

что газы при обычных условиях действительно являются достаточно разреженными, так что, прежде чем столкнуться с другой молекулой, данная молекула должна пролететь относительно большое расстояние.

## 8.2. Вязкость и перенос импульса

Рассмотрим макроскопический объект, находящийся в жидкости или газе. Пусть среда, в которую помещен объект, находится в покое и на нее не действуют никакие внешние силы. Если объект находится в равновесном состоянии, он также покоятся. С другой стороны, если объект будет двигаться в среде, она не будет в равновесии. Молекулярные взаимодействия, ответственные за установление равновесия, проявят себя в макроскопических силах трения, действующих на движущийся объект и вызывающих его торможение. В хорошем приближении эти силы пропорциональны скорости объекта; они полностью исчезают, когда движение объекта прекращается. Величина сил трения зависит от свойства среды, называемого *вязкостью*. На один и тот же объект в патоке или мёде действуют большие силы, чем в воде. Соответственно, патока обладает гораздо большей вязкостью, чем вода. Мы займемся теперь более точным исследованием понятия вязкости и попытаемся объяснить микроскопическое происхождение вязкости в случае разреженного газа.

*Определение коэффициента вязкости.* Рассмотрим любую среду (жидкость или газ) и вообразим в ней некоторую плоскость, нормаль к которой направлена вдоль оси  $z$ . Среда ниже этой плоскости (т. е. на стороне с меньшими значениями  $z$ ) испытывает некоторую среднюю силу на единицу поверхности (или среднее напряжение)  $\mathbf{P}_z$  со стороны жидкости, находящейся по другую сторону плоскости. Соответственно из третьего закона Ньютона следует, что на среду выше плоскости действует средняя сила  $-\mathbf{P}_z$  со стороны среды, расположенной ниже плоскости. Средняя напряженность, нормальная к плоскости, т. е.  $z$ -компоненты  $\mathbf{P}_z$ , показывает среднее давление в среде, точнее,  $P_{zz} = \bar{p}$ . Если среда находится в равновесии, т. е. покоятся или движется с *постоянной* скоростью, то из соображений симметрии следует, что среднее значение сил, действующих *параллельно* плоскости, равно нулю. Таким образом,  $P_{zx} = 0$ . Заметим, что величина  $P_{zx}$  снабжена двумя индексами. Первый из них отвечает ориентации плоскости, а второй означает компоненту силы, лежащую в этой плоскости \*).

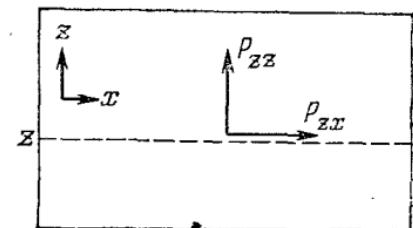


Рис. 8.3. Плоскость  $z=\text{const}$  в жидкости. Находящаяся ниже этой плоскости жидкость действует с силой  $\mathbf{P}_z$  на жидкость над плоскостью.

\* ) Величина  $P_{\alpha\gamma}$  (где  $\alpha$  и  $\gamma$  означает  $x$ ,  $y$  или  $z$ ) называется *тензором давления*.

Рассмотрим теперь простую неравновесную ситуацию, которая заключается в том, что средняя скорость и нашей среды (т. е. макроскопическая скорость потока) неодинакова в разных ее точках. Для конкретности рассмотрим случай, когда составляющая скорости  $u_x$  в направлении  $x$  не зависит от времени, но величина  $u_x$  зависит от  $z$ , т. е.  $u_x = u_x(z)$ . Такое положение может возникнуть, если среда заключена между двумя пластинами, находящимися на расстоянии  $L$ , причем пластина, для которой  $z=0$ , покоятся, а пластина с  $z=L$  движется в направлении  $x$  с постоянной скоростью  $u_0$ .

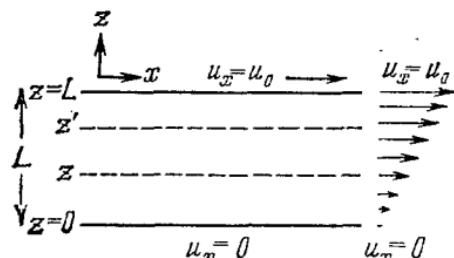


Рис. 8.4. Жидкость, заключенная между двумя пластинами. Нижняя плата неподвижна, а верхняя движется со скоростью  $u_0$  в направлении  $x$ ; таким образом, в жидкости существует градиент скорости  $du_x/dz$ .

В этом случае среда будет действовать на пластину с тангенциальной силой, стремящейся замедлить ее движение и восстановить равновесную ситуацию.

