значениях N. Эти выводы прекрасно иллюстрируются разобранным в главе 1 примером, где рассматривалось число n молекул, заключенных в одной половине сосуда. В этом случае из (64) следует, что $p = q = {}^1/_2$, и (66) сводится к соотношению

$$\bar{n} = \frac{1}{2} N,$$

а (69) — к соотношению

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Эти формулы придают количественный характер рассуждениям о флуктуациях в п. 1.1. То обстоятельство, что абсолютная величина флуктуации (измеряемая Δn) возрастает с ростом N, а ее относительная величина (измеряемая $\Delta n/\bar{n}$) уменьшается с ростом N, хорошо иллюстрируется рис. 1.5 и 1.6 для $N=4$ и $N=40$. Если сосуд содержит около моля газа, то количество молекул имеет порядок числа Авогадро, т. е. $N \sim 10^{24}$. В этом случае относительная величина флуктуации $\Delta n/\bar{n} \sim 10^{-12}$ становится настолько малой, что ею почти всегда можно пренебречь.

2.6. Непрерывные распределения вероятностей

Рассмотрим идеальную систему, состоящую из большого числа спинов, равных ${}^1/_2$. Такая система обладает большим количеством возможных значений полного магнитного момента. Действительно, согласно (22) и (24)

$$M = m\mu_0 = (2n - N)\,\mu_0, \tag{70}$$

так что M может принимать любое из $(N+1)$ возможных значений:

$$M = -N\mu_0,\ -(N-2)\,\mu_0,\ -(N-4)\,\mu_0,\ \ldots,\ (N-2)\,\mu_0,\ N\mu_0. \tag{71}$$

Вероятность $P''(M)$ того, что полный магнитный момент примет данное значение M, равна вероятности появления соответствующих значений m или n, т. е. вероятности $P'(m)$, выражаемой формулой (26), или $P(n)$, выражаемой формулой (14). Таким образом,

$$P''(M) = P'(m) = P(n), \tag{72}$$

где $m = M/\mu_0$ и $n = {}^1/_2(N+m)$. За исключением случаев, когда M находится вблизи своих экстремальных значений $\pm N\mu_0$ [здесь вероятность $P''(M)$ пренебрежимо мала], вероятность $P''(M)$ меняется незначительно при переходе от данного значения M к соседнему. Это значит, что $|P''(M+2\mu_0) - P''(M)| \ll P''(M)$. Огибающая возможных значений $P''(M)$ образует при этом гладкую кривую, как это показано на рис. 2.11. Мы можем поэтому рассматривать $P''(M)$ как плавно меняющуюся функцию непрерывной переменной M, несмотря на то, что в действительности этой переменной доступны лишь дискретные значения (71).

Предположим, что μ_0 пренебрежимо мало по сравнению с наименьшим магнитным моментом, имеющим значение в наших макро-

скопических измерениях. В этом случае из-за недостаточной чувствительности наших измерений мы не сможем заметить, что M принимает дискретные значения, разделенные интервалом $2\mu_0$. Поэтому M действительно можно считать непрерывной переменной, и в таких условиях приобретает смысл величина dM, понимаемая как «макроскопическая бесконечно малая», т. е. как величина очень малая *макроскопически*, но большая в *микроскопическом смысле* (другими словами, dM предполагается пренебрежимо малой по сравнению с наименьшим магнитным моментом, имеющим значение при макроскопическом рассмотрении задачи, но значительно большей, чем μ_0) *). Какова вероятность того, что полный магнитный момент системы лежит в области значений от M до $M+dM$? Очевидно, что величина этой вероятности зависит от величины dM и становится исчезающе малой, если dM сделать пренебрежимо малой. Поэтому можно ожидать, что искомая вероятность будет просто пропорциональна величине dM, так что она может быть записана в следующем виде:

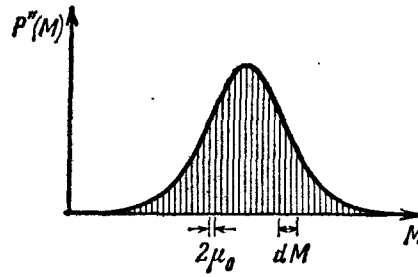

Рис. 2.11. Вероятность $P''(M)$ того, что полный магнитный момент системы спинов имеет значение M, для случая, когда число N спинов велико и магнитный момент спина μ_0 относительно мал.

$$\left[\begin{array}{l}\text{Вероятность того, что полный магнитный}\\ \text{момент находится между } M \text{ и } M+dM\end{array}\right] = \mathcal{P}(M)\,dM, \qquad (73)$$

где величина $\mathcal{P}(M)$ не зависит от величины dM **). Величина $\mathcal{P}(M)$ называется *плотностью вероятности*, она становится вероятностью только после умножения на бесконечно малую dM.

