распределения. Однако эти средние часто можно вычислить простыми методами, без применения вероятностей. Это особенно важно в тех случаях, когда точное вычисление вероятностей является трудной задачей. В следующем разделе мы поясним это на примерах.

2.5. Средние значения для системы спинов

Рассмотрим идеальную систему из N спинов, равных $^1/_2$. Эти спины статистически независимы, что позволяет нам весьма просто вычислить некоторые средние значения в весьма общих случаях. Для этого нет необходимости знать вероятности, подобные тем, которые следуют из формулы (14) для $P(n)$.

Начнем с изучения такой физически интересной величины, как полный магнитный момент M в направлении магнитного поля. Обозначим через μ_i составляющую полного магнитного момента, возникшую от i-го спина. Эта величина может быть равна либо μ_0, либо $-\mu_0$. Полный магнитный момент равен сумме магнитных моментов от всех спинов:

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_N$$

или, в более краткой записи,

$$M = \sum_{i=1}^{N} \mu_i. \tag{42}$$

Мы хотим вычислить среднее значение и дисперсию полного магнитного момента.

Чтобы получить среднее значение M, нам достаточно усреднить обе части равенства (42). Общее правило (32) позволяет менять порядок усреднения и суммирования, поэтому мы можем написать

$$\overline{M} = \overline{\sum_{i=1}^{N} \mu_i} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\mu_i}. \tag{43}$$

Но вероятность того, что магнитный момент ориентирован вверх или вниз, одна и та же для всех магнитных моментов. Поэтому среднее значение магнитного момента одинаково для всех спинов (т. е. $\overline{\mu_1} = \overline{\mu_2} = \ldots = \overline{\mu_N}$) и мы обозначим это среднее через $\overline{\mu}$. Сумма (43) состоит, таким образом, из N одинаковых слагаемых и может быть написана в виде

$$\boxed{\overline{M} = N\overline{\mu}.} \tag{44}$$

Этот результат почти очевиден. Он означает, что среднее значение магнитного момента системы из N спинов в N раз больше среднего значения магнитного момента одного спина.

Вычислим теперь дисперсию M, т. е. величину $\overline{(\Delta M)^2}$, где

$$\Delta M \equiv M - \overline{M}. \tag{45}$$

Вычитая из (42) среднее (43), имеем

$$M-\overline{M}=\sum_{i=1}^{N}(\mu_i-\overline{\mu}), \tag{46}$$

или

$$\Delta M=\sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i,$$

где

$$\Delta\mu_i\equiv\mu_i-\overline{\mu}. \tag{47}$$

Чтобы найти $(\Delta M)^2$, умножим сумму (46) саму на себя. Получаем

$$(\Delta M)^2=(\Delta\mu_1+\Delta\mu_2+\ldots+\Delta\mu_N)(\Delta\mu_1+\Delta\mu_2+\ldots+\Delta\mu_N)=$$
$$=[(\Delta\mu_1)^2+(\Delta\mu_2)^2+\ldots+(\Delta\mu_N)^2]+(\Delta\mu_1\Delta\mu_2+\Delta\mu_1\Delta\mu_3+\ldots$$
$$\ldots+\Delta\mu_1\Delta\mu_N+\Delta\mu_2\Delta\mu_1+\Delta\mu_2\Delta\mu_3+\ldots+\Delta\mu_N\Delta\mu_{N-1}),$$

или

$$(\Delta M)^2=\sum_{i=1}^{N}(\Delta\mu_i)^2+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j). \tag{48}$$

Первый член справа возникает при возведении каждого слагаемого суммы (46) в квадрат. Второй член справа образуется от перемножения *разных* членов суммы (46). Образуем среднее значение (48). При этом мы снова используем свойство (32), позволяющее менять порядок усреднения и суммирования. Имеем

$$\overline{(\Delta M)^2}=\sum_{i=1}^{N}\overline{(\Delta\mu_i)^2}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\overline{(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)}. \tag{49}$$

