Сводка определений

Статистический ансамбль. Собрание большого числа невзаимодействующих между собой систем, каждая из которых удовлетворяет тем же условиям, что и рассматриваемая нами система.

Ансамбль, не зависящий от времени. Ансамбль, в котором число систем с данными свойствами одно и то же в любое время.

Случай. Исход опыта или результат наблюдений.

Вероятность. Вероятность P_r осуществления данного случая в рассматриваемой системе определяется с помощью статистического ансамбля из $\mathcal{N}$ таких систем. Если случай r осуществился в $\mathcal{N}_r$ системах ансамбля, то

$$P_r = \mathcal{N}_r/\mathcal{N} \qquad (\text{при } \mathcal{N} \to \infty).$$

Статистическая независимость. Два случая статистически независимы, если осуществление одного из них не зависит от осуществления или неосуществления другого.

Среднее значение (или среднее по ансамблю). Среднее значение u обозначают $\bar{u}$. Это среднее вычисляется по формуле

$$\bar{u} = \sum_r P_r u_r,$$

где суммирование производится по всем возможным значениям переменной r, а P_r обозначает вероятность осуществления данного значения u_r.

Дисперсия (или вариация). Дисперсия переменной u определяется так:

$$\overline{(\Delta u)^2} = \sum_r P_r (u_r - \bar{u})^2.$$

Стандартное отклонение. Стандартное отклонение переменной представляет собой квадратный корень из дисперсии:

$$\underset{\sim}{\Delta} u = \left[\overline{(\Delta u)^2}\right]^{1/2}.$$

Плотность вероятности. Определение плотности вероятности $\mathcal{P}(u)$ заключается в том, что после умножения этой величины на величину интервала du мы получаем $\mathcal{P}(u)du$ — вероятность того, что непрерывная переменная u находится в интервале значений между u и $u+du$.

Основные формулы

Имеем N статистически независимых опытов, вероятность появления данного исхода опыта равна p ($q=(1-p)$ — вероятность непоявления исхода).

Вероятность появления n исходов при N испытаниях (биномиальное распределение):

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n q^{N-n}.$$

Среднее число осуществившихся исходов опыта

$$\bar{n} = Np.$$

Стандартное отклонение

$$\underset{\sim}{\Delta} n = \sqrt{Npq}.$$

Задачи

2.1. *Простая задача об игральной кости.* Какова вероятность выпадания шестерки или меньшего числа при трех бросаниях?

2.2. Рассмотрим случайные числа между 0 и 1. Какова вероятность того, что ровно пять из десяти мест после запятой заняты числами, меньшими 5?

2.3. *Бросание игральной кости.* Предположим, что все стороны кости выпадают с одинаковой вероятностью. Рассмотрим игру, которая заключается в бросании пяти таких костей. Найдите вероятность выпадания шестерки:

а) в одной кости,

б) по крайней мере в одной кости,

в) в двух костях.

2.4. *Вероятность выжить.* Иногда можно слышать о странной игре (автор не рекомендует ее!), когда в шестизарядный барабан револьвера вкладывают один боевой патрон. Затем барабан крутят и стреляют в себя. Какова вероятность остаться живым после

а) одного испытания?

б) двух испытаний?

в) N испытаний?

г) Какова вероятность быть застреленным при N испытаниях?

2.5. *Проблема случайных блужданий.* Человек начинает свое движение от фонаря посреди улицы, делая шаги равной длины l. Вероятность того, что он сделает шаг вправо, равна p, а вероятность того, что этот шаг будет сделан влево, равна $q=1-p$. Человек настолько пьян, что, делая данный шаг, он совершенно не помнит о направлении предыдущего. Таким образом, его шаги статистически независимы. Предположим, что он сделал N шагов.

а) Какова вероятность $P(n)$ того, что n этих шагов сделаны вправо, а остальные $N-n$ шагов влево?

б) Какова вероятность $P'(m)$ того, что смещение человека от фонаря равно ml, где m — целое число?

2.6. *Вероятность возвращения в исходную точку.* Допустим, что в предыдущей задаче $p=q$, так что вероятности смещения влево и вправо при каждом шаге равны. Какова вероятность того, что человек снова окажется у фонаря после N шагов:

а) если N четно?

б) если N нечетно?

2.7. *Одномерная диффузия атома.* Представим себе тонкую медную проволоку, натянутую вдоль оси x. Несколько атомов меди, расположенных вблизи $x=0$, сделаны радиоактивными (предположим, например, что их бомбардировали быстрыми частицами). При увеличении температуры нити подвижность атомов возрастает. При этом каждый атом может перескочить на соседнее место в кристаллической решетке, либо направо (в направлении $+x$) либо налево (в направлении $-x$). Соседние места, занимаемые атомом в решетке, разделены расстоянием l. Предположим, что время нахождения атома в данном месте решетки равно τ. Время τ есть быстро возрастающая функция абсолютной температуры решетки. Процесс перемещения атома вдоль нити в результате последовательных скачков между соседними местами решетки называется *диффузией*.

