Температура системы по отношению к данному термометру. Значение температурного параметра термометра, когда последний находится в тепловом равновесии с системой.

Тепловой резервуар. Макроскопическая система, которая настолько велика по сравнению с другими рассматриваемыми системами, что ее температура не меняется заметным образом при взаимодействии с этими системами.

Множитель Больцмана. Множитель $e^{-\beta E}$, где $\beta=(kT)^{-1}$, а E обозначает энергию.

Каноническое распределение. Распределение вероятности, согласно которому вероятность P_r найти систему в состоянии с энергией E_r выражается соотношением

$$P_r \propto e^{-\beta E_r},$$

где $\beta=(kT)^{-1}$ является абсолютным температурным параметром теплового резервуара, с которым система находится в равновесии.

Идеальный газ. Газ, в котором энергия взаимодействия между молекулами почти пренебрежимо мала по сравнению с их кинетической энергией.

Невырожденный газ. Газ, достаточно разреженный для того, чтобы среднее расстояние между молекулами было велико по сравнению со средней дебройлевской длиной волны молекул.

Уравнение состояния. Уравнение, связывающее объем, среднее давление и абсолютную температуру данной макроскопической системы.

Основные формулы

Определение абсолютной температуры:

$$\frac{1}{kT} = \beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}. \qquad \text{(I)}$$

Определение энтропии:

$$S = k \ln \Omega. \qquad \text{(II)}$$

Возрастание энтропии системы, которая, находясь при абсолютной температуре T, поглощает небольшое количество тепла $đQ$:

$$dS = \frac{đQ}{T} \qquad \text{(III)}$$

Каноническое распределение для систем, находящихся в тепловом равновесии с тепловым резервуаром при абсолютной температуре T:

$$P_r \propto e^{-\beta E_r}. \qquad \text{(IV)}$$

Уравнение состояния идеального невырожденного газа:

$$\bar{p} = nkT. \qquad \text{(V)}$$

Задачи

4.1. *Водяной термометр.* Плотность спирта, подобно плотности большинства веществ, уменьшается с увеличением абсолютной температуры. Вода ведет себя иначе: когда абсолютная температура становится больше температуры плавления (т. е. температуры перехода льда в воду), плотность воды вначале возрастает, проходит через максимум и затем уменьшается.

Предположим, что стеклянная трубочка обычного термометра вместо окрашенного спирта наполнена окрашенной водой, и как обычно, температура, показываемая таким термометром, определяется длиной столбика жидкости. Пусть такой термометр, находящийся в контакте с одной из двух систем, A или B, показывает температуру θ_A или θ_B соответственно.

а) Допустим, что температура θ_A системы A больше (выше) температуры θ_B системы B. Следует ли из этого, что тепло обязательно будет течь от системы A к системе B, если обе системы окажутся в тепловом контакте?

б) Предположим, что температура θ_A и θ_B обеих систем оказались равными. Следует ли из этого, что после осуществления теплового контакта между этими системами не будет проходить потока тепла?

4.2. *Значение kT при комнатной температуре.* Опыт показывает, что один моль любого газа при комнатной температуре и атмосферном давлении (10^6 *дин/см*^{2}) занимает объем 24 *л*. Воспользуйтесь этим результатом для определения величины kT при комнатной температуре. Выразите ответ в эргах и электрон-вольтах (1 *эв*$=1{,}60\cdot10^{-12}$ *эрг*).

4.3. *Изменение числа состояний с энергией.* Рассмотрим *любую* макроскопическую систему при комнатной температуре.

а) Воспользовавшись определением абсолютной температуры, найдите процентное увеличение числа состояний, доступных такой системе, при возрастании ее энергии на 10^{-3} *эв*.

б) Предположим, что наша система поглотила единичный фотон видимого света (имеющего длину волны $5\cdot10^{-5}$ *см*). Во сколько раз изменилось число доступных системе состояний?

4.4. *Поляризация атомных спинов.* Рассмотрим вещество, состоящее из атомов со спином 1/2 и магнитным моментом μ_0. Этот момент вызван существованием в оболочке атома неспаренного электрона и поэтому его величина имеет порядок магнетона Бора, т. е. $\mu_0\approx10^{-20}$ *эрг/гс*. В опытах по рассеянию частиц на атомах часто бывает необходимо иметь мишень, в которой атомы поляризованы в данном направлении. Этого можно достичь с помощью сильного магнитного поля **B** и охлаждения вещества до достаточно низкой температуры.