Легко выразить вероятность (73) через вероятность $P''(M)$ того, что полный магнитный момент принимает данное дискретное значение M. Из (71) следует, что соседние значения M отстоят друг от друга на $2\mu_0$, а так как $dM \gg 2\mu_0$, то интервал между M и $M+dM$

*) Уместно отметить, что многие дифференциалы в физике являются макроскопическими бесконечно малыми. Например, при изучении электричества мы имели дело с зарядом тела Q и с приращением заряда dQ. Такое описание с помощью дифференциала годится лишь в том случае, когда dQ является величиной, значительно большей дискретного значения заряда электрона e и в то же время пренебрежимо малой по сравнению с самим зарядом Q.

**) Так как вероятность есть гладкая функция dM, то вблизи любого значения M ее можно разложить в ряд Тейлора по степеням dM, если dM мало. Таким образом, мы имеем:

$$\text{Вероятность} = a_0 + a_1\,dM + a_2\,(dM)^2 + \ldots,$$

где коэффициенты a_0, a_1, . . . зависят от M. Заметим, что $a_0=0$, так как вероятность должна стремиться к нулю, если dM стремится к нулю. Далее, члены, содержащие высшие степени dM, пренебрежимо малы по сравнению со вторым членом, который пропорционален dM. Следовательно, мы получаем формулу (73).

содержит $dM/2\mu_0$ возможных значений M. В пределах малого интервала dM вероятность $\mathcal{P}(M)$ меняется очень мало и поэтому можно считать, что всем дискретным значениям M в пределах от M до $M+dM$ отвечает приблизительно одна и та же вероятность $P''(M)$. Теперь вероятность того, что полный магнитный момент лежит между M и $M+dM$, можно получить, суммируя $P''(M)$ по всем дискретным значениям M, лежащим в этом интервале. Это эквивалентно умножению почти постоянной величины $P''(M)$ на $dM/2\mu_0$. Вычисленная таким образом вероятность пропорциональна dM и равна вероятности (73):

$$\mathcal{P}(M)\,dM = P''(M)\frac{dM}{2\mu_0}. \tag{74}$$

В практических случаях вычисление $P''(M)$ может оказаться весьма трудоемким, если M/μ_0 велико, из-за необходимости подсчитывать факториалы больших чисел, входящие в биномиальное распределение (14). Эти затруднения можно, однако, обойти, если использовать рассмотренное в приложении П.1 гауссовское приближение.

Существует много задач, где интересующая нас переменная, назовем ее u, действительно непрерывна. Например, u может обозначать угол между некоторым вектором на плоскости и фиксированным направлением и может принимать любые значения между 0 и 2π. В общем случае u может принимать любое значение из области $a_1 \leqslant u \leqslant a_2$. Эта область может быть бесконечно большой, т. е. $a_1 \to \infty$ или $a_2 \to \infty$, или обе границы области одновременно уходят в ∞. Относительно такой переменной справедливы те же утверждения теории вероятностей, что и относительно переменной M. Так, например, нас может интересовать вероятность того, что переменная u находится в интервале значений между u и $u+du$. Если du достаточно мало, эта вероятность также пропорциональна величине du, так что ее можно записать в виде $\mathcal{P}(u)du$, где $\mathcal{P}(u)$ называется *плотностью вероятности* и не зависит от величины интервала du.

Рассмотрение вероятностных проблем в случае непрерывной переменной u легко свести к более простому случаю, когда переменная принимает дискретные значения и является, таким образом, счетной. Для этого всю область изменения переменной u следует разбить на произвольно малые и равные интервалы величиной δu. Каждый такой интервал обозначается соответствующим индексом r. Значение u в этом интервале обозначим через u_r, а вероятность того, что u лежит в этом интервале, через P_r или $P(u_r)$. Такая операция дает нам возможность иметь дело со счетным числом значений переменной u; каждое такое значение отвечает одному из интервалов $r=1, 2, 3, \ldots$ Очевидно, что соотношения между вероятностями, полученные в случае дискретной переменной, остаются в силе и для переменных, принимающих непрерывные значения. Например, формулы (32) и (33), описывающие

свойства среднего, применимы также и для непрерывной переменной u.

Заметим, что суммы, которые входят в условие нормировки или в выражение для средних значений, следует при переходе к непрерывной переменной заменить на интегралы. Так, условие нормировки заключается в том, что сумма вероятностей, взятая по всем возможным значениям переменной u, равна единице:

$$\sum_r P(u_r) = 1. \qquad (75)$$

В случае непрерывной переменной мы исходим из вероятности

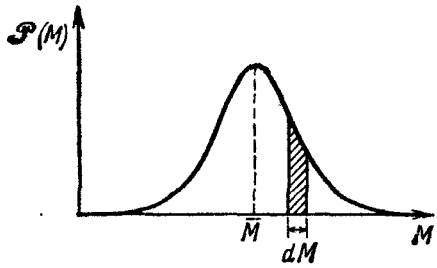

Рис. 2.12. Распределение вероятности, показанное на рис. 2.11, выражено через плотность вероятности $\mathcal{P}(M)$. Теперь $\mathcal{P}(M)dM$ (площадь под кривой, заключенная между координатами M и $M+dM$) есть вероятность того, что полный магнитный момент лежит в интервале значений от M до $M+dM$

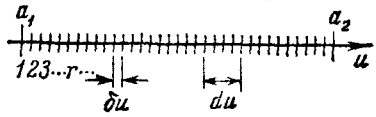

Рис. 2.13 Область изменения непрерывной переменной u разделена на счетное число малых интервалов одинакового размера δu. Каждый такой интервал обозначен индексом, принимающим значения 1, 2, 3, ... На графике показана также величина макроскопически малого интервала du.

