Но интеграл, стоящий справа, вообще не зависит от β, и дифференцируя (46), мы получаем

$$\bar{\varepsilon}_i = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\ln\beta\right) = \frac{1}{2\beta}$$

или

$$\boxed{\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}kT.} \tag{48}$$

Отметим, что хотя в начале вычислений мы имели дело с многократным интегралом, окончательный результат получен вообще без всякого интегрирования.

Если в функциях (43) и (47) импульс p_i заменить на координату q_i, все предыдущие рассуждения не изменятся, и мы опять получим результат (48). Таким образом, мы пришли к выводу, известному под названием *теоремы о равномерном распределении* энергии.

Если описываемая классической статистической механикой система находится в равновесии при абсолютной температуре T, то каждому независимому квадратичному члену в выражении для энергии соответствует среднее значение, равное $^1/_2\, kT$.	(48а)

6.6. Приложения теоремы о равномерном распределении

Удельная теплоемкость одноатомного идеального газа. Полная энергия молекулы такого газа просто равна кинетической энергии:

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \tag{49}$$

Из теоремы о равномерном распределении следует, что среднее значение каждого из трех членов (49) равно $^1/_2\, kT$. Отсюда следует, что

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT. \tag{50}$$

Так как моль газа содержит N_a молекул, то средняя энергия газа равна

$$\bar{E} = N_a\left(\frac{3}{2}kT\right) = \frac{3}{2}RT, \tag{51}$$

где $R \equiv N_a k$ — газовая постоянная. На основании (5.23) мы получаем следующее значение удельной теплоемкости c_V при постоянном объеме:

$$c_V = \left(\frac{\partial\bar{E}}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}R. \tag{52}$$

Это значение совпадает с результатом, полученным в (5.26) с помощью квантовомеханических соображений для газа, достаточно разреженного, чтобы его можно было считать идеальным и невырожденным*).

Кинетическая энергия молекулы любого газа. Рассмотрим любой газ, не обязательно идеальный. Энергия любой молекулы с массой m может быть записана в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^{(\text{к})} + \varepsilon', \quad \text{где} \quad \varepsilon^{(\text{к})} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Первый член равен кинетической энергии движения центра масс молекулы; он зависит от составляющих импульса центра масс. Член ε' может зависеть от положения центра масс молекулы (если молекула находится во внешнем силовом поле или если она заметным образом взаимодействует с другими молекулами), а также от координат и импульсов, описывающих вращение и колебание атомов молекулы относительно ее центра масс (если молекула не является одноатомной); но он не зависит от импульса центра масс $\mathbf{p}$. Из теоремы о равномерном распределении энергии немедленно следует, что

$$\overline{\frac{1}{2m}p_x^2} = \overline{\frac{1}{2}mv_x^2} = \frac{1}{2}kT, \tag{53}$$

или

$$\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}. \tag{54}$$

Так как $\overline{v}_x = 0$, из соображений симметрии, как это было показано в (26), результат (54) дает также дисперсию $\overline{(\Delta v_x)^2}$ компоненты скорости v_x. Так же как в случае одноатомного газа, три квадратичных члена в выражении для $\varepsilon^{(\text{к})}$ приводят к следующему значению средней кинетической энергии движения центра масс молекулы:

$$\overline{\varepsilon^{(\text{к})}} = \frac{3}{2}kT. \tag{55}$$

Броуновское движение. Рассмотрим макроскопическую частицу с массой m (размером порядка микрона), взвешенную в жидкости при абсолютной температуре T. Энергия этой частицы опять может быть записана в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \varepsilon'.$$

Здесь первый член отвечает кинетической энергии и зависит от скорости движения $\mathbf{v}$ или импульса $\mathbf{p}$ центра масс частицы, тогда как член ε' соответствует энергии, связанной с движением атомов, составляющих частицу, относительно ее центра масс. Теорема о равномерном распределении опять приводит к результату (53) и (54):

$$\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}. \tag{56}$$

*) В соответствии с (37) для достаточно разреженного газа квантовые эффекты действительно не имеют значения, и в этом случае следует ожидать согласия между квантовым и классическим рассмотрением задачи.

И в этом случае среднее значение $\bar{v}_x=0$ из соображения симметрии, и (56) непосредственно равно дисперсии составляющей скорости v_x. Из формулы (56) сразу следует, что частица не остается в покое, а обладает флуктуирующей скоростью. Таким образом, существование броуновского движения, рассматривавшегося в п.1.4, является простым следствием нашей теории. Из формулы (56) следует также, что если масса частицы достаточно велика, флуктуации становятся столь малыми, что перестают быть практически наблюдаемыми.

Гармонический осциллятор. Рассмотрим частицу с массой m, совершающую одномерное гармоническое колебательное движение. Ее энергия равна

$$\varepsilon=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}\alpha x^2. \tag{57}$$

Здесь первый член равен кинетической энергии частицы, импульс которой равен p, а второй член равен потенциальной энергии частицы, на которую действует восстанавливающая сила $-\alpha x$, пропорциональная смещению x. Постоянная α называется *коэффициентом упругости* (или *постоянной пружины*). Предположим, что осциллятор находится в равновесии с тепловым резервуаром при температуре T, достаточно высокой для того, чтобы можно было использовать классическое описание. Тогда, применяя теорему о равномерном распределении (48) к выражению (17), содержащему квадратичные члены, мы сразу получаем среднюю энергию осциллятора:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}kT+\frac{1}{2}kT=kT. \tag{58}$$

6.7. Удельная теплоемкость твердых тел

В качестве последнего приложения теоремы о равномерном распределении мы рассмотрим удельную теплоемкость твердых тел при температурах, достаточно высоких для того, чтобы классическое описание было справедливым. Рассмотрим любое твердое тело, состоящее из N атомов, например, медь, золото, алюминий, алмаз. Благодаря внутренним силам, действующим между соседними атомами, в состоянии стабильного механического равновесия твердого тела его атомы занимают определенное положение в кристаллической решетке. Каждый атом может, однако, испытывать небольшое смещение из положения равновесия. Восстанавливающая сила, действующая со стороны соседних атомов на такой смещенный атом, стремится вернуть его в положение равновесия и исчезает, когда атом займет это положение. Смещение атома из равновесного положения всегда очень мало, и поэтому в первом приближении восстанавливающая сила пропорциональна смещению. Такое приближение для многих целей оказывается достаточным, и из него следует, что атом совершает простые трехмерные гармонические колебания около положения равновесия.