В обычных лабораторных условиях трудно получить магнитное поле больше 50 000 *гс*. Найдите абсолютную температуру T, при которой число атомных магнитных моментов, направленных параллельно полю, будет по крайней мере в три раза больше числа моментов, имеющих противоположное направление. Выразите ответ через отношение $T/T_к$, где $T_к$ — комнатная температура.

4.5. *Возможный метод получения поляризованной протонной мишени.* В опытах ядерной физики и физики элементарных частиц часто возникает необходимость рассеивать частицы на протонах, спины которых имеют преимущественное направление (поляризованная протонная мишень). Спин протона равен 1/2, а магнитный момент $1{,}4\cdot10^{-23}$ *эрг/гс*. Предположим, что мы хотим метод, описанный в предыдущей задаче, использовать для получения поляризованной мишени, взяв для этой цели кусок парафина (он содержит много протонов). В нашем распоряжении магнитное поле в 50 000 *гс* и возможность охладить мишень до очень низкой абсолютной температуры T. Какой должна быть эта температура, чтобы после установления равновесия число протонных моментов, направленных по полю, по меньшей мере в три раза превосходило число моментов, направленных противоположно? Выразите ваш ответ через отношение $T/T_к$, где $T_к$ — комнатная температура.

4.6. *Резонансное поглощение, вызванное магнетизмом ядра.* Некоторое количество воды помещено во внешнее магнитное поле **B**. Спин каждого протона может быть направлен либо «вверх», либо «вниз» и поэтому он может находиться в двух возможных состояниях с энергиями $\mp\mu_0B$. Предположим, что мы возбудили радиочастотное магнитное поле, частота ν которого такова, что выполняется условие резонанса $h\nu=2\mu_0B$, где $2\mu_0B$ — разность энергий двух возможных состояний протонов, а h — постоянная Планка. Высокочастотное поле вызывает переходы между этими двумя состояниями, причем для протонов вероятности переходов из состояния «вверх» в состояние «вниз» и обратно равны. Величина энергии, поглощенной протонами из высокочастотного поля, пропорциональна поэтому разности между числом протонов в обоих состояниях.

Предположим, что абсолютная температура равна T и протоны находятся в состоянии, очень близком к тепловому равновесию. Как будет зависеть от T поглощающая способность воды? Воспользуйтесь приближением, основанном на том, что μ_0 настолько мало́, что $\mu_0B\ll kT$.

4.7. *Относительное число атомов в опыте с атомными пучками.* Точные измерения магнитного момента электрона чрезвычайно важны для современной квантовой теории электромагнитного поля. Впервые точные измерения такого рода выполнили Куш и Фолей [Kusch and Foley, Phisical Review **74**, 250 (1948)]. Эти измерения заключались в сравнении полного магнитного момента атомов галлия (Ga) в двух различных состояниях, имеющих спектроскопические

обозначения $^2P_{1/2}$ и $^2P_{3/2}$ соответственно. Состоянию $^2P_{1/2}$ отвечает наименьшая возможная энергия атома. (Существуют *два* таких состояния с одной и той же энергией, им отвечают две возможные ориентации в пространстве полного момента количества движения атома.) Энергия состояния $^2P_{3/2}$ превышает энергию состояния $^2P_{1/2}$ на 0,102 *эв*: эта величина точно известна из спектроскопических измерений. (Существуют *четыре* состояния с такой энергией, соответствующих четырем возможным ориентациям в пространстве полного момента количества движения атома.)

Мы хотим сравнить число атомов в $^2P_{3/2}$ и $^2P_{1/2}$ состояниях. Такие атомы можно получить, нагревая галлий в «печке» до высокой температуры T. Небольшое отверстие в стенке позволяет атомам проникать в окружающий печку вакуум. Такие атомы образуют *атомный пучок*, с которым и выполняются опыты по измерению магнитного момента.

а) Предположим, что абсолютная температура T печки равна $3T_к$, где $T_к$ — комнатная температура. Каково отношение числа атомов в пучке, находящихся в состояниях $^2P_{1/2}$ и $^2P_{3/2}$?

б) Наибольшая температура, которой можно достичь в печке, близка к $6T_к$. Каково искомое отношение в этом случае? Удобно ли оно для описываемых опытов?

4.8. *Средняя энергия системы с двумя дискретными состояниями энергии.* Система состоит из N частиц, слабо взаимодействующих между собой. Каждая из частиц может находиться в одном из двух состояний, энергии которых равны ε_1 и ε_2 соответственно, причем $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

а) Не делая точных вычислений, нарисуйте график примерного хода энергии $\overline{E}$ системы в зависимости от ее абсолютной температуры T. Чему равно $\overline{E}$ в пределах очень малой и очень большой абсолютной температуры T? Вблизи какой температуры $\overline{E}$ меняется от низкотемпературного до высокотемпературного предельного значения?