Предположим, что в момент времени $t=0$ температура нити быстро возрастает до некоторого большого значения и в дальнейшем остается неизменной.

а) Обозначим через $\mathcal{P}(x)dx$ вероятность того, что радиоактивный атом будет обнаружен по истечении времени t в интервале от x до $x+dx$. (Мы предполагаем, что $t \gg \tau$ для всех значений t, представляющих физический интерес, так как при высокой температуре нити τ достаточно мало.) Изобразите на графике примерный ход $\mathcal{P}(x)$ в зависимости от x для следующих трех случаев: 1) вскоре после $t=0$; 2) по прошествии относительно большого времени t; 3) по прошествии очень большого времени t.

б) На какое среднее расстояние $\overline{x}$ от начала координат смещается радиоактивный атом за время t?

в) Получите формулу для стандартного отклонения Δx смещения радиоактивного атома за время t.

2.8. *Вычисление дисперсии.* Используя общие свойства среднего, покажите, что дисперсия может быть вычислена по формуле:

$$\overline{(\Delta u)^2} = \overline{(u-\overline{u})^2} = \overline{u^2} - \overline{u}^2. \qquad \text{(I)}$$

Последнее выражение справа дает простой способ вычисления дисперсии. Покажите также, что из (I) следует общее неравенство

$$\overline{u^2} \geqslant \overline{u}^2. \qquad \text{(II)}$$

2.9. *Средние значения для одиночного спина.* Рассмотрим спин, равный $\frac{1}{2}$. Его магнитный момент μ с вероятностью p может быть направлен по полю и с вероятностью $q=1-p$ — против поля. В первом случае проекция момента на направление поля равна μ_0, во втором она равна $-\mu_0$.

а) Найдите, чему равно $\overline{\mu}$ и $\overline{\mu^2}$.

б) Вычислите $\overline{(\Delta\mu)^2}$, используя для этого формулу (I) из задачи 2.8. Покажите, что полученный результат согласуется с приведенной в тексте формулой (57).

2.10. *Неравенство* $\overline{u^2}\geqslant(\overline{u})^2$. Предположим, что переменная u принимает значения u_r с вероятностью P_r.

а) Используя определения $\overline{u}$ и $\overline{u^2}$ и помня условие нормировки $\sum_r P_r=1$, покажите, что

$$\overline{u^2}-(\overline{u})^2=\frac{1}{2}\sum_r\sum_s P_rP_s(u_r-u_s)^2, \qquad \text{(I)}$$

где каждое суммирование производится по всем возможным значениям переменной u.

б) На том основании, что в сумме (I) нет отрицательных членов, покажите, что

$$\overline{u^2}\geqslant(\overline{u})^2, \qquad \text{(II)}$$

причем знак равенства отвечает тому случаю, когда только одно значение u осуществляется с вероятностью, отличной от 0. Результат (II) повторяет результат задачи 2.8.

2.11. *Неравенство* $\overline{(u^n)^2}\leqslant\overline{u^{n+1}}\,\overline{u^{n-1}}$. Результат (I) предыдущей задачи допускает немедленное обобщение. Рассмотрим выражение

$$\sum_r\sum_s P_rP_s u_r^m u_s^m(u_r-u_s)^2, \qquad \text{(I)}$$

где m — любое целое число. При четном m это выражение не может быть отрицательным. При нечетном m это выражение положительно, если u_r и u_s отрицательны или положительны одновременно.

а) Выполнив показанные в (I) действия умножения, покажите, что

$$\overline{(u^n)^2}\leqslant\overline{u^{n+1}}\,\overline{u^{n-1}}, \qquad \text{(II)}$$

где $n=m+1$. При нечетном n это неравенство справедливо всегда. При n четном оно выполняется, если возможные значения u все положительные или все отрицательные. Знак равенства в (II) означает, что имеется только единственное значение u, осуществляющееся с вероятностью, отличной от нуля.

б) Покажите, что частным случаем (II) является неравенство

$$\overline{\left(\frac{1}{u}\right)}\geqslant\frac{1}{\overline{u}}, \qquad \text{(III)}$$

справедливое в том случае, если все возможные значения u положительны (или все отрицательны). Знак равенства отвечает специальному случаю, когда только одно значение u осуществляется с вероятностью, отличной от нуля.

