этот предельный результат. Если предположить, что каждый атом твердого тела колеблется с частотой ω, то выполнить квантовомеханический расчет удельной теплоемкости c_V весьма просто. Мы получаем при этом значение c_V, пригодное для любых температур. (Подробности этих вычислений см. в задаче 6.21.)

Сводка определений

Фазовое пространство. Многомерное пространство, оси которого соответствуют координатам и импульсам системы. Точка в этом пространстве определяет все координаты и импульсы частиц системы.

Максвелловское распределение скоростей. Выражение

$$f(\mathbf{v})\, d^3\mathbf{v} \propto e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2} d^3\mathbf{v},$$

дающее среднее число молекул, скорость которых лежит между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$, для газа при абсолютной температуре T.

Эффузия. Вытекание молекул из сосуда через небольшую щель, размеры которой значительно меньше средней длины пробега молекул.

Основные формулы

Если система, описываемая классически, находится в равновесии при абсолютной температуре T, то каждому независимому квадратичному члену ε_i в выражении для энергии отвечает среднее значение энергии

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} kT. \tag{1}$$

Задачи

6.1. *Фазовое пространство классического гармонического осциллятора.* Энергия одномерного гармонического осциллятора равна

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2,$$

где x — смещение, p — импульс. Первый член суммы соответствует кинетической второй — потенциальной энергии осциллятора. Масса осциллирующей частицы обозначена через m, коэффициент упругости для восстанавливающей силы, действующей на частицу, равен α. Рассмотрим ансамбль таких осцилляторов, об энергии которых известно, что она лежит между E и $E+\delta E$. Укажите (рассматривая задачу классически) на двумерной диаграмме xp часть фазового пространства, доступную осциллятору.

6.2. *Идеальный газ в поле силы тяжести.* Идеальный газ, находящийся в равновесии при абсолютной температуре T, испытывает действие силы тяжести. Ускорение силы тяжести равно g и направлено вниз (в направлении $-z$). Масса молекулы равна m.

а) Найдите вероятность $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{p}$ того, что координаты и импульс молекулы лежат в пределах от $\mathbf{r}$ до $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ и от $\mathbf{p}$ до $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$ соответственно. (Воспользуйтесь каноническим распределением в его классической трактовке.)

б) Найдите (с точностью до постоянного множителя) вероятность того, что скорость молекулы лежит между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$ независимо от положения молекулы в пространстве. Сравните полученный результат с соответствующей вероятностью при отсутствии гравитационного поля.

в) Найдите (с точностью до постоянного множителя) вероятность $\mathcal{P}''(z)\, dz$ того, что молекула находится в интервале высот от z до $z+dz$ независимо от ее скорости и положения в горизонтальной плоскости.

6.3. *Макроскопическое рассмотрение идеального газа в поле силы тяжести.* Рассмотрим идеальный газ предыдущей задачи с полностью макроскопической точки зрения. Найдем выражение для числа $n(z)$ молекул в единице объема на высоте z. Для этого необходимо написать условие механического равновесия слоя газа в интервале высот от z до $z+dz$ и воспользоваться уравнением состояния (4.92). Сравните полученный результат с выражением для $\mathcal{P}''(z)dz$, выведенным в предыдущей задаче с помощью статистической механики.

6.4. *Пространственное распределение электронов в цилиндрическом электрическом поле.* Вдоль оси цилиндра с радиусом R и длиной L натянута проволока, радиус которой r_0. Потенциал проволоки по отношению к цилиндру составляет V ед. СГСЭ$_V$. Вся система находится при абсолютной температуре T, которая достаточно велика. В результате электроны, испускаемые нагретым металлом, образуют разреженный газ, наполняющий цилиндр и находящийся с ним в равновесии. Плотность электронного газа настолько мала, что взаимодействием электронов друг с другом можно пренебречь.

а) Воспользовавшись теоремой Гаусса, получите выражение для электростатического поля в точке, находящейся на расстоянии r от оси цилиндра ($r_0<r<R$). Длину цилиндра L можно считать достаточно большой, чтобы не учитывать краевые эффекты.