б) Получите точное выражение для средней энергии системы. Покажите, что это выражение подтверждает качественную температурную зависимость, полученную в а).

4.9. *Упругие свойства резины.* Резиновый стержень, находящийся при абсолютной температуре T, одним концом жестко закреплен, к другому его концу подвешен груз w. Предположим, что стержень имеет следующую микроскопическую структуру: он состоит из полимерных цепочек, образованных из N ячеек, концы которых соединены между собой. Длина каждой ячейки a; ячейка может быть ориентирована параллельно или антипараллельно вертикальному направлению. Получите выражение для средней длины стержня L в зависимости от w. (Следует пренебречь кинематической энергией и весом ячеек, а также любыми взаимодействиями между ними.)

4.10. *Поляризация твердого тела, вызванная атомами примеси.* Рассмотрим простую двумерную модель ситуации, представляющей большой физический интерес. Твердое тело находится при абсолютной температуре T и содержит в единице объема N_0 отрицательно заряженных ионов примеси. Эти ионы замещают некоторые из обычных атомов. Твердое тело в целом электрически нейтрально, так как каждому отрицательному иону с зарядом $-e$ отвечает расположенный рядом положительный ион с зарядом $+e$. Положительные ионы имеют малые размеры и могут свободно передвигаться по кристаллической решетке. При отсутствии внешнего электрического поля их можно с равной вероятностью обнаружить в любом из четырех положений, находящихся на равных расстояниях от неподвижного отрицательного иона примеси (рис. 4.14, постоянная решетки равна a).

Пусть в направлении x приложено слабое электрическое поле $\mathscr{E}$. Вычислите электрическую поляризацию, т. е. значение среднего электрического дипольного момента в единице объема, направленного вдоль оси x.

4.11. *Свойство минимума «свободной энергии» для системы, находящейся в контакте с тепловым резервуаром.* Если осуществить тепловой контакт между двумя системами, A и A', то их полная энтропия возрастет. В согласии с соот-

ношением (20) мы имеем

$$\Delta S + \Delta S' \geqslant 0. \qquad (I)$$

Состояние равновесия будет достигнуто после того как система A поглотит такое количество тепла $Q = \Delta \bar{E}$, что полная энтропия $S + S'$ составной системы станет максимальной.

Допустим, что система A мала по сравнению с системой A', и последнюю можно рассматривать как тепловой резервуар, находящийся при абсолютной температуре T'. В этом случае изменение энтропии $\Delta S'$ системы A' легко выразить через $\Delta \bar{E}$ и T'. Покажите, что из (I) следует, что величина $F = \bar{E} - T'S$ *уменьшается* и достигает *минимума* в состоянии равновесия. (Функция F называется *гельмгольцевской свободной энергией* системы A при постоянной температуре T'.)

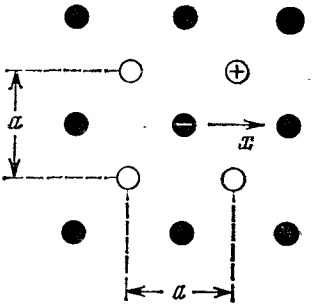

Рис. 4.14. Атомы примеси в кристаллической решетке твердого тела.

4.12. *Квазистатическое сжатие газа.* Рассмотрим термически изолированный идеальный газ, состоящий из частиц, помещенных в сосуд объемом V. Вначале газ находился при абсолютной температуре T. С помощью движущегося поршня будем очень медленно уменьшать объем газа. Ответьте, не прибегая к вычислениям, на следующие вопросы:

а) Что происходит с уровнями энергии каждой частицы?

б) Будет ли возрастать или уменьшаться средняя энергия частицы?

в) Положительна или отрицательна работа, совершаемая над газом при уменьшении его объема?

г) Будет ли возрастать или уменьшаться средняя энергия частицы, отсчитанная от энергии основного состояния?

д) Будет ли возрастать или уменьшаться абсолютная температура газа?

4.13. *Квазистатическое намагничивание магнитного вещества.* Рассмотрим теоретически изолированную систему из N спинов 1/2. Пусть магнитный момент каждого спина равен μ_0 и система помещена в магнитное поле B. Допустим, что магнитное поле медленно увеличивается до некоторого нового значения. Не прибегая к вычислениям, ответьте на следующие вопросы:

а) Что происходит с уровнями энергии каждого спина?