2.12. *Метод оптимальных вложений.* Рассмотрим пример, который покажет, что различные способы усреднения одной и той же величины могут приводить к существенно различным результатам. Предположим, что кто-то хочет произвести вложение капитала, покупая в начале каждого месяца некоторое число акций какой-то компании. Стоимость одной акции c_r зависит от месяца покупки r и меняется от месяца к месяцу непредсказуемым образом. Рассмотрим два альтернативных метода вложений:

Метод *А* заключается в ежемесячной покупке одного и того же числа s акций, метод *Б* означает ежемесячную покупку акций на одну и ту же сумму денег m. После N месяцев наш покупатель окажется обладателем S акций, за которые он заплатил M денег. Наилучшим методом вложений, очевидно, является тот, при

котором за наименьшее количество денег приобретается наибольшее количество акций, т. е. метод, обеспечивающий большее значение отношения S/M.

а) Получите выражение для отношения S/M в методе *А*.

б) Получите выражение для S/M в методе *Б*.

в) Покажите, что *Б* является лучшим методом вложений, независимо от того, каким образом стоимость акций флуктуирует от месяца к месяцу.

[Указание. Воспользуйтесь неравенством (III) предыдущей задачи.]

2.13. *Система ядер со спином* 1. Рассмотрим ядро со спином 1 (это значит, что момент количества движения ядра равен $\hbar$). Составляющие магнитного момента этого ядра вдоль данного направления могут иметь три возможных значения, а именно $+\mu_0$, 0 и $-\mu_0$. Предположим, что ядро не является сферически-симметричным, а имеет, например, форму эллипса. Тогда в кристаллической решетке твердого тела будет существовать направление преимущественной ориентации этого ядра. Пусть вероятность того, что $\mu=\mu_0$, будет p, и вероятность того, что $\mu=-\mu_0$, также p, тогда вероятность $\mu_0=0$ равна $1-2p$.

а) Вычислите $\overline{\mu}$ и $\overline{\mu^2}$.

б) Вычислите $\overline{(\Delta\mu)^2}$.

в) Предположим, что твердое тело содержит N таких ядер и их взаимодействием друг с другом можно пренебречь. Обозначим через M полную составляющую магнитного момента вдоль заданного направления. Выразите $\overline{M}$ и стандартное отклонение ΔM через N, p и μ_0.

2.14. *Прямое вычисление* $\overline{n}$ *и* $\overline{(\Delta n)^2}$. Рассмотрим идеальную систему из N одинаковых спинов, равных $1/2$. Число n магнитных моментов, направленных «вверх», можно записать так: $n=u_1+u_2+\ldots+u_N$, где $u_i=1$, если магнитный момент направлен вверх, и $u_i=0$, если он направлен вниз. Используя это выражение и считая, что спины статистически независимы,

а) покажите, что $\overline{n}=N\overline{u}$,

б) покажите, что $\overline{(\Delta n)^2}=N\,\overline{(\Delta u)^2}$.

в) Предположим, магнитный момент имеет вероятность p быть направленным вверх и вероятность $q=1-p$ быть направленным вниз. Чему равны $\overline{u}$ и $\overline{(\Delta u)^2}$?

г) Сосчитайте $\overline{n}$ и $\overline{(\Delta n)^2}$ и покажите, что ваши результаты совпадают с формулами (66) и (67), полученными в тексте менее прямым методом.

2.15. *Флуктуации плотности в газе.* Рассмотрим идеальный газ из N молекул, находящийся в равновесном состоянии в сосуде объемом V_0. Обозначим через n число молекул в какой-то части V объема. Вероятность p того, что данная молекула находится в этой части объема, равна $p=V/V_0$.

а) Чему равно среднее число $\overline{n}$ молекул в части объема V? Выразите ваш ответ через N, V_0 и V.

б) Найдите стандартное отклонение Δn числа молекул в объеме V. Найдите $\Delta n/\overline{n}$, выразив результат через N, V_0 и V.

в) Каков ответ на вопрос (б), если $V\ll V_0$?

г) Каково значение стандартного отклонения Δn при $V\to V_0$?

д) Согласуется ли ответ на вопрос (б) с этим результатом?

2.16. *Дробовой эффект.* Рассмотрим случайное испускание электронов с зарядом e накаливаемой нитью вакуумной трубки. С хорошим приближением можно считать, что испускание данного электрона никак не влияет на вероятность испускания других электронов. Рассмотрим любой очень малый интервал времени Δt. Существует определенная вероятность p того, что электрон будет испущен из нити в этот интервал времени (тогда $q=1-p$ есть вероятность того, что электрон не будет испущен). Так как Δt очень мало́, то вероятность испускания электрона в течение времени Δt также весьма мала (т. е. $p\ll 1$), а вероятностью испускания двух электронов в течение времени Δt можно пренебречь. Рассмотрим интервал времени t, который во много раз больше Δt. Он содержит $N=t/\Delta t$ малых интервалов Δt, в течение которых может быть испущен электрон. Полный заряд, испущенный нитью за время t, можно записать в виде $Q=q_1+q_2+q_3+\ldots+q_N$, где q_i означает заряд, испущенный за время Δt. Таким образом, $q_i=e$ при испускании электрона и $q_i=0$, если электрон не был испущен.

