

Выражение (57) для плотности тока принимает вид

$$j_z = \sigma_e \phi, \quad (60)$$

где

$$\sigma_e = \frac{nq^2}{m} \tau.$$

(61)

Мы получили, что j_z действительно пропорционально ϕ , как следует из (56). Формула (61) дает значение электрической проводимости, выраженное через молекулярные параметры, характеризующие газ. Формула (61) имеет общее значение, сохраняющееся даже для электронов в металле.

Если проводимость создается небольшим числом находящихся в газе ионов, то столкновения, ограничивающие свободное движение ионов, происходят главным образом с нейтральными молекулами газа *). Обозначим через σ полное поперечное сечение рассеяния иона молекулой и предположим, что в единице объема находится n_1 молекул с массой $m_1 \gg m$. В этом случае тепловая скорость ионов будет намного больше тепловой скорости молекул и среднее значение относительной скорости иона — молекулы будет приблизительно равна средней скорости иона \bar{v} . Поэтому среднее время свободного пробега иона согласно (4) будет равно

$$\tau = \frac{1}{n_1 \sigma \bar{v}}.$$

Если воспользоваться выражением (23) для \bar{v} , то из (61) следует:

$$\sigma_e = \frac{nq^2}{n_1 m \sigma \bar{v}} = \frac{1}{V} \frac{nq^2}{3 n_1 \sigma V m k T}. \quad (62)$$

Сводка определений

Среднее время свободного пробега. Среднее время движения молекулы между двумя столкновениями.

Средняя длина свободного пробега. Среднее расстояние между двумя столкновениями молекулы.

Полное поперечное сечение рассеяния. Эффективная величина площади, определяющая вероятность того, что молекула, сталкивающаяся с другой молекулой, будет рассеяна.

Напряжение. Сила, приходящаяся на единицу площади.

Вязкость. Коэффициент вязкости определяется равенством

$$P_{zx} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

*) Даже если столкновения между двумя одинаковыми ионами происходили бы часто, они не повлияли бы на электрическую проводимость. Причина заключается в том, что в каждом таком столкновении сохраняется полный импульс сталкивающихся ионов. Если ионы идентичны, то их массы равны и векторная сумма скоростей обоих ионов не изменяется от столкновения. Так как оба иона несут одинаковые заряды, столкновение не меняет общего тока, переносимого обоими ионами.

которое связывает напряжение P_{zx} в движущейся среде с градиентом скорости потока u_x .

Теплопроводность. Коэффициент теплопроводности κ определяется равенством

$$Q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z},$$

которое связывает плотность потока тепла Q_z с градиентом температуры T .

Самодиффузия. Коэффициент самодиффузии D определяется равенством

$$J_z = -D \frac{\partial n_1}{\partial z},$$

которое связывает плотность потока J_z меченых частиц с градиентом их концентрации n_1 .

Электропроводность. Коэффициент электропроводности σ_e определяется равенством

$$j_z = \sigma_e \mathcal{E},$$

которое связывает плотность тока j_z с величиной электрического поля \mathcal{E} (т. е. с градиентом электрического потенциала).

Основные формулы

Средняя длина пробега

$$l \approx \frac{1}{V \cdot 2 \pi \sigma}.$$

Задачи

8.1. Бросание монеты. Рассмотрим бросание монеты, для которой вероятность выпасть любой из сторон равна $\frac{1}{2}$.

а) Чему равно среднее число бросаний монеты до ближайшего выпадения «решки»?

б) Чему равно это среднее число бросаний после последнего появления «решки»?

в) Предположим, что в предыдущем бросании выпала «решка». Как эта информация изменяет ответ на вопрос а)?

8.2. Аналогия между рассуждениями о времени пробега и предыдущей задачей. Рассмотрим газ, для которого среднее время свободного пробега молекулы равно τ . Будем рассматривать определенную молекулу в некоторый момент времени.

а) Чему равно среднее время движения этой молекулы до ближайшего столкновения?

б) Чему равно среднее время движения этой молекулы после последнего столкновения?

в) Допустим, что молекула только что испытала последнее столкновение. Как эта информация изменит ответ на вопрос а)?