Очевидно, что, вообще, любой слой жидкости, расположенный в плоскости  $z=\text{const}$ , будет испытывать со стороны лежащей выше жидкости тангенциальное напряжение  $P_{zx}$ , т. е.

$P_{zx} \equiv$  средняя сила в направлении  $x$ , приходящаяся на единицу поверхности, с которой жидкость под (13) плоскостью действует на жидкость над плоскостью.

Мы уже видели, что в состоянии равновесия, когда  $u_x(z)$  не зависит от  $z$ , сила  $P_{zx}=0$ . В нашем неравновесном случае, когда  $du_x/dz \neq 0$ , следует ожидать, что  $P_{zx}$  будет некоторой функцией от производной  $u_x$  по  $z$ . Эта функция должна обращаться в нуль, когда  $u_x$  не зависит от  $z$ . Если производная  $du_x/dz$  достаточно мала, то первый член в разложении  $P_{zx}$  в ряд Тейлора может оказаться достаточно хорошим приближением. Тогда мы имеем линейную зависимость следующего вида:

$$P_{zx} = -\eta \frac{du_x}{dz}. \quad (14)$$

Входящая в эту формулу постоянная  $\eta$  называется *коэффициентом вязкости* нашей среды. Если с увеличением  $z$  величина  $du_x/dz$  возрастает, то среда, находящаяся под слоем  $z$ , будет замедлять среду, находящуюся над этим слоем, т. е. действовать на нее с силой, направленной по  $-x$ . Таким образом, если  $du_x/dz > 0$ , то  $P_{zx} < 0$ . Чтобы сделать коэффициент вязкости  $\eta$  положительным, в формулу

(14) введен знак минус. Из (14) следует, что коэффициент  $\eta$  имеет в системе СГС размерность  $\text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  \*). Пропорциональность (14) между силой  $P_{zx}$  и градиентом скорости  $du_x/dz$  хорошо подтверждена экспериментально для большого числа жидкостей и газов при условии, что градиент скорости не слишком велик.

**З а м е ч а н и е.** Рассмотрим силы в различных сечениях  $z$ , действующие в направлении  $x$  в простых геометрических условиях рис. 8.4. Среда, расположенная ниже плоскости  $z$ , действует с силой  $P_{zx}$  на единицу поверхности среды выше  $z$ . Среда, расположенная между слоем  $z$  и любым другим слоем  $z'$ , движется без ускорения. Поэтому жидкость, расположенная выше  $z'$ , должна действовать с силой  $-P_{zx}$  на единицу поверхности среды, расположенной ниже плоскости  $z'$ . По третьему закону Ньютона жидкость, расположенная ниже  $z'$ , действует с силой  $P_{zx}$  на единицу поверхности среды выше  $z'$ . Таким образом, в любом сечении, в том числе и на верхней пластине, действуют равные силы. Так как  $P_{zx}$  является не зависящей от  $z$  постоянной, из (14) следует, что  $du_x/dz = \text{const}$ , а именно

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{u_0}{L}$$

и

$$P_{zx} = -\eta \frac{u_0}{L}.$$

*Вычисление коэффициента вязкости для разреженного газа.* В простом случае разреженного газа коэффициент вязкости легко вычислить на основе молекулярного рассмотрения. Допустим, что средняя компонента скорости газа равна  $u_x$  (предположим, что эта скорость мала по сравнению со средней тепловой скоростью молекул) и что  $u_x$  зависит от  $z$ . Рассмотрим некоторую плоскость  $z = \text{const}$ . Какова молекулярная природа силы  $P_{zx}$ , действующей в плоскости  $z$ ? Чтобы дать хотя бы качественный ответ на этот вопрос, заметим, что молекулы над плоскостью  $z$  на рис. 8.4 имеют несколько большую скорость, чем молекулы, расположенные под ней. Когда движущиеся вверх и вниз молекулы пересекают плоскость  $z$ , они переносят с собой и  $x$ -компоненту импульса. При этом газ, расположенный ниже плоскости  $z$ , получает приращение  $x$ -компоненты импульса, так как проникающие сверху молекулы приносят с собой избыток  $x$ -компоненты импульса. Точно так же газ, расположенный над  $z$ , теряет свой импульс из-за того, что проникающие снизу молекулы приносят уменьшенную  $x$ -составляющую импульса. По второму закону Ньютона сила, действующая на систему, равна скорости изменения импульса системы. Поэтому сила, с которой газ под плоскостью действует на газ над плоскостью, равна изменению за единицу времени импульса газа над плоскостью, вызванному газом под плоскостью. Таким образом, сила  $P_{zx}$  из (13) равна

$P_{zx} =$  среднему возрастанию за единицу времени и на единицу поверхности площади  $x$ -компоненты импульса газа над плоскостью, вызванному переносом импульса молекулами, пересекающими эту плоскость.