б) Будет ли возрастать или уменьшаться средняя энергия каждого спина?

в) Будет ли положительной или отрицательной работа, совершаемая над системой при возрастании магнитного поля?

г) Будет ли возрастать или уменьшаться энергия спина, отсчитанная от энергии основного состояния?

д) Будет ли возрастать или уменьшаться абсолютная температура системы?

4.14. *Уравнение состояния для смеси идеальных газов.* Пусть в сосуде объемом V находится N_1 молекул одного и N_2 молекул другого типа. (Это могут быть, например, молекулы O_2 и H_2.) Допустим, что газ достаточно разрежен, чтобы считаться идеальным. Каково среднее давление $\bar{p}$ газа, если он находится при абсолютной температуре T?

4.15. *Давление и плотность энергии идеального газа.* Воспользовавшись формулами пп. 4.7 и 4.8 для среднего давления $\bar{p}$ и средней энергии газа $\bar{E}$, покажите, что

$$\bar{p} = \frac{2}{3}\bar{u}, \qquad (I)$$

где $\bar{u}$ — средняя *кинетическая* энергия, приходящаяся на единицу объема газа. Сравните точную формулу (I) с приближенным выражением (1.21), полученным в главе 1 на основании классического рассмотрения индивидуальных столкновений газовых молекул со стенками сосуда.

4.16. *Давление и плотность энергии для любого идеального нерелятивистского газа.* Выведем снова результат предыдущей задачи, имея в виду подчеркнуть его

общность и понять происхождение коэффициента 2/3. Рассмотрим идеальный газ из N одноатомных молекул, находящихся в ящике с ребрами длиной L_x, L_y, L_z. Если частицы являются нерелятивистскими, их энергия ε связана с импульсом $\hbar\mathbf{K}$ следующим образом:

$$\varepsilon=\frac{(\hbar K)^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}(K_x^2+K_y^2+K_z^2). \qquad \text{(I)}$$

Возможные значения K_x, K_y, K_z даны формулой (3.13).

а) Воспользуйтесь этим выражением, чтобы вычислить силу F_r, с которой частица, находящаяся в данном состоянии r с квантовыми числами n_x, n_y, n_z, действует на правую стенку.

б) Получите с помощью простого усреднения величину средней силы $\bar{F}$, выраженную через среднюю энергию $\bar{\varepsilon}$ частицы. Воспользуйтесь тем, что для газа, находящегося в равновесии, из соображений симметрии следует $\overline{K_x^2}=\overline{K_y^2}=\overline{K_z^2}$.

в) Теперь покажите, что среднее давление, создаваемое газом, равно

$$\bar{p}=\frac{2}{3}\bar{u}, \qquad \text{(II)}$$

где $\bar{u}$ — средняя энергия единицы объема газа.

4.17. *Давление и плотность энергии электромагнитного излучения.* Рассмотрим электромагнитное излучение (т. е. фотонный газ) в ящике с ребрами длиной L_x, L_y, L_z. Так как фотон распространяется со скоростью света c, он является *релятивистской* частицей, и его энергия следующим образом связана с импульсом $\hbar\mathbf{K}$:

$$\varepsilon=c\hbar K=c\hbar\,(K_x^2+K_y^2+K_z^2)^{1/2}, \qquad \text{(I)}$$

где возможные значения K_x, K_y и K_z опять даны формулой (3.13).

а) С помощью этого выражения вычислите силу F_r, с которой фотон, находящийся в данном состоянии r с квантовыми числами n_x, n_y и n_z, действует на правую стенку.

б) Получите с помощью простого усреднения величину средней силы $\bar{F}$, выраженную через среднюю энергию $\bar{\varepsilon}$ фотона. Воспользуйтесь тем, что если излучение находится в равновесии со стенками сосуда, то из соображений симметрии следует, что $\overline{K_x^2}=\overline{K_y^2}=\overline{K_z^2}$.

в) Теперь докажите, что среднее давление $\bar{p}$ излучения на стенки равно

$$\bar{p}=\frac{1}{3}\bar{u}, \qquad \text{(II)}$$

где $\bar{u}$ — среднее значение электромагнитной энергии излучения в единице объема.

г) Почему коэффициент пропорциональности в (II) равен 1/3, тогда как в случае нерелятивистского газа, рассмотренного в предыдущей задаче, он равен 2/3?

