кулы находятся в левой половине сосуда. Такой ансамбль схематически показан на рис. 2.3. Затем мы должны исследовать наш ансамбль в определенный момент времени t, с тем чтобы получить ответ на интересующие нас вопросы. Например, если сосредоточить внимание на определенной молекуле, то нас может интересовать, какова вероятность $p(t)$ того, что эта молекула находится в левой части сосуда, или вероятность $q(t)$ того, что она находится в его правой части, или, например, какова вероятность $P(n, t)$, что в данный момент n из общего числа N молекул оказались в левой части сосуда. Мы знаем, что в начальный момент времени t_0 вероятность $p(t_0) = 1$ и $q(t_0) = 0$. Точно так же $P(N, t_0) = 1$ и $P(n, t_0) = 0$ для $n \neq N$. С течением времени эти вероятности меняются до тех пор, пока молекулы окажутся равномерно распределенными по объему сосуда, так что $p = q = 1/2$. После этого вероятности не меняются во времени, т. е. ансамбль становится независимым от времени и система достигает равновесия (рис. 2.4) *). Состояние, при котором поведение системы не зависит от времени, оказывается особенно простым. Действительно, в этом случае задача о газе, состоящем из N молекул, аналогична рассмотренной выше задаче о наборе из N монет. В частности, вероятность p нахождения молекул в левой части сосуда совпадает с вероятностью того, что брошенная монета выпадает «решкой»; аналогично, вероятность q нахождения молекулы в правой части сосуда совпадает с вероятностью выпадения «орла». Точно так же, как в примере с монетами, эти вероятности не зависят от времени и $p = q = 1/2$.

Замечание. В главе 1 [см. уравнение (1.4)] мы вычисляли различные вероятности, рассматривая одну-единственную систему. Такой метод годится для специального случая системы, находящейся в равновесии. Так как ансамбль таких систем не зависит от времени, то большое число последовательных наблюдений над одной системой эквивалентно большому числу одновременных наблюдений над системами ансамбля. Другими словами, предположим, что мы взяли фильм, на котором заснято поведение системы за время τ, и разрезали его на $\mathcal{N}$ равных частей, каждая из которых длится $\tau_1 = \tau/\mathcal{N}$ (τ_1 достаточно велико, чтобы поведение системы на одном куске фильма можно было считать независимым от ее поведения на смежных кусках). В этом случае набор из $\mathcal{N}$ разрезанных фильмов для данной системы будет неотличим от набора $\mathcal{N}$ фильмов, снятых для систем ансамбля в течение интервала времени τ_1.

2.2. Основные соотношения между вероятностями

Вероятности удовлетворяют некоторым простым соотношениям. Хотя они почти очевидны, их значение весьма велико. Проще всего их получить, исходя из основного определения вероятности (1). Дальше мы всегда будем считать, что число $\mathcal{N}$ систем в ансамбле можно сделать бесконечно большим.

Предположим, что опыт, выполненный над системой A, приводит к некоторому числу α взаимно исключающих друг друга исходов (случаев). Обозначим каждый возможный исход опыта или случай индексом r; этот индекс может принимать значения $1, 2, 3, \ldots, \alpha$. В ансамбле из одинаковых систем $\mathcal{N}_1$ систем отвечают случаю 1, $\mathcal{N}_2$ систем — случаю 2, ..., $\mathcal{N}_\alpha$ систем — случаю α. Так как эти случаи исключают друг друга и ими исчерпываются все возможности, то сумма

$$\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3 + \ldots + \mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}.$$

*) Заметим, что в любой данной системе с течением времени возникают случайные флуктуации, тогда как вероятность P *для ансамбля* в любой данный момент времени всегда имеет единственное и определенное значение, если число систем $\mathcal{N}$ в ансамбле может быть сделано сколь угодно большим. Это замечание имеет целью показать, насколько рассмотрение ансамбля упрощает ситуацию по сравнению с рассмотрением отдельной системы.

После деления на $\mathcal{N}$ это равенство принимает вид

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_\alpha = 1; \tag{2}$$

здесь $P_r = \mathcal{N}_r/\mathcal{N}$ означает, в соответствии с определением (1), вероятность появления случая r. Равенство (2) показывает, что сумма всех возможных вероятностей равна единице. Это равенство называется *условием нормировки* вероятностей. Если воспользоваться обозначением суммы $\sum$, приведенным в (М.1), оно может быть записано короче:

$$\sum_{r=1}^{\alpha} P_r = 1. \tag{3}$$

Какова вероятность обнаружения случая r либо случая s? В нашем ансамбле имеется $\mathcal{N}_r$ систем, отвечающих случаю r, и $\mathcal{N}_s$ систем, отвечающих случаю s. Таким образом, либо случаю r, либо случаю s соответствует $(\mathcal{N}_r + \mathcal{N}_s)$ систем ансамбля. Соответственно вероятность P (r или s) появления случая r или s равна