8.3. Среднее время пробега и время между столкновениями. Ион с зарядом q и массой m находится в газе и испытывает действие электрического поля, направленного по оси z . Рассмотрим для упрощения следующую модель: после столкновения ион начинает движение вдоль оси z с начальной нулевой скоростью и движется с ускорением $a = q\mathcal{E}/m$ в течение определенного времени t_c . Следующее столкновение приводит к остановке иона и процесс ускорения начинается сначала. На рис. 8.11 показана зависимость скорости иона от времени для нашей модели.

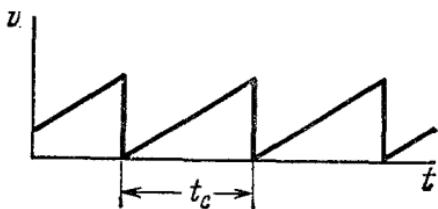


Рис. 8.11. График зависимости скорости от времени для простой модели движения иона в газе.

a) Рассмотрим ансамбль таких ионов в произвольный момент времени. Чему равно среднее время τ до следующего столкновения иона? Выразите ответ через время t_c между последовательными столкновениями.

б) Чему равно среднее время, протекшее от предыдущего столкновения? Выразите ответ через t_c .

в) Чему равна максимальная скорость, приобретаемая ионом? Чему равна его средняя скорость \bar{v} ? Выразите ответ через t_c и через среднее время τ [вопрос а)]. Сравните ваш ответ с (59).

г) Чему равно расстояние S , которое ион проходит за время τ ? Определите среднюю скорость иона \bar{v} как S/t_c . Чему равна в этом случае величина \bar{v}^2 ? Выразите ответ через t_c и через τ . Сравните результат с ответом в).

8.4. Падение капель, опыт Милликена. Опыт Милликена, в котором впервые был измерен заряд электрона, заключается в сравнении электрической силы, действующей на малую заряженную каплю масла, с силой тяжести. Этот опыт требует определения массы капли, что можно сделать, наблюдая падение капли (с постоянной скоростью) в условиях, когда сила тяжести скомпенсирована силой трения, действующей на каплю благодаря вязкости окружающего воздуха. (Воздух находится при атмосферном давлении, так что средний пробег молекул воздуха во много раз меньше диаметра капли.) Конечная (постоянная) скорость падения масляной капли обратно пропорциональна вязкости воздуха. Пусть температура воздуха возрастает. Будет ли при этом конечная скорость капли возрастать, уменьшаться или оставаться постоянной? Что произойдет при возрастании атмосферного давления?

8.5. Вискозиметр (измеритель вязкости) с вращающимся цилиндром. Необходимо измерить коэффициент вязкости η воздуха при комнатной температуре. Для этого предполагают использовать вискозиметр, состоящий из неподвижного внутреннего цилиндра (радиус R , длина L), поддерживаемого закручивающейся нитью, и внешнего цилиндра (его радиус $R+\delta$), медленно вращающегося с угловой скоростью ω . Узкая область между цилиндрами толщиной δ ($\delta \ll R$) заполнена воздухом, и мы измеряем момент кручения G , действующий на внутренний цилиндр (рис. 8.12).

а) Выразите момент кручения, действующий на внутренний цилиндр, через η и параметры установки.

б) Пусть для создания противодействующего момента используется кварцевая нить. Чтобы определить диаметр подходящей нити, воспользуемся известным выражением для момента кручения, возникающим в результате вращения цилиндра:

$$G = \frac{1}{2} \pi \eta R^3 \omega$$

Рис. 8.12. Вискозиметр с вращающимся цилиндром. Вид сверху и сбоку.

Зададимся следующими параметрами прибора: $R=2$ см, $\delta=0,1$ см, $L=15$ см и $\omega=2\pi$ рад/сек.