4.18. *Средняя энергия, выраженная через статистическую сумму.* Рассмотрим систему любой сложности, находящуюся в тепловом равновесии с тепловым резервуаром, абсолютная температура которого $T=(k\beta)^{-1}$. В этом случае вероятность нахождения системы в одном из возможных состояний r с энергией E_r задается каноническим распределением (49). Получите выражение для средней энергии системы. Покажите, что соображения, использованные в п. 4.7, применимы в общем случае, и получите общую формулу

$$\bar{E}=-\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}, \qquad \text{(I)}$$

где

$$Z=\sum_r e^{-\beta E_r}. \qquad \text{(II)}$$

В этой формуле суммирование производится по всем возможным состояниям системы и полученная сумма носит название *статистической суммы* системы.

4.19. *Среднее давление, выраженное через статистическую сумму.* Рассмотрим снова систему задачи 4.18. Эта система (она может быть газом, жидкостью или твердым телом) находится в тепловом равновесии с тепловым резервуаром при абсолютной температуре T.

Для простоты допустим, что система заключена в ящик с ребрами длиной L_x, L_y, L_z. Покажите, что соображения, использованные в п. 4.8, имеют общее значение, и получите следующие, весьма общие результаты:

а) Покажите, что средняя сила $\overline{F}$, с которой система действует на свою правую грань, всегда следующим образом выражается через статистическую сумму системы:

$$\overline{F}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial L_x}. \qquad \text{(I)}$$

Здесь Z определяется формулой (II) предыдущей задачи.

б) Если система изотропна, то функция Z не может зависеть от отдельных размеров L_x, L_y и L_z, а зависит от объема $V=L_xL_yL_z$ системы. Покажите, что в этом случае из (I) вытекает следующее выражение для среднего давления:

$$p=\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial V}. \qquad \text{(II)}$$

4.20. *Статистическая сумма для газа как целого.* Рассмотрим идеальный газ, состоящий из N одноатомных молекул.

а) Напишите выражение для статистической суммы Z всего газа. Используя свойства экспоненциальной функции, покажите, что Z можно написать в виде

$$Z=Z_0^N, \qquad \text{(I)}$$

где Z_0 — статистическая сумма отдельной молекулы, вычисленная в п. 4.7.

б) Воспользовавшись (I) и общей формулой, приведенной в задаче 4.18, вычислите среднюю энергию газа. Покажите, что зависимость (I) непосредственно вытекает из того, что средняя энергия газа должна быть в N раз больше средней энергии молекулы.

в) Воспользуйтесь (I) и общей формулой, приведенной в задаче 4.19, чтобы вычислить среднее давление газа. Покажите, что зависимость (I) объясняется тем, что $\overline{p}$ должно быть в N раз больше среднего давления, возникающего от одной молекулы.

4.21. *Средняя энергия магнитного момента.* Рассмотрим единственный спин, равный 1/2, находящийся в контакте с тепловым резервуаром при абсолютной температуре T. Спин обладает магнитным моментом μ_0 и находится во внешнем магнитном поле B.

а) Вычислите статистическую сумму Z для этого спина.

б) Воспользуйтесь полученным значением Z и общей формулой (I) задачи 4.18, чтобы вычислить зависимость средней энергии $\overline{E}$ спина от температуры T и поля B.

в) Покажите, что полученное значение $\overline{E}$ удовлетворяет выражению $\overline{E}=-\overline{\mu}B$, где $\overline{\mu}$ — среднее значение составляющей магнитного момента, полученное выше [см. формулу (59)].

4.22. *Средняя энергия гармонического осциллятора.* Масса и коэффициент упругости гармонического осциллятора таковы, что классическая угловая частота колебаний равна ω. При квантовомеханическом описании такой осциллятор характеризуется последовательностью дискретных состояний, обладающих энергией

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \qquad \text{(I)}$$

Квантовое число n, обозначающее эти состояния, может принимать все целые значения

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad \text{(II)}$$

Примером гармонического осциллятора может служить атом в кристаллической решетке твердого тела, колеблющийся около своего положения равновесия.

Предположим, что такой гармонический осциллятор находится в тепловом равновесии с тепловым резервуаром при абсолютной температуре T. Выполните следующие действия, необходимые для нахождения средней энергии $\overline{E}$ такого осциллятора.

а) Вычислите статистическую сумму Z такого осциллятора, воспользовавшись определением (II) задачи 4.18.

б) Используя формулу (I) задачи 4.18, найдите выражение для средней энергии осциллятора.

в) Покажите на графике характер зависимости средней энергии $\overline{E}$ от абсолютной температуры T.

г) Предположим, что абсолютная температура T настолько мала, что $kT \ll \hbar\omega$. Что можно сказать, не прибегая к вычислениям и используя только значения уровней энергии (I), о величине средней энергии $\overline{E}$ в этом случае. Описывает ли общая формула, полученная вами в б), этот предельный случай?