Во втором члене, где $j\neq i$, все произведения относятся к различным спинам, которые, как мы знаем, статистически независимы. Поэтому, на основании свойства (36), среднее значение каждого такого произведения равно произведению средних значений. Имеем

$$\text{для } i\neq j \quad \overline{(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)}=\overline{(\Delta\mu_i)}\,\overline{(\Delta\mu_j)}=0, \tag{50}$$

так как

$$\overline{\Delta\mu_i}=\overline{\mu_i}-\overline{\mu}=0.$$

Таким образом, каждый перекрестный член в (49) после усреднения исчезает (он одинаково часто бывает положительным и отрицательным) и (49) сводится к сумме квадратичных членов (ни один из них не может быть отрицательным):

$$\overline{(\Delta M)^2}=\sum_{i=1}^{N}\overline{(\Delta\mu_i)^2}. \tag{51}$$

Дальше наши рассуждения будут аналогичны тем, которые следовали за формулой (43). Вероятность того, что данный магнитный момент имеет определенную ориентацию, одна и та же для всех моментов, поэтому дисперсия $\overline{(\Delta\mu_i)^2}$ для всех спинов также одинакова (т. е. $\overline{(\Delta\mu_1)^2}=\overline{(\Delta\mu_2)^2}=\ldots=\overline{(\Delta\mu_N)^2}$) и мы обозначим ее $\overline{(\Delta\mu)^2}$. Сумма (51)

состоит из N равных членов и сводится к

$$\boxed{\overline{(\Delta M)^2} = N\overline{(\Delta\mu)^2}.} \tag{52}$$

Из этого выражения следует, что дисперсия полного магнитного момента просто в N раз больше дисперсии магнитного момента отдельного спина. Из (52) находим

$$\boxed{\underset{\sim}{\Delta M} = \sqrt{N}\,\underset{\sim}{\Delta\mu},} \tag{53}$$

где величина $\underset{\sim}{\Delta M} \equiv [\overline{(\Delta M)^2}]^{1/2}$ и $\underset{\sim}{\Delta\mu} \equiv [\overline{(\Delta\mu)^2}]^{1/2}$ представляют собой, в согласии с общим определением (41), стандартные отклонения полного магнитного момента и магнитного момента отдельного спина соответственно.

Формулы (44) и (53) показывают, каким образом величины $\overline{M}$ и $\underset{\sim}{\Delta M}$ зависят от полного числа спинов в системе. Если $\overline{\mu} \neq 0$, то среднее значение полного магнитного момента системы растет пропорционально N. Стандартное отклонение $\underset{\sim}{\Delta M}$ (оно измеряет разброс значений M около среднего значения $\overline{M}$) также растет при увеличении N, но этот рост пропорционален только корню из N. Таким образом, *отношение* $\underset{\sim}{\Delta M}/\overline{M}$ *уменьшается* пропорционально $N^{-1/2}$. Действительно, из формул (44) и (53) следует, что

$$\text{если } \overline{\mu} \neq 0, \text{ то } \frac{\underset{\sim}{\Delta M}}{\overline{M}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{\underset{\sim}{\Delta\mu}}{\overline{\mu}}\right). \tag{54}$$

Эту зависимость можно проследить на рис. 2.8.

Заметим весьма общий характер результатов (44) и (53). Они зависят только от закона сложения (43) и от того факта, что спины статистически независимы. Все наше рассмотрение поэтому остается в равной степени справедливым, когда компонента каждого магнитного момента имеет не два, а много возможных значений. (Так бывает, если спин каждой частицы больше $^1/_2$, так что ее магнитный момент имеет больше двух возможных ориентаций в пространстве.)