б) В тепловом равновесии электроны образуют газ переменной плотности, заполняющий пространство между нитью и цилиндром. Воспользовавшись результатом а), найдите зависимость числа электронов в единице объема от радиального расстояния.

в) Укажите приблизительный критерий того, насколько малой должна быть температура T (а значит, и плотность электронного газа), чтобы пренебрежение электростатическим взаимодействием между электронами было оправдано.

6.5. *Определение массы больших молекул с помощью ультрацентрифуги.* Рассмотрим макромолекулу (т. е. очень большую молекулу, молекулярный вес которой равен нескольким миллионам), находящуюся в несжимаемой жидкости с плотностью ρ при абсолютной температуре T. Объем v, занимаемый одной такой молекулой, можно считать известным, например, из измерений объема, занимаемого раствором таких макромолекул. Такой разбавленный раствор помещают в ультрацентрифугу, вращающуюся с большой угловой скоростью ω. В системе координат, вращающейся вместе с центрифугой, любая находящаяся в покое частица с массой m испытывает действие центробежной силы $m\omega^2 r$, где r — расстояние частицы от оси вращения.

а) Чему равна результирующая сила, действующая в этой системе координат на частицу с массой m, если принять во внимание подъемную силу, обусловленную окружающей жидкостью?

б) Допустим, что система достигла равновесия и, таким образом, среднее число $n(r)dr$ макромолекул (в единице объема), расположенных в интервале расстояний от r до $r+dr$ от оси вращения, не зависит от времени. Использовав каноническое распределение, найдите (с точностью до постоянного множителя) зависимость $n(r)dr$ от r.

в) Чтобы измерить зависимость $n(r)$, можно воспользоваться поглощением света в растворе. Покажите, как использовать такие измерения для определения массы m макромолекулы.

***6.6.** *Пространственное разделение магнитных атомов в неоднородном магнитном поле.* Водный раствор при комнатной температуре содержит в малой концентрации атомы, каждый из которых обладает спином $1/2$ и магнитным моментом μ_0. Раствор помещен во внешнее неоднородное магнитное поле, z-компонента которого является линейно возрастающей функцией z. Значение B_1 в нижней части раствора (где $z=z_1$) больше, чем B_2 в верхней части (где $z=z_2$).

а) Пусть $n_+(z)dz$ обозначает среднее число атомов, магнитный момент которых направлен вверх по оси z и расположенных между z и $z+dz$. Чему равно отношение $n_+(z_2)/n_+(z_1)$? Будет ли оно больше, меньше или равно единице?

б) Пусть $n(z)dz$ — полное число магнитных атомов (обоих направлений ориентации спина), расположенных между z и $z+dz$. Чему равно отношение $n(z_2)/n(z_1)$? Будет ли оно больше, меньше или равно единице?

в) Воспользуйтесь условием $\mu_0 B \ll kT$ для упрощения ответов на предыдущие вопросы.

г) Оцените численно величину отношения $n(z_2)/n(z_1)$ при комнатной температуре, если $\mu_0 \approx 10^{-20}$ *эрг/гс* (т. е. порядка боровского магнетона), $B_1=0$ и $B_2=5\cdot 10^4$ *гс*.

6.7. *Наиболее вероятная энергия молекулы газа.* Чему равна наиболее вероятная кинетическая энергия $\bar{\varepsilon}$ молекулы, описываемой максвелловским распределением скоростей? Равна ли она $\frac{1}{2} m\bar{v}^2$, где $\bar{v}$ — наиболее вероятная скорость молекулы?

6.8. *Температурная зависимость эффузии (истечения).* Молекулы заключенного в сосуд газа через небольшое отверстие в стенке вылетают в вакуум, окружающий сосуд. Предположим, что абсолютная температура газа в сосуде удваивается, тогда как давление остается постоянным.

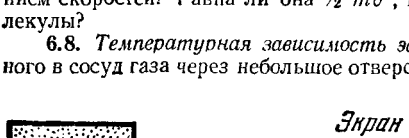

Рис. 6.15. Эффузионный пучок падает на экран.

а) Во сколько раз изменится число молекул, вылетающих в секунду из отверстия в стенке сосуда?