д) Предположим, что температура настолько велика, что $kT \gg \hbar\omega$. Каково в этом случае предельное значение средней энергии, следующее из б). Как это значение зависит от T? от ω?

***4.23.** *Средняя энергия вращения двухатомной молекулы.* В классической механике кинетическая энергия двухатомной молекулы, вращающейся вокруг оси, перпендикулярной к линии, соединяющей оба атома, равна

$$E = \frac{\mathbf{J}^2}{2A} = \frac{J^2}{2A},$$

где $\mathbf{J}$ — момент количества движения, и A — момент инерции молекулы. При квантовомеханическом описании мы имеем следующие дискретные значения энергии:

$$E_j = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2A}. \qquad \text{(I)}$$

Здесь квантовое число j определяет величину момента количества движения $\mathbf{J}$. Это число может принимать следующие значения:

$$j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad \text{(II)}$$

Каждому значению j соответствует $(2j+1)$ возможных квантовых состояний, отвечающих различной возможной ориентации в пространстве вектора момента количества движения $\mathbf{J}$.

Предположим, что наша двухатомная молекула находится в газе, находящемся в тепловом равновесии при температуре T. Выполните следующие вычисления, необходимые для получения средней энергии вращения двухатомной молекулы:

а) Воспользовавшись определением (II) задачи 4.18, найдите статистическую сумму Z. (Обратите внимание на то, что эта сумма содержит члены, соответствующие каждому индивидуальному состоянию молекулы.) Допустим, что T настолько велико, что $kT \gg \hbar^2/2A$ (это условие выполняется для большинства двухатомных молекул при комнатной температуре). Покажите, что в этом случае сумму Z можно заменить интегралом, используя $u = j(j+1)$ в качестве непрерывной переменной.

б) Используйте общую формулу (I) задачи 4.18 для вычисления средней энергии вращения двухатомной молекулы в указанном интервале температур.

4.24. *Число атомов твердого тела в промежуточном положении (приближенное рассмотрение).* Рассмотрим твердое тело в виде кристалла, состоящего из N атомов и находящегося при абсолютной температуре T. Обычное положение, занимаемое атомами в решетке кристалла, показано черными кружками на рис. 4.15, *а*. Атом может, однако, находиться в одном из промежуточных положений, показанных на рисунке светлыми точками. Энергия атома в таком положении на величину ε больше энергии атома в нормальном положении. Поэтому, если абсо-

лютная температура T кристалла достаточно мала, все атомы занимают нормальные положения. С повышением температуры ситуация меняется. Допустим, что мы имеем атомы, которые могут занимать нормальные и промежуточные положения. Нас интересует следующий вопрос: каково среднее число атомов, занимающих при данной температуре T промежуточные положения? Приближенный ответ на этот вопрос можно получить следующим образом.

а) Сначала рассмотрим некоторый отдельный атом. Предположим, что он может находиться в одном из двух состояний, нормальном или промежуточном. Таким образом, система может находиться в одном из двух состояний, А или Б.

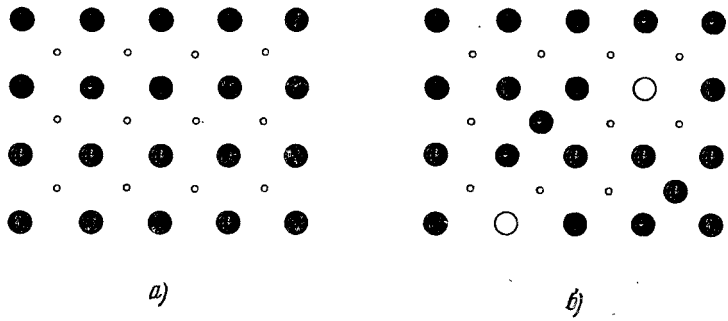

Рис. 4.15. *а*) Все атомы твердого тела (черные кружки) находятся в своих нормальных положениях, а возможные промежуточные положения (белые точки) не заняты. *б*) При более высоких температурах часть промежуточных положений может быть занята, как показано на рисунке.

А) Атом в нормальном положении; в промежуточном положении атома нет.
Б) В нормальном положении атома нет; атом в промежуточном положении.

Чему равно отношение $P_Б/P_А$ вероятностей $P_Б$ и $P_А$ обнаружить эти два положения?