\* ) Эта комбинация единиц носит название *паза* в честь физика Пуазейля.

**Поясняющее замечание.** Чтобы пояснить механизм вязкости переносом импульса, приведем следующую аналогию. Пусть два железнодорожных вагона движутся рядом по параллельным путям, причем скорость одного вагона больше скорости другого. Представим себе, что грузчики из каждого вагона занимаются тем, что перебрасывают ящики с песком на соседний вагон. Это перебрасывание вызывает перенос импульса, при котором более медленный вагон будет испытывать ускорение, а более быстрый — замедление.

Чтобы оценить величину коэффициента вязкости, допустим, что все молекулы газа движутся с одинаковой скоростью, равной их средней скорости  $\bar{v}$ . Одна треть из всех находящихся в единице объема  $n$  молекул имеют составляющие скорости, направленные вдоль оси  $z$ ; у половины этих молекул скорости направлены вдоль  $+z$ , а у другой половины вдоль  $-z$ .

Рассмотрим плоскость, обозначенную буквой  $z$ . За единицу времени единицу поверхности этой плоскости пересечет  $(1/6) \bar{n}v$  молекул снизу и  $(1/6) \bar{n}v$  молекул сверху.

Рис. 8.5. Молекулы, пересекающие плоскость, осуществляют перенос импульса.

Из определения среднего свободного пробега  $l$  следует, что молекулы, пришедшие снизу, испытали последнее столкновение на расстоянии  $l$  под плоскостью, а молекулы, пришедшие сверху, — на таком же расстоянии  $l$  над плоскостью. Так как средняя скорость  $u_x = -u_x(z)$  зависит от координаты  $z$ , то молекулы в плоскости  $(z = l)$  будут иметь среднюю  $x$ -компоненту скорости  $u_x(z - l)$ . Каждая такая молекула с массой  $m$  переносит через плоскость среднюю  $x$ -компоненту импульса  $mu_x(z - l)$ . Мы приходим к следующему выводу \*):

$$\left[ \text{Средняя компонента импульса, переносимая в единицу времени через единицу поверхности плоскости } z \text{ в направлении снизу вверх,} \right] = \frac{1}{6} \bar{n}v [mu_x(z - l)]. \quad (16)$$

Точно так же, рассматривая молекулы, пересекающие плоскость сверху, где координата их последнего столкновения была  $(l + z)$ , мы можем написать:

$$\left[ \text{Средняя } x\text{-компоненты импульса, переносимая в единицу времени через единицу поверхности в направлении сверху вниз,} \right] = \frac{1}{6} \bar{n}v [mu_x(z + l)]. \quad (17)$$

Вычитая (17) из (16), мы получаем окончательное среднее значение  $x$ -компоненты импульса, перенесенной молекулами через единицу поверхности плоскости  $z$  за единицу времени, т. е. напряжение

\*). Чтобы избежать путаницы, запомним, что символы  $u_x(z - l)$  не означает произведение; это среднее значение скорости  $u_x$  в плоскости  $(z - l)$ .

$P_{zx}$  определяемое в (15) или (13). Итак,

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{v} m u_x(z-l) - \frac{1}{6} n \bar{v} m u_x(z+l),$$

или

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{v} m [u_x(z-l) - u_x(z+l)]. \quad (18)$$

Так как средняя длина свободного пробега  $l$  весьма мала (по сравнению с расстояниями, на которых градиент скорости  $du_x/dz$  меняется заметным образом), мы можем с хорошим приближением записать так:

$$u_x(z+l) = u_x(z) + \frac{\partial u_x}{\partial z} l,$$

и

$$u_x(z-l) = u_x(z) - \frac{\partial u_x}{\partial z} l.$$

Таким образом,

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{v} m \left( -2 \frac{\partial u_x}{\partial z} l \right) = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (19)$$

где

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3} n \bar{v} m l.} \quad (20)$$

Из формулы (19) следует, что  $P_{zx}$  действительно пропорционально градиенту скорости  $du_x/dz$ , что согласуется с (14). Кроме того, формула (20) выражает коэффициент вязкости  $\eta$  через молекулярные параметры, характеризующие свойства газовых молекул.

