биномиальном распределении (14). В частности, если $V = V'$, так что $p = q = 1/2$, то решение этой задачи получено в п. 1.1, где нужно было найти вероятность того, что n из N молекул находятся в левой половине сосуда.

Бросание монет или игральных костей. Рассмотрим бросание N монет, поведение которых будем считать статистически независимым. Пусть p есть вероятность того, что любая данная монета выпадет «орлом», а q есть вероятность выпадания «решки». Из соображений симметрии мы можем считать $p = q = 1/2$. Какова вероятность того, что n из N брошенных монет выпадут «орлом»?

Бросание N игральных костей представляет собой аналогичную задачу. Их поведение опять можно считать статистически независимым. Предположим, p есть вероятность того, что любая кость выпадет стороной «6» вверх, тогда $q = 1 - p$ есть вероятность того, что это не произойдет. У игральной кости шесть сторон и из соображений симметрии следует, что $p = 1/6$, а $q = 1 - p = 5/6$. Какова вероятность $P(n)$ того, что n из N костей выпадут стороной «6»? Биномиальное распределение (14) отвечает и на этот вопрос.

2.4. Средние значения

Предположим, что переменная u, характеризующая некоторую систему, принимает α возможных дискретных значений:

$$u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_\alpha,$$

которым соответствуют вероятности

$$P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_\alpha.$$

Это значит, что в ансамбле из $\mathcal{N}$ аналогичных систем (где $\mathcal{N} \to \infty$) переменная u имеет значение r для следующего числа систем: $\mathcal{N}_r = \mathcal{N} P_r$.

Указание вероятности наблюдения P_r для всех α возможных значений является наиболее полным статистическим описанием системы. Удобно, однако, иметь некоторые параметры, которые характеризуют распределение возможных значений u в ансамбле менее детальным образом. Такими параметрами являются, например, *средние* значения. Их смысл весьма прост. Например, результат экзамена группы студентов можно описать наиболее полным образом (если нам не интересны фамилии студентов), указав, сколько студентов получили каждую из возможных оценок. Менее подробно результат экзамена можно представить указанием среднего балла. Для этого каждый возможный балл следует умножить на число заслуживших его студентов, результаты сложить и сумму разделить на число экзаменовавшихся. Аналогично, чтобы получить среднее значение величины u в ансамбле, мы должны умножить каждое значение u_r на число систем $\mathcal{N}_r$, в которых это значение осуществилось, сложить эти произведения для всех возможных значений r и результат разделить на полное число $\mathcal{N}$ систем в ансамбле. *Среднее значение* величины (или *усредненное по ансамблю*), которое мы обозначим $\bar{u}$, равно, таким образом:

$$\bar{u} = \frac{\mathcal{N}_1 u_1 + \mathcal{N}_2 u_2 + \ldots + \mathcal{N}_\alpha u_\alpha}{\mathcal{N}} = \frac{\sum_{r=1}^{\alpha} \mathcal{N}_r u_r}{\mathcal{N}}. \tag{29}$$

Но $\mathcal{N}_r/\mathcal{N}=P_r$ есть вероятность появления значения u_r, и определение (29) принимает вид *)

$$\boxed{\bar{u} \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r u_r.} \tag{30}$$

Аналогично, если $f(u)$ есть любая функция u, то *среднее значение* (или *усредненное по ансамблю*) $\bar{f}(u)$ определяется выражением

$$\boxed{\bar{f}(u) \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r).} \tag{31}$$

Из этого определения среднего значения следуют некоторые простые его свойства. Например, если $f(u)$ и $g(u)$ — любые две функции u, то

$$\overline{f+g} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r [f(u_r)+g(u_r)] = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r) + \sum_{r=1}^{\alpha} P_r g(u_r),$$

или

$$\boxed{\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}.} \tag{32}$$

Этот результат показывает в самом общем виде, что среднее значение суммы членов равно сумме средних значений каждого члена. Поэтому следующие одна за другой операции образования суммы и получения среднего значения дают одинаковый результат, независимо от порядка, в котором мы их выполняем **).

