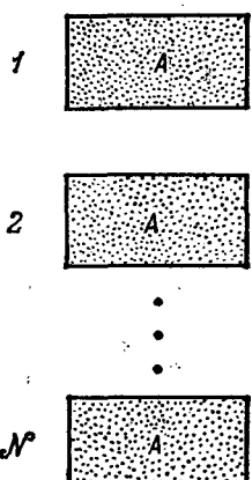


Рис. 2.2. Статистическое описание системы  $A$ , представляющей собой газ, заключенный в ящик. На рисунке схематически показан статистический ансамбль из  $\mathcal{N}$  систем, подобных рассматриваемой системе  $A$ .

\*) В точном квантовомеханическом описании системы нестатистические предсказания невозможны принципиально. При классическом описании точные предсказания о системе требуют знания положения и скорости каждой частицы в некоторый момент времени. Такая информация нам недоступна.

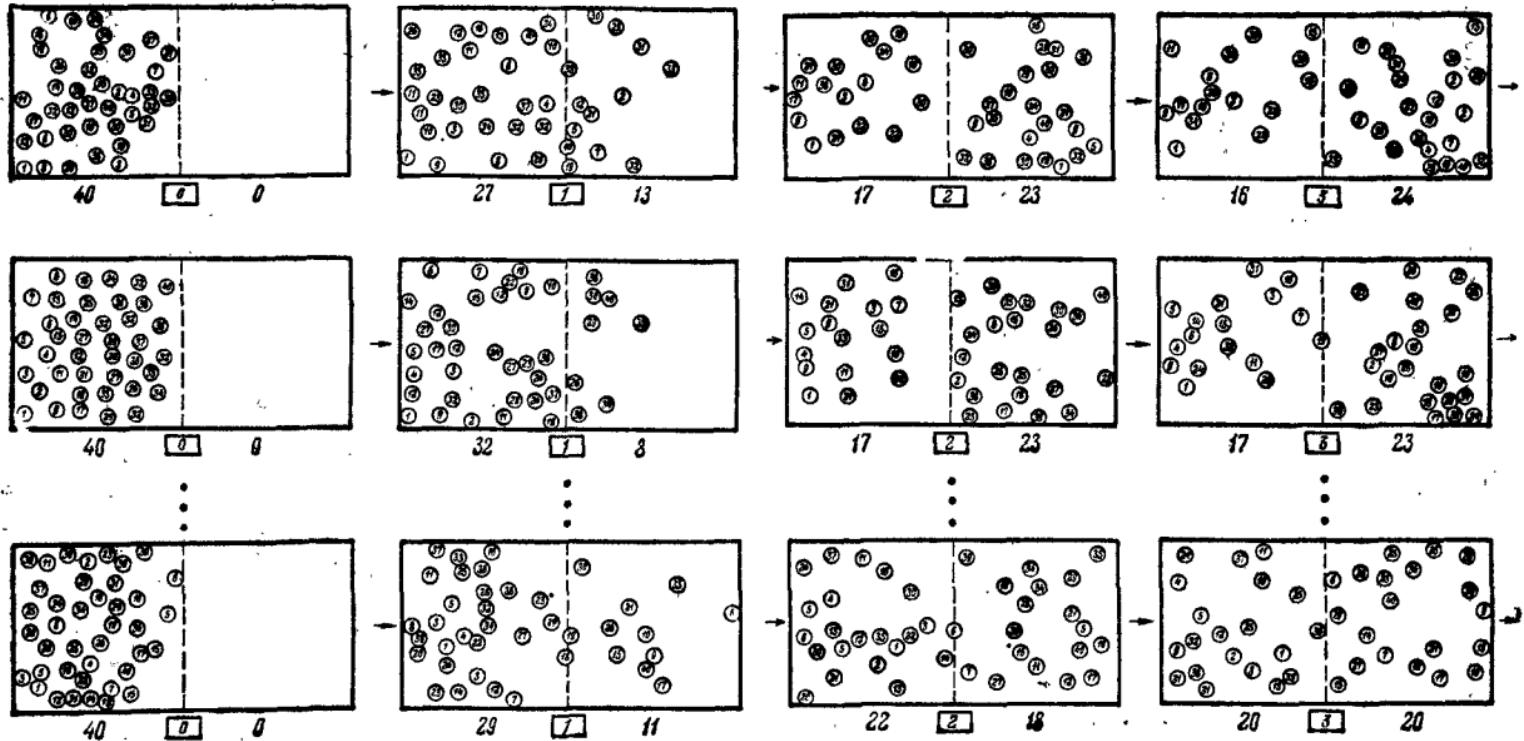


Рис. 2.3. Полученные с помощью вычислительной машины рисунки образуют статистический ансамбль системы. Этот ансамбль должен отразить поведение системы, состоящей из 40 частиц, заключенных в ящик. Доступная нам информация о системе заключается в следующем: в начальный момент времени (кадр  $j=0$ ) все частицы находятся в левой половине ящика, но ничего больше об их положении