б) Во сколько раз изменится сила, действующая на экран, расположенный перед отверстием?

6.9. *Средняя кинетическая энергия истекающих молекул.* Молекулы одноатомного газа вылетают из щели в стенке сосуда, находящегося при абсолютной температуре T. Укажите физические причины (не прибегая к вычислениям), по которым средняя кинетическая энергия $\bar{\varepsilon}_0$ вылетевших молекул будет больше (или меньше, или равна?) средней кинетической энергии $\bar{\varepsilon}_i$ молекул, находящихся внутри сосуда.

6.10. *Понижение давления газа в сосуде с небольшой течью.* Тонкостенный сосуд объемом V, температура которого поддерживается постоянной, наполнен газом, медленно вытекающим из сосуда через небольшое отверстие площадью A. Наружное давление настолько мало, что обратным током газа в сосуд можно пренебречь. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится до половины первоначального. Выразите ответ через A, V и среднюю скорость молекул $\bar{v}$.

6.11. *Криогенная (т. е. низкотемпературная) откачка.* Газ можно удалить из сосуда, охлаждая одну из его стенок. Этот метод часто используется в различных физических экспериментах, когда необходим хороший вакуум. Чтобы пояснить принцип такого метода, рассмотрим сферический сосуд радиусом 10 *см*, который находится при комнатной температуре (300° К), за исключением площадки в 1 *см*^{2}, температура которой равна температуре жидкого азота (77° К). В сосуде находится водяной пар, начальное давление которого равно 0,1 *мм* рт. ст. Оцените время, необходимое для уменьшения давления до 10^{-6} *мм* рт. ст., предполагая, что каждая молекула, ударившаяся об охлажденную поверхность, конденсируется на ней.

6.12. *Разделение изотопов эффузией.* Сосуд имеет пористые стенки, содержащие большое число тонких щелей. Газ, проникающий через эти щели благодаря эффузии, откачивается и собирается в специальную камеру. Сосуд наполнен разреженным газом, состоящим из молекул с массами m_1 и m_2 (в эти молекулы входят два различных изотопа одного атома). Обозначим через c_1 и c_2 концентрацию молекул первого и второго типов соответственно (концентрацией системы в данном случае мы называем отношение числа молекул типа i к полному числу молекул). Эти концентрации могут поддерживаться неизменными, для чего достаточно, например, осуществить приток в сосуд свежего газа в количестве, необходимом для компенсации утечки из-за эффузии.

а) Обозначим через c_1' и c_2' концентрации молекул обоих типов в специальной камере. Чему равно отношение c_2'/c_1'?

б) Используя газ UF_6, можно сделать попытку отделить U^{235} от U^{238}. Первый из этих изотопов используется в реакции ядерного деления. Газ в сосуде состоит из молекул $U^{235}F_6^{19}$ и $U^{238}F_6^{19}$ (концентрация этих молекул соответствует естествен-

ной распространенности обоих изотопов урана и равна соответственно $c_{238}=99{,}3\%$ и $c_{235}=0{,}7\%$). Вычислите отношение c'_{235}/c'_{238} для молекул, собранных в камере после эффузии. Выразите это отношение через начальное отношение концентраций.

6.13. *Изменение концентрации в результате эффузии.* Одна из стенок сосуда заменена мембраной с большим количеством малых щелей. Если сосуд наполнен газом, находящимся при давлении $\bar{p}$, то благодаря эффузии газ из сосуда будет проникать в окружающий сосуд вакуум. Опыт показывает, что если наполнить сосуд гелием при комнатной температуре и давлении $\bar{p}$, то в течение часа давление в сосуде упадет до $\frac{1}{2}\bar{p}$.

Предположим, что при комнатной температуре и полном давлении $\bar{p}$ сосуд наполнен смесью гелия (He) и неона (Ne). Атомная концентрация обоих газов равна 50% (половина атомов является атомами He, половина — атомами Ne). Чему будет равно отношение n_{Ne}/n_{He} атомных концентраций по истечении часа? Выразите ответ через атомные веса гелия μ_{He} и неона μ_{Ne}.