Если c — некоторая константа, то

$$\overline{cf} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r [cf(u_r)] = c \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r),$$

или

$$\boxed{\overline{cf} = c\bar{f}.} \tag{33}$$

Таким образом, операции умножения на постоянную и усреднения также могут быть выполнены в любой последовательности и это не влияет на результат. Если $f=1$, то формула (33) дает очевидный результат: среднее значение постоянной равно самой постоянной.

---

*) Среднее значение $\bar{u}$ зависит от времени, если от него зависит поведение ансамбля, т. е. некоторые вероятности. Заметим, однако, что *среднее значение* или *усредненное по ансамблю значение* $\bar{u}$ есть среднее по всем системам ансамбля в данный момент. Оно отличается от среднего по времени для одной системы, которое было определено формулой (1.6), за исключением специального случая ансамбля, не зависящего от времени, когда усреднение производится по очень большому интервалу времени.

**) На языке математики мы говорим, что эти операции «коммутируют».

Пример. Рассмотрим систему из четырех спинов и пусть $p = q = 1/2$. Число магнитных моментов, которые могут быть направлены «вверх», может быть равно $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Вероятности появления этих чисел следуют непосредственно из формулы (16). Из рис. 2.6 видно, что эти вероятности равны соответственно

$$P(n) = 1/16,\ 4/16,\ 6/16,\ 4/16,\ 1/16.$$

Среднее число магнитных моментов, направленных вверх, равно

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{4} P(n) \cdot n = \left(\frac{1}{16} \cdot 0\right) + \left(\frac{4}{16} \cdot 1\right) + \left(\frac{6}{16} \cdot 2\right) + \left(\frac{4}{16} \cdot 3\right) + \left(\frac{1}{16} \cdot 4\right) = 2.$$

Заметим, что это среднее просто равно $Np = 4 \cdot 1/2$.

Так как $p = q$, то преимущественное направление в пространстве отсутствует. Это значит, что среднее число моментов, направленных вверх, должно быть равно среднему числу моментов, направленных вниз, т. е.

$$\bar{n}' = \bar{n} = 2.$$

Этот результат следует также и из формулы (32), которая дает

$$\bar{n}' = \overline{N - n} = \bar{N} - \bar{n} = 4 - 2 = 2.$$

Так как нет преимущественного направления в пространстве, то среднее значение магнитного момента должно быть равно нулю:

$$\bar{m} = \overline{n - n'} = \bar{n} - \bar{n}' = 2 - 2 = 0.$$

Значение m можно вычислить и непосредственно, если использовать вероятности $P'(m)$ того, что m принимает возможные значения $m = -4, -2, 0, 2, 4$. Тогда, по определению среднего:

$$\bar{m} = \sum_{m} P'(m)\, m = \frac{1}{16} \cdot (-4) + \frac{4}{16} \cdot (-2) + \frac{6}{16} \cdot 0 + \frac{4}{16} \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot 4 = 0.$$

Мы приведем еще одно, часто очень важное, свойство среднего значения. Предположим, что мы имеем дело с двумя переменными, u и v, которые принимают значения

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\alpha$$

и

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_\beta$$

соответственно. Обозначим через P_r вероятность того, что переменная u принимает значение u_r; аналогичный смысл относительно переменной v имеет вероятность P_s. Пусть вероятность любых значений u не зависит от значений, которые принимает переменная v (это означает, что переменные u и v статистически независимы). В этом случае совместная вероятность того, что u принимает значение u_r, а v принимает значение v_s, равна

$$P_{rs} = P_r P_s. \tag{34}$$

Предположим теперь, что $f(u)$ есть некоторая функция переменной u, а $g(v)$ — функция v. Тогда из (31) следует, что среднее значение произведения fg равно

$$\overline{f(u)\, g(v)} = \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\beta} P_{rs} f(u_r)\, g(v_s), \tag{35}$$