б) Теперь рассмотрим все твердое тело. Предположим, что в промежуточном положении находится $\bar{n}$ атомов. Это означает, что имеется недостаток $\bar{n}$ атомов в нормальном положении. Любое из $\bar{n}$ пустых нормальных положений может комбинировать с любым из $\bar{n}$ промежуточных, поэтому ситуация Б может осуществиться $\bar{n}^2$ различными способами, и, следовательно, вероятность $P_Б$ того, что один из атомов твердого тела окажется в положении Б, пропорциональна $\bar{n}^2$, если пустые нормальные и занятые промежуточные положения распределены случайно. Итак, $P_Б \propto \bar{n}^2$. Покажите с помощью аналогичных рассуждений, что $P_А \propto (N-\bar{n})^2$.

в) Воспользовавшись результатами а) и б), предполагая, что $\bar{n} \ll N$, покажите, что

$$\frac{\bar{n}}{N} = e^{-(1/2)\beta\varepsilon}. \qquad (I)$$

4.25. *Число атомов твердого тела в промежуточном состоянии* (*точное рассмотрение*). Вернемся к ситуации, рассмотренной в задаче 4.24, и попытаемся найти вероятность $P(n)$ того, что n промежуточных положений занято. Этому, разумеется, отвечает n свободных нормальных положений.

а) Какова вероятность осуществления такой ситуации, когда n промежуточных атомов распределены данным определенным образом, а n пустых нормальных состояний также распределены каким-то определенным образом?

б) Сколькими способами можно распределить n атомов между N возможными промежуточными положениями? Сколькими способами можно разместить n атомов среди N нормальных положений?

в) Воспользовавшись результатами а) и б), покажите, что

$$P(n) \propto \left[\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\right]^2 e^{-\beta n\varepsilon}. \qquad \text{(I)}$$

г) Вероятность $P(n)$ имеет резкий максимум для некоторого значения $n=\tilde{n}$. Чтобы найти значение $\tilde{n}$, рассмотрим $\ln P(n)$ и постараемся решить уравнение $(\partial \ln P/\partial n)=0$. Так как мы имеем дело с факториалами больших чисел, можно воспользоваться приближением Стирлинга [см. (М.10)]. Покажите, что для $\tilde{n} \ll N$ справедливо отношение

$$\frac{\tilde{n}}{N} = e^{-(1/2)\beta\varepsilon}. \qquad \text{(II)}$$

***4.26.** *Тепловая диссоциация атома.* Атомы идеального газа находятся в ящике с ребрами длиной L_x, L_y, L_z. Вся система находится в равновесии при некоторой температуре T, масса атома равна M. Атом может диссоциировать на ион A^+ и электрон e^-:

$$A \rightleftarrows A^+ + e^-.$$

Чтобы разрушить связь электрона с атомом, необходимо затратить *энергию ионизации* u.

Рассматривая отдельный атом, мы скажем, что он может находиться в двух возможных состояниях Н и Д:

Н) Атом не диссоциирован. Его энергия E равна

$$E = \varepsilon,$$

где ε — кинетическая энергия центра масс. Как обычно, энергия поступательного движения атома определяется набором квантовых чисел (n_x, n_y, n_z).

Д) Атом диссоциирован на электрон с массой m и положительный ион, масса которого близка к M (так как $m \ll M$). Взаимодействием иона и электрона после диссоциации можно пренебречь. В этом случае полная энергия диссоциированной системы, состоящей из двух отдельных частиц, равна

$$E = \varepsilon^+ + \varepsilon^- + u, \qquad \text{(I)}$$

где ε^+ и ε^- — кинетические энергии иона и электрона соответственно, а u — энергия ионизации. Состояние поступательного движения диссоциированной системы характеризуется набором квантовых чисел иона (n_x^+, n_y^+, n_z^+) и электрона (n_x^-, n_y^-, n_z^-).

а) Воспользовавшись каноническим распределением, найдите, с точностью до коэффициента пропорциональности C, вероятность $P_{\text{Н}}$ того, что атом находится в одном из возможных недиссоциированных состояний (Н).

б) Воспользовавшись каноническим распределением, найдите, с точностью до того же коэффициента пропорциональности C, вероятность $P_{\text{Д}}$ того, что атом находится в одном из возможных диссоциированных состояний (Д).

в) Найдите отношение $P_{\text{Д}}/P_{\text{Н}}$. Как оно зависит от температуры T и объема V?

г) Теперь рассмотрим весь газ. Он содержит N атомов.