а) Чему равен средний заряд $\overline{Q}$, испущенный нитью за время t?

б) Чему равна дисперсия $\overline{(\Delta Q)^2}$ заряда Q, испущенного нитью за время t? Чтобы упростить ответ, воспользуйтесь тем, что $p \ll 1$.

в) Среднее значение тока I за время t равно $\overline{Q}/t$. Получите величину отношения дисперсии $\overline{(\Delta I)^2}$ к среднему току $\overline{Q}/t$. Покажите, что это отношение равно $\overline{(\Delta I)^2}/\overline{I} = e/t$.

г) Ток испытывает флуктуации, которые тем сильнее выражены, чем меньше интервал времени t, т. е. чем меньше полное число электронов, участвующих в процессе эмиссии. Такие флуктуации называются *дробовым эффектом*. Вычислите стандартное отклонение тока ΔI, если среднее значение тока равно 1 *мка*, а время измерения равно 1 *сек*.

2.17. *Вычисление среднего квадратичного значения.* Батарея с электродвижущей силой V замкнута на сопротивление R. Мощность, рассеиваемая на этом сопротивлении, равна $P = V^2/R$. Сама батарея состоит из N индивидуальных элементов, соединенных последовательно, так что V равно сумме электродвижущих сил всех этих элементов. Так как батарея работала долго, то не все элементы находятся в хорошем состоянии. Пусть p — вероятность того, что э. д. с. отдельной ячейки имеет свое нормальное значение v, а $q = 1 - p$ есть вероятность того, что э. д. с. ячейки по каким-то причинам, например, из-за внутреннего закорачивания, равна нулю. Отдельные ячейки статистически независимы. Вычислите при этих условиях *среднюю* мощность P, рассеянную в сопротивлении, и выразите результат через N, v, p и R.

2.18. *Оценка ошибок измерения.* Мы измеряем расстояние в 50 *м*, укладывая последовательно деревянный метр 50 раз. Эта операция сопряжена с ошибками. Поэтому нельзя гарантировать, что расстояние между двумя соседними метками на земле будет в точности равно метру. Нам известно, однако, что расстояние между двумя последовательными метками с равной вероятностью лежит между 99,8 и 100,2 *см* и не выходит за эти пределы. Повторяя эту операцию 50 раз, мы проложим дистанцию, средняя величина которой равна 50 *м*. Найдите полную ошибку, вычислив стандартное отклонение в величине измеренной дистанции.

2.19. *Диффузия молекулы в газе.* Молекула газа может свободно перемещаться в пространстве. Обозначим через $\mathbf{s}$ ее смещение между двумя последовательными столкновениями. Пусть эти смещения, в первом приближении, будут статистически независимыми. Далее, так как нет преимущественного направления в пространстве, то молекула с равной вероятностью смещается в данном направлении и в противоположном. Таким образом, среднее смещение $\overline{\mathbf{s}}$ равно 0 (это значит, что равна нулю в среднем и каждая компонента этого смещения, т. е. $\overline{s_x} = \overline{s_y} = \overline{s_z} = 0$).

Полное смещение $\mathbf{R}$ молекулы после N последовательных столкновений можно записать в виде $\mathbf{R} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \ldots + \mathbf{s}_N$, где $\mathbf{s}_i$ обозначает смещение молекулы. Используя методы, рассмотренные в п. 2.5, ответьте на следующие вопросы:

а) Каково среднее смещение молекулы $\overline{\mathbf{R}}$ после N последовательных смещений?

б) Каково стандартное отклонение $\Delta R = \{\overline{(\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}})^2}\}^{1/2}$ этого смещения после N столкновений? В частности, чему равно ΔR, если *величина* каждого смещения одинакова и равна l?

2.20. *Распределение смещений случайных осцилляторов.* Смещение простого классического гармонического осциллятора в зависимости от времени имеет вид $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где ω — угловая частота колебаний, A — их амплитуда, а φ — произвольная постоянная, которая может принимать любое значение в интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Рассмотрим ансамбль, состоящий из таких осцилляторов с заданной частотой ω и амплитудой A. Пусть фаза этих осцилляторов является случайной величиной, причем вероятность того, что фаза находится в интервале от φ до $\varphi + d\varphi$, равна просто $d\varphi/2\pi$. Найдите вероятность $\mathcal{P}(x)dx$ того, что смещение данного осциллятора в момент времени t находится в интервале значений между x и $x + dx$.