8.6. Оценка коэффициента вязкости газообразного аргона. Оцените величину коэффициента вязкости η аргона (Аг) при 25°C и атмосферном давлении. Примите для определения размеров атома аргона, что при низкой температуре они являются твердыми шарами, касающимися друг друга в твердом азоте. Изучение дифракции рентгеновских лучей показало, что твердый азот обладает гранецентрированной кристаллической решеткой. Это значит, что атомы Аг занимают вершины и центр приставленных вплотную друг к другу кубов. Плотность твердого аргона равна $1,65 \text{ г}/\text{см}^3$, его атомный вес $39,9$. Сравните вашу оценку с экспериментальным значением $\eta=2,27 \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$.

8.7. Влияние рассеяния, эффективное сечение которого зависит от скорости. Предположим, что молекулы газа взаимодействуют с радиальной силой F , ко-

торая следующим образом зависит от расстояния между молекулами: $F = CR^{-s}$, где s — целое положительное число, а C — постоянная.

а) Найдите, воспользовавшись соображениями размерности, зависимость полного эффективного сечения σ рассеяния молекул от их относительной скорости V . Величина σ может зависеть от V , массы молекулы m и константы C (в классическом приближении).

б) Как будет зависеть от температуры T коэффициент вязкости η ?

8.8. *Величина вакуума, необходимого для достижения термической изоляции.* Рассмотрим сосуд Дьюара цилиндрической формы, имеющий обычное устройство, показанное на рис. 5.3. Наружный диаметр внутреннего цилиндра равен 10 см, внутренний диаметр внешнего цилиндра 10,6 см. Сосуд наполнен смесью льда и воды; температура окружающей среды равна комнатной, т. е. около 25° С.

а) Предположим, что в пространстве между цилиндрами находится гелий (He) при атмосферном давлении. Оцените поток тепла (в $вт$ на см высоты сосуда), вызванный теплопроводностью газа (радиус атома He можно считать близким к 10⁻⁸ см).

б) Оцените, до какого значения (в мм рт. ст.) нужно уменьшить давление газа между стенками сосуда, чтобы поток тепла, вызванный теплопроводностью, упал в 10 раз по сравнению с а)?

8.9. *Сравнение коэффициентов переноса.* Обозначим коэффициенты вязкости гелия (He) и аргона (Ar) при $T=273^{\circ}\text{K}$ и одной атмосфере через η_1 и η_2 , а атомные веса этих одноатомных газов — через μ_1 и μ_2 соответственно.

а) Чему равно отношение σ_2/σ_1 полных эффективных сечений рассеяния атомов аргона на аргоне ($\text{Ar} - \text{Ar}$) и гелия на гелии (He — He)?

б) Чему равно отношение κ_2/κ_1 теплопроводностей аргона (Ar) и гелия (He) при $T=273^{\circ}\text{K}$?

в) Чему равно отношение D_2/D_1 коэффициентов диффузии этих газов при $T=273^{\circ}\text{K}$?

г) Атомные веса гелия и аргона равны соответственно $\mu_1=4$ и $\mu_2=40$. Измененные значения коэффициентов вязкости при $T=275^{\circ}\text{K}$ равны соответственно $\eta_1=1,87 \cdot 10^{-4}$ и $\eta_2=2,105 \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$. Воспользуйтесь этой информацией для приближенной оценки эффективных сечений σ_1 и σ_2 .

д) Предположим, что атомы рассеиваются, как твердые шары. Оцените в этом предположении диаметры d_1 и d_2 атомов гелия и аргона.

8.10. *Смешивание изотопов при диффузии.* Для опытов со смесью изотопов азота N_2 имеется сферический сосуд диаметром 1 м, в котором находится газ N_2^{14} при комнатной температуре и атмосферном давлении. С помощью крана, расположенного у стенки, в сосуд вводится небольшое количество газа N_2^{15} . Оцените, в отсутствие конвекции, сколько времени пройдет до равномерного перемешивания обоих газов?

8.11. *Влияние межпланетного газа на космический корабль.* Космический корабль в форме куба с длиной ребра L движется в пространстве со скоростью v , параллельной одному из ребер. Окружающий газ состоит из молекул с массой m , температура газа T , а число n молекул в единице объема настолько мало, что средняя длина пробега молекул во много раз больше L . Оцените, предполагая, что столкновения молекул с кораблем являются упругими, среднюю силу торможения, испытываемую космическим кораблем из-за столкновений с межпланетным газом. Считайте, что v мало по сравнению со средней скоростью газовых молекул и игнорируйте распределение молекул по скоростям. Пусть M — масса корабля и внешние силы отсутствуют. Оцените время, в течение которого скорость корабля уменьшится наполовину.