где суммирование производится по всем возможным значениям переменных r и s. Если переменные статистически независимы, так что формула (34) справедлива, то из (35) следует

$$\overline{fg} = \sum_r \sum_s P_r P_s f(u_r)\, g(v_s) = \sum_r \sum_s [P_r f(u_r)]\, [P_s g(v_s)] = \\ = \Big[\sum_r P_r f(u_r)\Big] \Big[\sum_s P_s g(v_s)\Big].$$

Но первый множитель справа есть просто среднее значение $f(u)$, а второй равен среднему значению $f(g)$. Поэтому мы получаем:

$$\boxed{\begin{array}{c}\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g}, \\ \text{если } f \text{ и } g \text{ статистически независимы,}\end{array}} \tag{36}$$

т. е. среднее значение произведения равно произведению средних значений.

Дисперсия. Предположим, что мы имеем переменную u, и вероятность того, что она принимает значения u_r, равна P_r. Существует несколько параметров, с помощью которых обычно характеризуют общие свойства распределения вероятности. Одним из них является среднее значение переменной, т. е. величина $\overline{u}$, определение которой дано формулой (30). Этот параметр указывает на некоторое центральное значение, около которого распределены значения переменной u. Часто бывает нужно измерять отклонения переменной от этого среднего значения, т. е. величину

$$\Delta u \equiv u - \overline{u}. \tag{37}$$

Заметим, что среднее значение этой величины равно нулю. Действительно, из (32) имеем

$$\overline{\Delta u} = \overline{u - \overline{u}} = \overline{u} - \overline{u} = 0. \tag{38}$$

Удобно иметь параметр, который характеризовал бы величину разброса возможных значений u около среднего значения $\overline{u}$. Среднее значение самой величины Δu не может быть таким параметром, так как Δu в среднем одинаково часто принимает как положительные, так и отрицательные значения, и среднее значение Δu равно нулю согласно (38). Однако квадрат этой величины не может быть отрицательным. Его среднее значение равно

$$\overline{(\Delta u)^2} \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (\Delta u_r)^2 \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (u_r - \overline{u})^2 \tag{39}$$

и называется *дисперсией* величины u. Дисперсия не может быть отрицательной, так как все слагаемые в (39) положительны *). Итак,

$$\overline{(\Delta u)^2} \geqslant 0. \tag{40}$$

*) Заметим, что $\overline{(\Delta u)^2}$ не совпадает с величиной $(\overline{\Delta u})^2$. Это значит, что возвести в квадрат и затем усреднить — совсем не то же самое, что усреднить, а затем возвести в квадрат.

Дисперсия равна нулю только в том случае, если *все* возможные значения u_r равны $\bar{u}$. Она тем больше, чем больше вероятность получить значения u, заметно отличающиеся от среднего. Таким образом, дисперсия является удобной мерой разброса значений переменной u.

Дисперсия имеет размерность квадрата величины u. Линейной мерой разброса возможных значений u является квадратный корень из дисперсии, т. е. величина

$$\boxed{\underset{\sim}{\Delta u} \equiv [\overline{(\Delta u)^2}]^{1/2},} \tag{41}$$

размерность которой совпадает с размерностью u. Эта величина называется *стандартным отклонением* $\underset{\sim}{\Delta u}$. Из определения дисперсии (39) следует, что даже несколько значений u, далеких от $\bar{u}$, дают большой вклад в $\underset{\sim}{\Delta u}$, если они наблюдаются с заметной вероятностью. *Бóльшая часть значений u находится в пределах значений порядка $\underset{\sim}{\Delta u}$, лежащих вблизи среднего значения $\bar{u}$.*