6.14. *Вычисление различных средних для молекулы газа.* Газ, состоящий из молекул с массой m, находится в равновесии при абсолютной температуре T. Обозначим через $\mathbf{v}$ скорость молекулы, через v_x, v_y и v_z — составляющие скорости по координатным осям. Найдите следующие средние:

$$\text{а) } \overline{v_x},\ \text{б) } \overline{v_x^2},\ \text{в) } \overline{v^2 v_x},\ \text{г) } \overline{v_x^2 v_y},\ \text{д) } \overline{(v_x+bv_y)^2},$$

где b — постоянная. (Указание. Соображения симметрии и теорема о равномерном распределении дают возможность получить эти средние, не прибегая к сложным вычислениям.)

6.15. *Доплеровское расширение спектральных линий.* Газ из атомов, имеющих массу m, находится внутри сосуда при абсолютной температуре T. Атомы испускают свет, который выходит из сосуда (в направлении x) через окно в его стенке. Свет, испускаемый атомом, имеет определенную частоту ν_0. Однако благодаря эффекту Доплера частота света, испущенного атомом (скорость которого имеет вдоль оси x составляющую v_x), не равна частоте ν_0. Приближенное значение частоты равно

$$\nu=\nu_0\left(1+\frac{v_x}{c}\right),$$

где c — скорость света. В результате спектрометр, анализирующий свет, обнаружит вместо одной частоты ν_0 некоторое спектральное распределение $I(\nu)d\nu$, которое дает часть световой энергии, заключенной в интервале частот от ν до $\nu+d\nu$.

а) Вычислите среднюю частоту $\bar{\nu}$ света, наблюдаемого спектрометром.

б) Вычислите дисперсию $\overline{(\Delta\nu)^2}$ частоты света, наблюдаемого спектрометром.

в) Покажите, каким образом измерения ширины $\Delta\nu=[\overline{(\Delta\nu)^2}]^{1/2}$ спектральной линии, наблюдаемой спектрометром в излучении звезды, дают возможность определить ее температуру.

6.16. *Удельная теплоемкость подвижного мономолекулярного слоя.* Если поверхность твердого тела находится в достаточно хорошем вакууме, то на ней может образоваться одиночный слой молекул, толщина которого будет равна диаметру молекулы. (В этом случае говорят, что поверхность адсорбировала молекулы.) Молекулы удерживаются на поверхности силами притяжения, действующими со стороны атомов твердого тела, но могут перемещаться по ней, сохраняя свободу в двух измерениях. Таким образом, они образуют в хорошем приближении классический двумерный газ. Предположим, что молекула одноатомна и абсолютная температура равна T. Чему равна молярная теплоемкость молекул, адсорбированных поверхностью?

6.17. *Зависимость электрического сопротивления металла от температуры.* Электрическое сопротивление ρ металла пропорционально вероятности того, что электрон рассеивается колеблющимися атомами решетки. Эта вероятность в свою очередь пропорциональна средней квадратичной амплитуде колебаний атомов. Как зависит электрическое сопротивление ρ металла от его абсолютной температуры

вблизи комнатной температуры или выше, когда колебания атомов металла могут быть рассмотрены с помощью классической статистической механики?

6.18. *Теоретическая предельная точность взвешивания.* Очень чувствительные пружинные весы состоят из кварцевой пружины, закрепленной в неподвижной опоре. Постоянная пружины равна α (при растяжении пружины на величину x возникает возвращающая сила $-\alpha x$). Весы находятся при температуре T в месте, где ускорение силы тяжести равно g.

а) Каково среднее растяжение $\bar{x}$ пружины, к которой подвешен небольшой груз массой M?

б) Чему равна величина $\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\bar{x})^2}$ тепловой флуктуации груза около положения равновесия?

в) Измерение массы теряет смысл, если флуктуации настолько велики, что $\overline{(\Delta x^2)}^{1/2} \geqslant \bar{x}$. Каково минимальное значение массы M, измеримой с помощью таких весов?