8.12. *Вероятность того, что молекула просуществует время t без столкновения.* Рассмотрим определенную молекулу газа в некоторый момент времени. Пусть

$w dt$ — вероятность того, что молекула испытывает столкновение в течение интервала времени dt .

Рассмотрим теперь вероятность существования без столкновения:

$P(t)$ — вероятность того, что молекула просуществует время t без столкновения.

Очевидно, что $P(0)=1$ (в течение исчезающе малого интервала времени молекула не испытывает столкновений), $P(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рано или поздно молекула все же испытывает столкновение). Вероятность $P(t)$ должна быть как-то связана с вероятностью столкновения $w dt$. Действительно, вероятность $P(t+dt)$ существования без столкновения в течение времени $(t+dt)$ должна быть равна вероятности $P(t)$, помноженной на вероятность того, что за время от t до $t+dt$ не произойдет столкновения. Таким образом,

$$P(t+dt) = P(t)(1-w dt).$$

Получите отсюда дифференциальное уравнение для $P(t)$. Решите его и, воспользовавшись тем, что $P(0)=1$, покажите, что $P(t)=e^{-wt}$.

8.13. Вычисление среднего времени пробега. Вероятность $\mathcal{P}(t)$ того, что молекула, не испытавшая столкновения за время t , испытает его в интервале от t до $t+dt$, равна $P(t)w dt$.

a) Покажите, что эта вероятность удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} \mathcal{P}(t) dt = 1.$$

Это условие означает, что вероятность того, что молекула, не испытавшая столкновения, в будущем ее испытает, равна 1.

b) Воспользовавшись вероятностью $\mathcal{P}(t) dt$, покажите, что среднее время $\bar{t} = t$, в течение которого молекула существует не испытывая столкновения равно $\tau = 1/w$.

b) Выразите средний квадрат времени \bar{t}^2 через τ .

8.14. Дифференциальное уравнение теплопроводности. Рассмотрим некоторую среду, температура T которой зависит от времени t и от пространственной координаты z . Плотность среды ρ , удельная теплоемкость c и теплопроводность κ . С помощью макроскопического рассмотрения, использованного при выводе уравнения диффузии (43), получите общее уравнение теплопроводности в частных производных, которому должна удовлетворять температура T .

8.15. Прибор для измерения теплопроводности газа. Вдоль оси длинного цилиндрического сосуда радиуса b натянута нить, радиус которой a и электрическое сопротивление на единицу длины R . Сосуд находится при постоянной температуре T_0 и наполнен газом, теплопроводность которого κ . Вычислите разность температур проволоки и стенки сосуда, если по проволоке течет небольшой ток I . Покажите, что измерение величины ΔT является методом определения теплопроводности κ газа. При решении задачи следует считать, что состояние равновесия достигнуто, так что температура T в любой точке не зависит от времени. (Указание. Рассмотрите условие, которое должно быть выполнено для любого цилиндрического слоя газа, заключенного между радиусами r и $r+dr$.)

***8.16.** Течение вязкой жидкости в трубе. Жидкость, коэффициент вязкости которой η , течет в трубе длиной L и радиусом a . Течение жидкости происходит под действием разности давлений; на одном конце трубы давление p_1 , на другом p_2 . Запишите условия, которые должны быть выполнены для того, чтобы трубка жидкости радиусом r двигалась без ускорения под действием разности давлений и тормозящей силы, вызванной вязкостью среды. Получите выражение для массы, протекающей за секунду через трубу в следующих двух случаях:

a) Жидкость несжимаема и ее плотность ρ .

b) В трубе течет идеальный газ, температура которого T и молекулярный вес μ . (Формула, которую вы получите, называется формулой Пуазеля.) Считайте, что соприкасающаяся со стенкой трубы среда находится в покое. Обратите внимание на то, что через любое сечение трубы за единицу времени проходит один и тот же поток жидкости или газа.