Наши вычисления имели весьма упрощенный характер. Мы не пытались вычислять средние значения различных величин. Поэтому множителю  $1/3$  в формуле (20) не следует придавать большого значения. Коэффициент пропорциональности, полученный при более тщательных расчетах, может иметь несколько другое значение. Заметим, однако, что полученная нами зависимость коэффициента вязкости от молекулярных параметров  $n$ ,  $m$ ,  $\bar{v}$  и  $l$  должна быть верной.

*Обсуждение.* Из формулы (20) следует ряд интересных предсказаний. Найдя  $n$  из выражения (9),

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}, \quad (21)$$

и подставив его в (20), мы получим следующее выражение для  $\eta$ :

$$\eta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\bar{v}}{\sigma}, \quad (22)$$

которое уже не содержит  $n$ . Приближенное значение  $\bar{v}$  можно получить из теоремы о равномерном распределении:

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} kT, \quad \text{или} \quad \bar{v}_x^2 = \frac{kT}{m}.$$

Но

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2 = \frac{3kT}{m},$$

так как  $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2$  из соображений симметрии. В приближенных вычислениях этой главы мы можем не делать различия между средней скоростью  $\bar{v}$  и корнем из среднего квадрата скорости  $(\bar{v}^2)^{1/2}$ . Поэтому с достаточной степенью точности можно положить

$$\bar{v} \approx \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (23)$$

Независимо от точного значения коэффициента пропорциональности в (23), средняя скорость молекулы зависит только от температуры  $T$ , но не от  $n$  — числа молекул в единице объема. Таким образом, коэффициент вязкости (22) оказывается не зависящим от  $n$ . При данной температуре  $T$  он не зависит также и от давления газа  $\bar{p} = nkT$ .

Мы получили замечательный результат, показывающий, что в ситуации, изображенной на рис. 8.4, тормозящая сила, с которой газ действует на движущуюся верхнюю пластину, будет одной и той же, независимо от того, равно ли давление газа между пластинами 1 мм или, например, 1000 мм рт. ст. На первый взгляд этот вывод кажется странным, так как интуиция подсказывает нам, что тангенциальная сила торможения в газе должна быть пропорциональна числу газовых молекул, переносящих импульс с одной пластины на другую. Следует, однако, иметь в виду, что при этом средняя длина свободного пробега уменьшается и молекулы переносят импульс с расстояния, составляющего только часть первоначального. Поэтому конечное значение перенесенного импульса остается неизменным. Независимость вязкости  $\eta$  газа от плотности (при постоянной температуре) была предсказана Максвеллом в 1860 г. и экспериментально подтверждена им же.

Очевидно, что этот результат не может оставаться справедливым для произвольно большого интервала изменения плотности газа. Действительно, при выводе формулы (20) мы сделали два допущения:

1) мы предполагали, что газ достаточно разрежен для того, чтобы можно было полностью пренебречь одновременным столкновением трех или большего числа молекул. Мы ограничились рассмотрением двух молекул. Это ограничение допустимо, если плотность молекул достаточно мала, т. е.

$$l \gg d, \quad (24)$$

где величина  $d \sim \sigma^{1/2}$  характеризует диаметр молекулы.

2) С другой стороны, мы предполагали, что газ достаточно плотен, так что молекулы гораздо чаще сталкиваются друг с другом, чем со стенками сосуда. Это предположение означает, что  $n$  настолько велико, что

$$l \ll L, \quad (25)$$

где  $L$  — наименьший линейный размер сосуда. (Например, на рис. 8.4  $L$  — расстояние между пластиинами.) В предельном случае полного вакуума  $n \rightarrow 0$  тангенциальная сила, действующая на движущуюся пластиину (рис. 8.4), должна исчезнуть, так как в этом случае нет газа, который переносил бы импульс. Если  $n$  настолько мало, что условие (25) не выполняется, вязкость должна уменьшиться и стремиться к нулю по мере дальнейшего уменьшения  $n$ . Действительно, если средняя длина свободного пробега (21), связанная со столкновением с другими молекулами, становится больше размера сосуда  $L$ , молекула будет преимущественно сталкиваться со стенками сосуда, а не с другими молекулами. Эффективное значение средней длины свободного пробега молекулы в этих условиях становится приблизительно равным  $L$  (величина  $l$  больше не зависит от числа молекул газа в сосуде) и коэффициент вязкости  $\eta$  в (22) оказывается пропорциональным плотности  $n$ .

Заметим, однако, что область плотностей, где условия (24) и (25) удовлетворяются одновременно, весьма велика. Действительно, в обычных макроскопических опытах  $L \gg d$ . Таким образом, коэффициент вязкости газа  $\eta$  не зависит от давления в весьма значительном интервале давлений.