и скорости мы не знаем. Чтобы проследить эволюцию во времени  $k$ -й системы ансамбля, нужно рассмотреть горизонтально расположенные в- $k$ -м ряду кадры  $j=0, 1, 2, \dots$ . Чтобы высказать какие-нибудь статистические утверждения о системе в момент времени, отвечающий  $j$ -му кадру, необходимо рассмотреть расположенные по вертикали  $j$ -е кадры и произвести счет числа систем, необходимый для определения вероятности.

вероятность появления любого данного случая в ансамбле не зависит от времени). Тем самым статистическое описание позволяет дать очень ясное определение понятия равновесия: изолированная макроскопическая система находится в равновесии, если свойства статистического ансамбля из таких систем не зависят от времени.

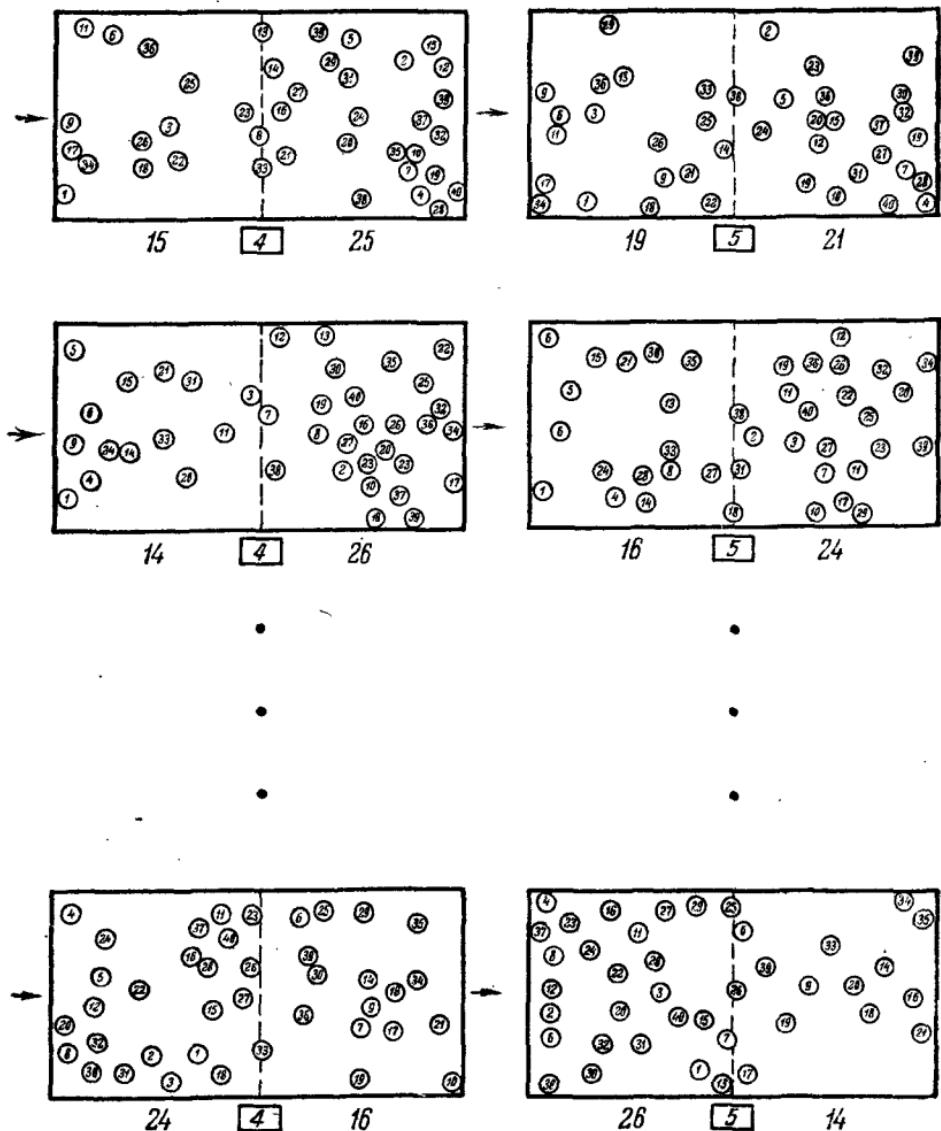


Рис. 2.4. Продолжение рис. 2.3. Теперь, когда прошло достаточное время, ансамбль является независимым от времени. Это означает, что система достигла состояния равновесия.