$$P(r \text{ или } s) = \frac{\mathcal{N}_r + \mathcal{N}_s}{\mathcal{N}}.$$

Таким образом,

$$\boxed{P(r \text{ или } s) = P_r + P_s.} \tag{4}$$

Пример. Рассмотрим бросание игральной кости. Благодаря симметрии, вероятность выпадения любой грани куба одинакова и равна 1/6. Так, вероятность выпадения единицы равна 1/6, и этому же равна, например, вероятность выпадения двойки. Из равенства (4) следует, что вероятность выпадения либо единицы, либо двойки будет равна $1/6 + 1/6 = 1/3$. Это, разумеется, очевидный результат, так как случаи 1 и 2 соответствуют одной трети общего числа всех возможных исходов 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Соотношение (4) можно немедленно обобщить для большего числа исключающих друг друга исходов. Так, вероятность появления любого одного из нескольких исходов просто равна сумме соответствующих вероятностей. В частности, из условия нормировки вероятностей следует очевидный результат, что сумма вероятностей, написанная слева в равенстве (2), представляющая собой вероятность наступления *либо* исхода 1, *либо* исхода 2, ..., *либо* исхода α, равна 1, т. е. является достоверностью. Действительно, все возможные исходы опыта исчерпаны случаями, пронумерованными от 1 до α.

Совместные вероятности. Предположим, что в исследуемой системе возможны два различных типа событий, например, α возможных событий типа r (где индекс $r = 1, 2, \ldots, \alpha$) и β возможных событий типа s ($s = 1, 2, \ldots, \beta$). Обозначим через P_{rs} вероятность совместного появления события r и события s. Это означает, что в ансамбле, состоящем из большого числа $\mathcal{N}$ одинаковых систем, $\mathcal{N}_{rs}$ таких систем характеризуются совместным появлением события r и события s. Тогда $P_{rs} = \mathcal{N}_{rs}/\mathcal{N}$. Обозначим, как обычно, через P_r вероятность появления события r (независимо от появления события

типа s). Для этого в нашем ансамбле мы не должны обращать внимания на события типа s и подсчитывать число $\mathcal{N}_r$ систем, в которых обнаружено событие r, при этом $P_r = \mathcal{N}_r/\mathcal{N}$. Аналогично, через P_s обозначим вероятность появления события s (независимо от появления события типа r).

Обратим внимание на специальный, но очень важный случай, когда вероятность появления события типа r ничем не связана с появлением или отсутствием события типа s. Такие события называются *статистически независимыми*, или *некоррелированными*. Рассмотрим теперь те системы ансамбля, в которых обнаружено данное событие r. Число таких событий равно $\mathcal{N}_r$. Независимо от характера события r, некоторая доля P_s этих систем обнаруживает также событие s. Таким образом, число $\mathcal{N}_{rs}$ систем, для которых обнаружены совместно события r и s, равно

$$\mathcal{N}_{rs} = \mathcal{N}_r P_s.$$

Соответственно, вероятность совместного появления события r и события s равна

$$P_{rs} = \frac{\mathcal{N}_{rs}}{\mathcal{N}} = \frac{\mathcal{N}_r P_s}{\mathcal{N}} = P_r P_s.$$

Мы получили, что

$$\boxed{\text{если события } r \text{ и } s \text{ статистически независимы, то } P_{rs} = P_r P_s.} \qquad (5)$$

Заметим, что вывод (5) не верен, если события r и s не являются статистически независимыми. Равенство (5) легко обобщить: совместная вероятность наступления более чем двух статистически независимых событий равна произведению отдельных вероятностей.

Пример. Предположим, что рассматриваемая система A состоит из двух игральных костей A_1 и A_2. Событием, или случаем, типа r может быть выпадение любой из шести сторон кости A_1, аналогично, событие типа s заключается в выпадении некоторой стороны кости A_2. Конкретное событие в нашей системе A заключается в выпадении какой-то заданной стороны кости A_1 и заданной стороны другой кости A_2. Опыт, заключающийся в бросании обеих костей, будет иметь 36 возможных событий. Чтобы высказать какие-то вероятностные утверждения, необходимо рассмотреть ансамбль, состоящий из большого числа N одинаковых пар игральных костей. Допустим, что каждая кость совершенно симметрична, так что выпадение любой стороны равновероятно. Очевидно, что вероятность выпадения данной стороны r равна $^1/_6$. Если кости не взаимодействуют между собой (например, они не намагничены, так что нет сил, стремящихся ориентировать одну кость относительно другой) и их бросают в точности одинаковым способом, результаты бросания можно считать статистически независимыми. Тогда совместная вероятность P_{rs} того, что кость A_1 выпадет стороной r, а кость A_2 стороной s, равна

$$P_{rs} = P_r \cdot P_s = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Этот результат вполне очевиден, так как рассматриваемый случай является одним из $6 \cdot 6 = 36$ возможных.