того, что переменная лежит в интервале значений u, $u+du$. Эта вероятность, как мы видели, равна $\mathcal{P}(u)du$ *). Чтобы выполнить операцию, указываемую формулой (75), надо произвести суммирование (интегрирование) по всем интервалам du. Таким образом, условие нормировки (75), выраженное через плотность вероятности, будет иметь вид

$$\int_{a_1}^{a_2} \mathcal{P}(u)\, du = 1. \qquad (76)$$

Аналогично, в случае дискретной переменной среднее значение некоторой функции этой переменной равно

$$\overline{f(u)} = \sum_r P(u_r) f(u_r). \qquad (77)$$

Переходя к непрерывной переменной, мы должны сначала произвести суммирование по всем значениям переменной r внутри интервала u, $u+du$. Это дает вклад в сумму, равный $\mathcal{P}(u)\, du\, f(u)$. Теперь остается завершить суммирование, взяв интеграл по всем

*) Здесь предполагается, что du велико по сравнению с произвольно малым интервалом δu ($du \gg \delta u$), но достаточно мало для того, чтобы $P(u_r)$ мало менялось в интервале du.

возможным значениям u. Таким образом, эквивалентом формулы (77) является следующая *):

$$\overline{f(u)} = \int_{a_1}^{a_2} \mathcal{P}(u) f(u)\, du. \qquad (78)$$

Обобщение на случай нескольких переменных. Обобщение сделанных выше замечаний на случай двух и более переменных не вызывает затруднений. Допустим, например, что мы имеем дело с двумя независимыми

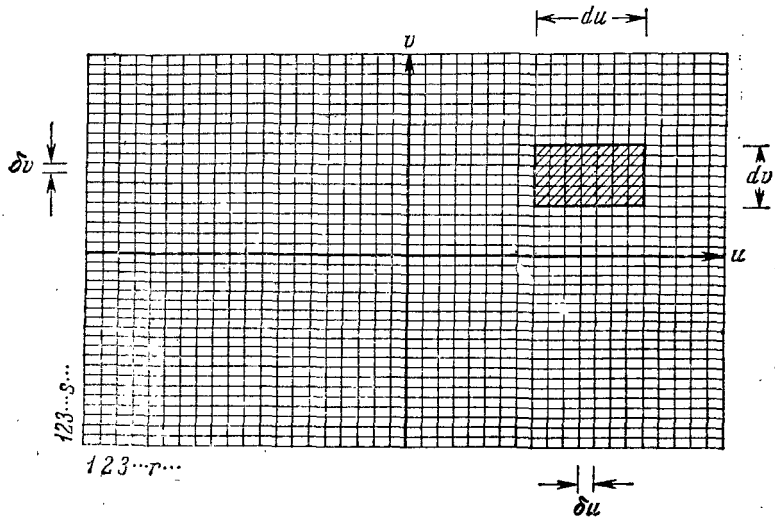

Рис. 2.14. *Области изменения непрерывных переменных u и v разделены на малые интервалы величиной δu и δv соответственно. Эти интервалы обозначены индексами r и s. Тем самым плоскость u, v оказывается разделенной на малые ячейки, обозначаемые парой индексов r и s.*

переменными u и v. Тогда совместная вероятность того, что переменная u лежит между u и $u + du$, а переменная v между v и $v + dv$, пропорциональна как du, так и dv, и может быть записана в виде $\mathcal{P}(u, v)\, du\, dv$, где $\mathcal{P}(u, v)$ представляет собой плотность вероятности, не зависящую от величины интервалов du и dv. При желании ситуацию можно опять свести к случаю дискретных переменных. Для этого область изменения переменной du нужно разделить на очень большое число малых фиксированных интервалов одинаковой величины δu и пронумеровать эти интервалы индексом r. То же следует сделать и с другой переменной v, обозначив соответствующие интервалы индексом s. Затем для статистического описания ситуации можно вместо плотности вероятности $\mathcal{P}(u, v)$ воспользоваться вероятностью P_{rs} того, что переменные попадают в некоторую ячейку, обозначенную парой индексов r и s.

---

*) Заметим, что для некоторых значений u *плотность* вероятности $\mathcal{P}(u)$ может быть бесконечной. Это не вызывает никаких трудностей, если только интеграл $\int_{c_2}^{c_1} \mathcal{P}(u)\, du$ (который дает вероятность того, что величина u лежит в произвольной области значений между c_1 и c_2) остается конечным.