Обсудим теперь зависимость коэффициента вязкости  $\eta$  от температуры. Если молекулы похожи на твердые шары, то поперечное сечение  $\sigma$ , определяемое равенством (2), будет числом, не зависящим от  $T$ . В этом случае из (22) следует, что  $\eta$  зависит от температуры так же, как и  $v$ , т. е.

$$\eta \propto T^{1/2}. \quad (26)$$

В общем случае оказывается, что  $\sigma$  зависит от средней относительной скорости  $\bar{V}$  молекул. Так как  $\bar{V} \propto T^{1/2}$ , то  $\sigma$  оказывается зависящим от температуры. В результате зависимость  $\eta$  от температуры оказывается более сильной, чем в (26):  $\eta$  приблизительно пропорционально  $T^{0.7}$ . Качественное объяснение такой зависимости заключается в том, что, кроме больших и короткодействующих сил отталкивания, между молекулами действуют проявляющиеся на относительно больших расстояниях слабые силы притяжения. Эти силы увеличивают вероятность рассеяния молекулы, но с увеличением температуры эффективность действия этих сил уменьшается, так как средняя скорость молекул возрастает и те же силы вызывают меньшее отклонение. Поэтому поперечное сечение рассеяния несколько уменьшается с увеличением температуры и, соответственно, вязкость  $\eta$ , которая в модели твердых шаров  $\propto T^{1/2}/\sigma$ , в действительности возрастает с температурой *быстрее*, чем  $T^{1/2}$ .

Обратим внимание на то, что с увеличением температуры вязкость газа *растет*, в отличие от вязкости жидкости, *уменьшающейся* с увеличением температуры. Причиной такого различия является близость молекул жидкости: передача импульса через данную плоскость в жидкости происходит не только из-за перехода молекул,

но и благодаря непосредственному взаимодействию молекул, находящихся по обе стороны плоскости.

В заключение оценим порядок величины  $\eta$  для обычного газа при комнатной температуре. Для азота ( $N_2$ )  $m=28/(6 \cdot 10^{23}) = 4,7 \cdot 10^{-23} \text{ г}$ , и средний импульс молекулы азота при комнатной температуре  $T=300^\circ \text{ К}$  равен  $m\bar{v} \approx \sqrt{3mkT} = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Диаметр молекулы азота близок к  $d \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , откуда  $\sigma \sim \pi d^2 \approx 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ . Из (22) получаем следующую оценку для  $\eta$ :

$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{m\bar{v}}{\sigma} \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Для сравнения укажем, что измеренное значение коэффициента вязкости  $\eta$  у азота  $N_2$  при комнатной температуре  $300^\circ \text{ К}$  равно  $1,78 \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ .

Подставляя (23) в (22), мы получим приближенное выражение для коэффициента вязкости:

$$\eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma}. \quad (27)$$

### 8.3. Теплопроводность и перенос энергии

*Определение коэффициента теплопроводности.* Рассмотрим вещество, в котором распределение температуры не является однородным. Допустим, например, что температура зависит от координаты  $z$ , так что  $T=T(z)$ .

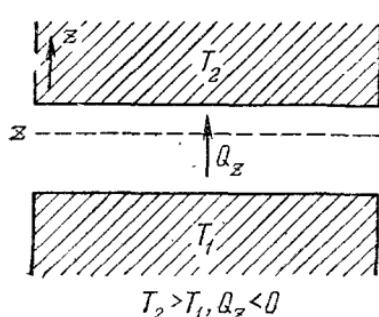


Рис. 3.6. Вещество, находящееся в тепловом контакте с двумя телами, абсолютная температура которых равна  $T_1$  и  $T_2$ . Если  $T_2 > T_1$ , тепло течет в направлении —  $z$ , от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой, таким образом, величина  $Q_z$  отрицательна.

Наше вещество не находится, таким образом, в равновесном состоянии, и стремление к достижению равновесия проявится в существовании потока тепла, направленного от участков вещества, обладающих высокой температурой, к участкам с низкой температурой. Рассмотрим плоскость  $z=\text{const}$ , где  $T=T(z)$ . Нас будет интересовать следующая величина:

$Q_z$  — количество тепла, перенесенное за единицу времени через единицу поверхности в направлении  $+z$ . (28)

Величина  $Q_z$  называется *плотностью потока тепла* в направлении оси  $z$ . Если температура однородна,  $Q_z=0$ . В противном случае рассуждения, аналогичные тем, которые мы провели при рассмотрении вязкости, приводят к тому, что величина  $Q_z$  должна быть (в хорошем приближении) пропорциональна градиенту температуры  $\partial T/\partial z$ .