Система частиц со спином $^1/_2$. Полученные выше результаты легко применить к частному случаю частиц со спином $^1/_2$. Как и раньше, предположим, что вероятность того, что магнитный момент направлен «вверх», равна p, а вероятность обратного направления равна q. В первом случае $\mu_i = \mu_0$, а во втором случае $\mu_i = -\mu_0$. Среднее значение проекции момента на направление «вверх» равно, таким образом:

$$\overline{\mu} \equiv p\mu_0 + q(-\mu_0) = (p-q)\,\mu_0 = (2p-1)\,\mu_0. \tag{55}$$

В качестве проверки этого равенства заметим, что в симметричном

случае, когда $p=q$, $\bar{\mu}=0$, что и следовало ожидать. Дисперсия магнитного момента спина равна

$$\overline{(\Delta\mu)^2} \equiv \overline{(\mu-\bar{\mu})^2} \equiv p(\mu_0-\bar{\mu})^2 + q(-\mu_0-\bar{\mu})^2. \tag{56}$$

Но

$$\mu_0-\bar{\mu} = \mu_0-(2p-1)\mu_0 = 2\mu_0(1-p) = 2\mu_0 q$$

и

$$\mu_0+\bar{\mu} = \mu_0+(2p-1)\mu_0 = 2\mu_0 p.$$

Поэтому (56) принимает вид

$$\overline{(\Delta\mu)^2} = p(2\mu_0 q)^2 + q(2\mu_0 p)^2 = 4\mu_0^2 pq(p+q),$$

или

$$\overline{(\Delta\mu)^2} = 4pq\mu_0^2, \tag{57}$$

так как $p+q=1$. Теперь из формул (44) и (52) следует

$$\boxed{\bar{M} = N(p-q)\mu_0} \tag{58}$$

и

$$\boxed{\overline{(\Delta M)^2} = 4Npq\mu_0^2.} \tag{59}$$

Стандартное отклонение величины M равно

$$\boxed{\underset{\sim}{\Delta} M = 2\sqrt{Npq}\,\mu_0.} \tag{60}$$

Если мы напишем $M=m\mu_0$, где число $m=M/\mu_0$ выражает полный магнитный момент в единицах μ_0, то результаты (58) — (60) примут вид

$$\bar{m} = N(p-q) = N(2p-1), \tag{61}$$

$$\overline{(\Delta m)^2} = 4Npq, \tag{62}$$

$$\underset{\sim}{\Delta} m = 2\sqrt{Npq}. \tag{63}$$

Эти формулы содержат значительную информацию о распределении возможных значений M или m в ансамбле из систем спинов. Из них следует, например, что с заметной вероятностью могут наблюдаться *лишь значения m, лежащие вблизи $\bar{m}$ и не отличающиеся от этого* среднего много больше, чем на $\underset{\sim}{\Delta} m$. Рис. 2.8 является иллюстрацией этого вывода.

Пример. Предположим, мы имеем какое-то магнитное поле **B** и вероятность того, что магнитный момент отдельного спина направлен по полю, равна $p=0{,}51$, а против поля $q=1-p=0{,}49$. Среднее значение магнитного момента системы из N спинов будет равно

$$\bar{M} = 0{,}02N\mu_0.$$

Стандартное отклонение этой величины следует из (60):

$$\underset{\sim}{\Delta} M = 2\sqrt{Npq}\,\mu_0 \approx \sqrt{N}\,\mu_0.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta M}{\overline{M}} \approx \frac{\sqrt{N}\,\mu_0}{0{,}02N\mu_0} = \frac{50}{\sqrt{N}}.$$

Сначала предположим, что полное число спинов весьма мало́. Допустим, что $N=100$. Тогда

$$\frac{\Delta M}{\overline{M}} \approx \frac{50}{\sqrt{100}} = 5$$

и, значит, $\Delta M > \overline{M}$. Рассеяние возможных значений M оказывается весьма заметным. Действительно, в этом случае весьма вероятно появление значений M, которые очень сильно отличаются от $\overline{M}$ и даже имеют противоположный знак (рис. 2.9).