Допустим, что из них в среднем $\bar{n}$ атомов диссоциировано. Тогда в ящике находится $\bar{n}$ ионов, $\bar{n}$ электронов и $(N-\bar{n})$ недиссоциированных атомов. Диссоциированное состояние может быть реализовано $\bar{n}\cdot\bar{n}=\bar{n}^2$ возможными способами, а недиссоциированное $(N-\bar{n})$ способами. С помощью качественных оценок, подобных тем, которые были исследованы в задаче 4.29, можно показать, что

$$\frac{P_{\text{Д}}}{P_{\text{Н}}} = \frac{\bar{n}^2}{N-\bar{n}} \approx \frac{\bar{n}^2}{N},$$

если $\bar{n} \ll N$. Получите точное выражение для $(\bar{n}/N)$ в зависимости от абсолютной температуры T и плотности (N/V) газа.

д) Обычно $kT \ll u$. Можно ли ожидать, что в этих условиях бо́льшая часть атомов будет диссоциирована?

е) Предположим, что $kT \gg u$, но объем ящика можно сделать произвольно большим, сохраняя температуру T постоянной. Может ли в этом случае бо́льшая часть атомов быть диссоциированной? Дайте простое физическое объяснение полученному результату.

ж) Внутренняя часть Солнца состоит из очень горячего и плотного газа, тогда как внешняя («корона») менее плотна и находится при меньшей температуре. Изучение спектральных линий Солнца показывает, что атом может быть ионизован в короне и находится в неионизованном состоянии в более глубоких областях Солнца, где абсолютная температура гораздо выше. Как можно объяснить этот факт?

4.27. *Получение плазмы нагреванием.* Нагревая газ до достаточно высокой температуры, можно получить *плазму*, состоящую из значительного числа диссоциированных атомов. Чтобы изучить практическую возможность такого процесса, применим результаты задачи 4.26 к парам цезия. Атом цезия имеет небольшую энергию ионизации, равную $u=3{,}89$ *эв* и атомный вес 132,9.

а) Выразите степень диссоциации $\bar{n}/N$ в задаче 4.26 через T и среднее давление p газа.

б) Предположим, что пары цезия нагреты до абсолютной температуры, в четыре раза превышающей комнатную, и находятся при давлении 10^3 *дин/см*^{2} (т. е. 10^{-3} от атмосферного). Вычислите процент пара, ионизованного в этих условиях.

4.28. *Зависимость энергии от температуры для идеального газа.* Зависимость числа состояний идеального газа из одноатомных молекул от полной энергии E газа была рассмотрена в задаче 3.8. Воспользуйтесь этим результатом и определением $\beta=\partial \ln \Omega/\partial E$, чтобы выразить энергию E через абсолютную температуру $T=(k\beta)^{-1}$. Сравните полученное выражение с выражением для $\bar{E}(T)$, полученном в п. 4.17.

4.29. *Зависимость энергии от температуры для системы спинов.* В задаче 3.9 было найдено число состояний $\Omega(E)$ для системы из N спинов 1/2, обладающих магнитным моментом μ_0 и находящихся в магнитном поле B.

а) Воспользовавшись этим результатом и определением $\beta=\partial \ln \Omega/\partial E$, выразите энергию E системы через абсолютную температуру $T=(k\beta)^{-1}$.

б) Полный магнитный момент системы связан с полной энергией E простым соотношением. Используйте результат а), чтобы выразить M через T и B. Сравните это выражение с выражением (61) и (59) для $\bar{M}_0$.

***4.30.** *Отрицательная абсолютная температура и поток тепла в системе спинов.* Система, находящаяся в магнитном поле B, состоит из N спинов 1/2, каждый из которых имеет магнитный момент μ_0. В задаче 3.9 было найдено число состояний $\Omega(E)$ такой системы как функции ее полной энергии E.

а) Выразите графически характер зависимости $\ln \Omega$ от E. Заметьте, что наименьшая энергия системы равна $E_0=-N\mu_0 B$, а наибольшая $+N\mu_0 B$ и что кривая симметрична относительно значения $E=0$.

б) Используйте график а) для получения графика зависимости β от E. Заметьте, что $\beta=0$, если $E=0$.

в) Используйте график б) для получения графика зависимости абсолютной температуры T от E. Что происходит с T вблизи $E=0$? Каков знак T для $E<0$ и для $E>0$?

г) Вблизи $E=0$ T испытывает разрыв непрерывности. Поэтому более удобно иметь дело с величиной β. Покажите, что $\partial\beta/\partial E$ всегда положительно. Вспомните, что если две системы находятся в тепловом контакте, тепло всегда поглощается системой, имеющей большее значение величины β. Заметим, что это утверждение справедливо для любых систем, независимо от того, положительна или отрицательна их абсолютная температура.