Пример. Вернемся к примеру с четырьмя спинами, когда $p=q=1/2$. Здесь $\bar{n}=2$ и дисперсия n равна, по определению,

$$\overline{(\Delta n)^2} \equiv \sum_n P(n)(n-2)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot(-2)^2 + \frac{4}{16}\cdot(-1)^2 + \frac{6}{16}\cdot(0)^2 + \frac{4}{16}\cdot(1)^2 + \frac{1}{16}\cdot(2)^2 = 1.$$

Стандартное отклонение от $\bar{n}$ равно

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \sqrt{1} = 1.$$

Аналогично можно вычислить дисперсию магнитного момента. Так как $\bar{m}=0$, то мы имеем, по определению,

$$\overline{(\Delta m)^2} = \sum_m P'(m)(m-0)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot(-4)^2 + \frac{4}{16}\cdot(-2)^2 + \frac{6}{16}\cdot(0)^2 + \frac{4}{16}\cdot(2)^2 + \frac{1}{16}\cdot(4)^2 = 4,$$

так что

$$\underset{\sim}{\Delta m} = \sqrt{4} = 2.$$

Проверим справедливость этого результата. Так как $\bar{m}=0$, а $\bar{n}=\bar{n}'=2$, то для любых значений m или n мы имеем

$$\Delta m = m = n - n' = n - (4-n) = 2n - 4 = 2(n-2),$$

или

$$\Delta m = 2(n-\bar{n}) = 2\Delta n.$$

Таким образом,

$$\overline{(\Delta m)^2} = 4\,\overline{(\Delta n)^2},$$

что совпадает с прямым расчетом.

Знание вероятности P_r различных значений u_r дает полную статистическую информацию о распределении значений u в ансамбле. С другой стороны, знание нескольких средних величин, таких как, например, $\bar{u}$ и $\overline{(\Delta u)^2}$, дает только часть информации о распределении вероятности, которой недостаточно для получения всего

распределения. Однако эти средние часто можно вычислить простыми методами, без применения вероятностей. Это особенно важно в тех случаях, когда точное вычисление вероятностей является трудной задачей. В следующем разделе мы поясним это на примерах.

2.5. Средние значения для системы спинов

Рассмотрим идеальную систему из N спинов, равных $^1/_2$. Эти спины статистически независимы, что позволяет нам весьма просто вычислить некоторые средние значения в весьма общих случаях. Для этого нет необходимости знать вероятности, подобные тем, которые следуют из формулы (14) для $P(n)$.

Начнем с изучения такой физически интересной величины, как полный магнитный момент M в направлении магнитного поля. Обозначим через μ_i составляющую полного магнитного момента, возникшую от i-го спина. Эта величина может быть равна либо μ_0, либо $-\mu_0$. Полный магнитный момент равен сумме магнитных моментов от всех спинов:

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_N$$

или, в более краткой записи,

$$M = \sum_{i=1}^{N} \mu_i. \tag{42}$$

Мы хотим вычислить среднее значение и дисперсию полного магнитного момента.

Чтобы получить среднее значение M, нам достаточно усреднить обе части равенства (42). Общее правило (32) позволяет менять порядок усреднения и суммирования, поэтому мы можем написать

$$\overline{M} = \overline{\sum_{i=1}^{N} \mu_i} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\mu_i}. \tag{43}$$

Но вероятность того, что магнитный момент ориентирован вверх или вниз, одна и та же для всех магнитных моментов. Поэтому среднее значение магнитного момента одинаково для всех спинов (т. е. $\overline{\mu_1} = \overline{\mu_2} = \ldots = \overline{\mu_N}$) и мы обозначим это среднее через $\overline{\mu}$. Сумма (43) состоит, таким образом, из N одинаковых слагаемых и может быть написана в виде

$$\boxed{\overline{M} = N\overline{\mu}.} \tag{44}$$

Этот результат почти очевиден. Он означает, что среднее значение магнитного момента системы из N спинов в N раз больше среднего значения магнитного момента одного спина.

Вычислим теперь дисперсию M, т. е. величину $\overline{(\Delta M)^2}$, где

$$\Delta M \equiv M - \overline{M}. \tag{45}$$