Рассмотрим теперь случай макроскопической системы спинов, когда N порядка числа Авогадро, например, $N = 10^{24}$. Имеем

$$\frac{\Delta M}{\overline{M}} \approx \frac{50}{\sqrt{10^{24}}} = 5\cdot 10^{-11},$$

так что $\Delta M \ll \overline{M}$. В этом случае рассеяние возможных значений M

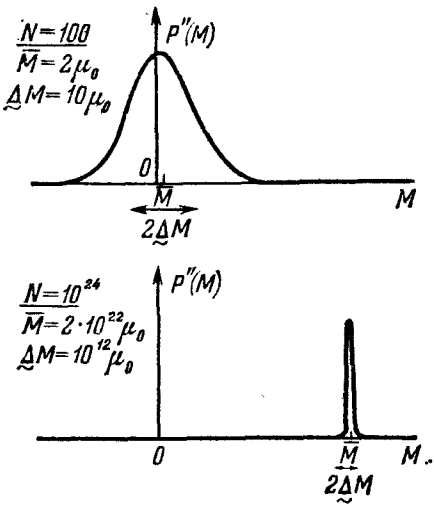

Рис. 2.9. Вероятность $P''(M)$ того, что полный магнитный момент системы спинов имеет значение M, для $N=100$ и $N=10^{24}$. Магнитное поле таково, что $p=0{,}51$ и $q=0{,}49$. Графики являются огибающими кривыми возможных значений $P''(M)$. Графики имеют разные масштабы.

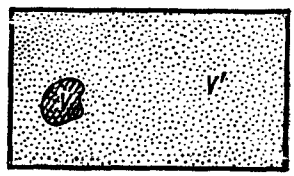

Рис. 2.10. Сосуд объемом V_0 содержит N молекул идеального газа. В данный момент времени в небольшой части объема V находится n молекул, тогда как остальное число молекул $n'=N-n$ находится в объеме $V'=V_0-V$.

крайне мало́ по сравнению со средним значением $\overline{M}$ полного магнитного момента. Если мы будем производить следующие друг за другом измерения магнитного момента системы, то почти всегда результатом измерения будет значение, очень близкое к $\overline{M}$. Действительно, если чувствительность нашего метода измерений недостаточна, чтобы заметить относительные отклонения от среднего, меньшие чем, скажем, $1:10^{10}$, мы всегда будем получать постоянное значение магнитного момента, близкое к $\overline{M}$, и не сможем заметить статистических флуктуаций вокруг среднего значения. Этот пример является конкретной иллюстрацией общего вывода о том, что в макроскопической системе, состоящей из очень большого числа частиц, относительная величина флуктуаций мала.

Распределение молекул идеального газа. Рассмотрим идеальный газ из N молекул, помещенных в сосуд объемом V_0. Мы интересуемся числом частиц в некоторой выделенной части этого сосуда объемом V (рис. 2.10). Если газ находится в равновесии, то

вероятность p нахождения молекулы в этом объеме равна

$$p=\frac{V}{V_0}. \tag{64}$$

Мы уже отмечали это в формуле (28).

Вычисление среднего значения n и его дисперсии не представит трудностей. В конце п. 2.3 было указано, что задача об идеальном газе аналогична задаче о системе спинов. (Обе задачи приводят к биномиальному распределению.) Поэтому мы можем сразу использовать результаты (61) и (62) для получения желаемой информации о величине n. Пусть n' обозначает число молекул в оставшейся части сосуда V_0-V. Обозначим $m\equiv n-n'$. Как следует из формулы (25),

$$n=\frac{1}{2}(N+m). \tag{65}$$

Используя результат (61) для $\overline{m}$, мы получаем

$$\overline{n}=\frac{1}{2}(N+\overline{m})=\frac{1}{2}N(1+p-q),$$

или

$$\boxed{\overline{n}=Np,} \tag{66}$$

так как $q=1-p$.