**При мер.** Рассмотрим идеальный газ, состоящий из  $N$  молекул. В некоторый начальный момент времени  $t$ , сразу после того, как убрана перегородка, все молекулы этого газа находятся в левой половине сосуда. Каким образом можно произвести статистическое описание поведения газа в последующие моменты времени? Мы должны рассмотреть ансамбль, состоящий из большого числа аналогичных сосудов с газом, в каждом из которых в начальный момент времени все моле-

кулы находятся в левой половине сосуда. Такой ансамбль схематически показан на рис. 2.3. Затем мы должны исследовать наш ансамбль в определенный момент времени  $t$ , с тем чтобы получить ответ на интересующие нас вопросы. Например, если сосредоточить внимание на определенной молекуле, то нас может интересовать, какова вероятность  $p(t)$  того, что эта молекула находится в левой части сосуда, или вероятность  $q(t)$  того, что она находится в его правой части, или, например, какова вероятность  $P(n, t)$ , что в данный момент  $n$  из общего числа  $N$  молекул оказались в левой части сосуда. Мы знаем, что в начальный момент времени  $t_0$  вероятность  $p(t_0) = 1$  и  $q(t_0) = 0$ . Точно так же  $P(N, t_0) = 1$  и  $P(n, t_0) = 0$  для  $n \neq N$ . С течением времени эти вероятности меняются до тех пор, пока молекулы окажутся равномерно распределенными по объему сосуда, так что  $p = q = \frac{1}{2}$ . После этого вероятности не меняются во времени, т. е. ансамбль становится независимым от времени и система достигает равновесия (рис. 2.4 \*)). Состояние, при котором поведение системы не зависит от времени, оказывается особенно простым. Действительно, в этом случае задача о газе, состоящем из  $N$  молекул, аналогична рассмотренной выше задаче о наборе из  $N$  монет. В частности, вероятность  $p$  нахождения молекул в левой части сосуда совпадает с вероятностью того, что брошенная монета выпадет «решкой»; аналогично, вероятность  $q$  нахождения молекулы в правой части сосуда совпадает с вероятностью выпадения «орла». Точно так же, как в примере с монетами, эти вероятности не зависят от времени и  $p = q = \frac{1}{2}$ .

**З а м е ч а н и е.** В главе I [см. уравнение (1.4)] мы вычисляли различные вероятности, рассматривая одну-единственную систему. Такой метод годится для специального случая системы, находящейся в равновесии. Так как ансамбль таких систем не зависит от времени, то большое число последовательных наблюдений над одной системой эквивалентно большому числу одновременных наблюдений над системами ансамбля. Другими словами, предположим, что мы взяли фильм, на котором заснято поведение системы за время  $\tau$ , и разрезали его на  $N$  равных частей, каждая из которых длится  $\tau_1 = \tau/N$  ( $\tau_1$  достаточно велико, чтобы поведение системы на одном куске фильма можно было считать независимым от ее поведения на смежных кусках). В этом случае набор из  $N$  разрезанных фильмов для данной системы будет неотличим от набора  $N$  фильмов, снятых для систем ансамбля в течение интервала времени  $\tau_1$ .

## 2.2. Основные соотношения между вероятностями

Вероятности удовлетворяют некоторым простым соотношениям. Хотя они почти очевидны, их значение весьма велико. Проще всего их получить, исходя из основного определения вероятности (1). Дальше мы всегда будем считать, что число  $N$  систем в ансамбле можно сделать бесконечно большим.

Предположим, что опыт, выполненный над системой  $A$ , приводит к некоторому числу  $\alpha$  взаимно исключающих друг друга исходов (случаев). Обозначим каждый возможный исход опыта или случай индексом  $r$ ; этот индекс может принимать значения  $1, 2, 3, \dots, \alpha$ . В ансамбле из одинаковых систем  $N_1$  систем отвечают случаю 1,  $N_2$  систем — случаю 2, ...,  $N_\alpha$  систем — случаю  $\alpha$ . Так как эти случаи исключают друг друга и ими исчерпываются все возможности, то сумма

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_\alpha = N.$$

\*) Заметим, что в любой данной системе с течением времени возникают случайные флуктуации, тогда как вероятность  $P$  для ансамбля в любой данный момент времени всегда имеет единственное и определенное значение, если число систем  $N$  в ансамбле может быть сделано сколь угодно большим. Это замечание имеет целью показать, насколько рассмотрение ансамбля упрощает ситуацию по сравнению с рассмотрением отдельной системы.