6.19. *Теплоемкость ангармонического осциллятора.* Рассмотрим одномерный осциллятор (*не* простой гармонический), описываемый координатой x и импульсом p, энергия которого равна

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + bx^4. \qquad \text{(I)}$$

Первый член этого выражения соответствует кинетической, второй — потенциальной энергии. Величина m — масса осциллятора, b — некоторая постоянная. Осциллятор находится в равновесии с тепловым резервуаром при температуре T, которая достаточно велика для того, чтобы мы могли применять законы классической механики.

а) Чему равна средняя кинетическая энергия осциллятора?

б) Чему равна средняя потенциальная энергия?

в) Чему равна средняя полная энергия?

г) Рассмотрим ансамбль слабо взаимодействующих частиц, каждая из которых совершает одномерные колебания, причем энергия колебаний определяется выражением (I). Чему равна теплоемкость моля таких частиц при постоянном объеме? (Указание. Чтобы ответить на эти вопросы, нет необходимости вычислять соответствующие интегралы.)

6.20. *Теплоемкость твердого тела, обладающего большой анизотропией.* Рассмотрим твердое тело, кристаллическая решетка которого обладает большой анизотропией. Каждый атом в такой решетке совершает простые гармонические колебания в трех направлениях. Восстанавливающая сила в направлении, параллельном некоторому слою в кристалле, очень велика. Поэтому свободные частоты колебаний в направлениях x и y, принадлежащих этому слою, одинаковы и равны величине $\omega_{\parallel}$, которая настолько велика, что $\hbar\omega_{\parallel} \gg 300\ k$, где $300\ k$ — тепловая энергия при комнатной температуре. С другой стороны, в направлении, перпендикулярном к слою, действует небольшая восстанавливающая сила. Частота колебаний $\omega_{\perp}$ в направлении z, перпендикулярном к плоскости слоя, настолько мала, что $\hbar\omega_{\perp} \ll 300\ k$. Вычислите на основании такой модели, чему равна молярная теплоемкость (при постоянном объеме) тела при 300 °К.

6.21. *Квантовая теория теплоемкости твердого тела.* Чтобы облегчить квантовомеханическое рассмотрение атомных колебаний твердого тела, мы примем упрощенную модель, в которой каждый атом твердого тела колеблется независимо от остальных с частотой ω, одинаковой для всех трех направлений. Твердое тело состоит из N атомов; оно эквивалентно, таким образом, ансамблю из $3N$ независимых одномерных осцилляторов, колеблющихся с частотой ω. Возможные квантовые состояния каждого осциллятора имеют энергию

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad \text{(I)}$$

где квантовое число n может принимать значения 0, 1, 2, ...

а) Допустим, что твердое тело находится в равновесии при абсолютной температуре T. Воспользовавшись формулой (I) и каноническим распределением (см.

задачу 4.22), найдите среднюю энергию $\bar{\varepsilon}$ осциллятора и полную среднюю энергию колебания атомов твердого тела $\bar{E}=N\bar{\varepsilon}$.

б) Используйте полученный результат а) (см. задачу 5.20) для вычисления молярной теплоемкости c_V твердого тела.

в) Покажите, что c_V можно выразить формулой

$$c_V=3R\frac{w^2e^w}{(e^w-1)^2}, \tag{II}$$

где

$$w=\frac{\hbar\omega}{kT}=\frac{\Theta}{T}; \tag{III}$$

$\Theta=\hbar\omega/k$ является температурным параметром, который был определен формулой (70).

г) Покажите, что при $T\gg\Theta$ формула (II) дает классический результат $c_V=3R$.

д) Покажите, что из формулы (II) следует, что c_V стремится к нулю при $T\to 0$.

е) Найдите приближенное значение c_V, следующее из формулы (II) при $T\ll\Theta$.

ж) Изобразите на графике характер зависимости c_V от абсолютной температуры T.

з) Воспользовавшись критерием (1), определите температуру, ниже которой классическое рассмотрение не может быть применимо. Сравните полученный результат с условием (69) применимости классической теории теплоемкости.

[Используя сделанные в этой задаче приближения, Эйнштейн в 1907 г. впервые получил выражение (II) для теплоемкости твердого тела, основанное на новых квантовых идеях, и объяснил экспериментальные данные о теплоемкости твердых тел, противоречащие классической теории.]