Далее, из (65) мы получаем

$$\Delta n\equiv n-\overline{n}=\frac{1}{2}(N+m)-\frac{1}{2}(N+\overline{m})=\frac{1}{2}(m-\overline{m}),$$

или

$$\Delta n=\frac{1}{2}\Delta m.$$

Поэтому $\overline{(\Delta n)^2}={}^1/_4\overline{(\Delta m)^2}$ и с помощью (62) мы получаем *)

$$\boxed{\overline{(\Delta n)^2}=Npq.} \tag{67}$$

Стандартное отклонение n равно, таким образом,

$$\boxed{\Delta n=\sqrt{Npq},} \tag{68}$$

а отношение

$$\frac{\Delta n}{\overline{n}}=\frac{\sqrt{Npq}}{Np}=\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{69}$$

Эти выражения опять показывают, что стандартное отклонение растет пропорционально $N^{1/2}$. Соответственно, относительная величина стандартного отклонения $\Delta n/\overline{n}$ *уменьшается* пропорционально $(N)^{-1/2}$ и становится очень малой при макроскопических

*) Формулы (66) и (67) могут быть получены и непосредственно на основании методов, рассмотренных в этом разделе, без обращения к величине m (см. задачу 2.14).

значениях N. Эти выводы прекрасно иллюстрируются разобранным в главе 1 примером, где рассматривалось число n молекул, заключенных в одной половине сосуда. В этом случае из (64) следует, что $p = q = {}^1/_2$, и (66) сводится к соотношению

$$\bar{n} = \frac{1}{2} N,$$

а (69) — к соотношению

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Эти формулы придают количественный характер рассуждениям о флуктуациях в п. 1.1. То обстоятельство, что абсолютная величина флуктуации (измеряемая Δn) возрастает с ростом N, а ее относительная величина (измеряемая $\Delta n/\bar{n}$) уменьшается с ростом N, хорошо иллюстрируется рис. 1.5 и 1.6 для $N=4$ и $N=40$. Если сосуд содержит около моля газа, то количество молекул имеет порядок числа Авогадро, т. е. $N \sim 10^{24}$. В этом случае относительная величина флуктуации $\Delta n/\bar{n} \sim 10^{-12}$ становится настолько малой, что ею почти всегда можно пренебречь.

2.6. Непрерывные распределения вероятностей

Рассмотрим идеальную систему, состоящую из большого числа спинов, равных ${}^1/_2$. Такая система обладает большим количеством возможных значений полного магнитного момента. Действительно, согласно (22) и (24)

$$M = m\mu_0 = (2n - N)\,\mu_0, \tag{70}$$

так что M может принимать любое из $(N+1)$ возможных значений:

$$M = -N\mu_0,\ -(N-2)\,\mu_0,\ -(N-4)\,\mu_0,\ \ldots,\ (N-2)\,\mu_0,\ N\mu_0. \tag{71}$$

Вероятность $P''(M)$ того, что полный магнитный момент примет данное значение M, равна вероятности появления соответствующих значений m или n, т. е. вероятности $P'(m)$, выражаемой формулой (26), или $P(n)$, выражаемой формулой (14). Таким образом,

$$P''(M) = P'(m) = P(n), \tag{72}$$

где $m = M/\mu_0$ и $n = {}^1/_2(N+m)$. За исключением случаев, когда M находится вблизи своих экстремальных значений $\pm N\mu_0$ [здесь вероятность $P''(M)$ пренебрежимо мала], вероятность $P''(M)$ меняется незначительно при переходе от данного значения M к соседнему. Это значит, что $|P''(M+2\mu_0) - P''(M)| \ll P''(M)$. Огибающая возможных значений $P''(M)$ образует при этом гладкую кривую, как это показано на рис. 2.11. Мы можем поэтому рассматривать $P''(M)$ как плавно меняющуюся функцию непрерывной переменной M, несмотря на то, что в действительности этой переменной доступны лишь дискретные значения (71).

Предположим, что μ_0 пренебрежимо мало по сравнению с наименьшим магнитным моментом, имеющим значение в наших макро-