МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

М.1. Обозначения суммирования

Обозначим через x переменную, которая принимает дискретные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда для суммы

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \equiv \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{1}$$

мы применяем сокращение, показанное в правой части равенства (1). Выбор индекса i является произвольным; мы можем с равным успехом взять другой индекс, например, k, и написать

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Этими обозначениями легко воспользоваться и для двойного суммирования. Предположим, что y — переменная, принимающая дискретные значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Сумма произведений $x_i y_j$ по всем возможным значениям x и y равна

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j =$$
$$= x_1 (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + x_2 (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + \ldots$$
$$\ldots + x_m (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n),$$

или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right).} \tag{2}$$

М.2. Сумма геометрического ряда

Рассмотрим сумму

$$S_n \equiv a + af + af^2 + \ldots + af^n. \tag{3}$$

Правая часть равенства представляет собой *геометрический ряд*,

каждый член которого получается умножением предыдущего члена на f. Множитель f может быть вещественным или комплексным числом. Чтобы вычислить сумму (3), умножим обе части равенства на f. Имеем

$$fS_n = af + af^2 + \ldots + af^n + af^{n+1}. \tag{4}$$

Вычитая (4) из (3), получаем

$$(1-f)\,S_n = a - af^{n+1},$$

или

$$\boxed{S_n = a\frac{1-f^{n+1}}{1-f}\,.} \tag{5}$$

Если $|f|<1$ и геометрический ряд (3) бесконечен, т. е. $n\to\infty$, то ряд сходится. Действительно, в этом случае $f^{n+1}\to 0$ и для $n\to\infty$ выражение (3) принимает вид

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-f}\,.} \tag{6}$$

М.3. Производная от $\ln n!$ для больших n

Рассмотрим $\ln n!$ для большого и целого n. Так как $\ln n!$ меняется на небольшую часть своего значения, если n меняется на небольшое целое число, то $\ln n!$ можно рассматривать как непрерывную функцию n. Тогда мы имеем

$$\frac{d\ln n!}{dn} \approx \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{1} = \ln\frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1).$$

Так как $n\gg 1$, то $n+1\approx n$. Мы получаем, что для $n\gg 1$

$$\boxed{\frac{d\ln n!}{dn} \approx \ln n.} \tag{7}$$

Замечание. В более общем виде производную от $\ln n!$ можно выразить через любое малое, но целое приращение m:

$$\frac{d\ln n!}{dn} = \frac{\ln(n+m)! - \ln n!}{m}\,.$$

Отсюда следует

$$\frac{d\ln n!}{dn} = \frac{1}{m}\ln\frac{(n+m)!}{n!} = \frac{1}{m}\ln[(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)].$$

Так как $m\ll n$, мы получаем

$$\frac{d\ln n!}{dn} \approx \frac{1}{m}\ln[n^m] = \ln n,$$

что совпадает с (7).

М.4. Значение $\ln n!$ для больших n

Вычисление $n!$ для больших n становится слишком трудоемким. Поэтому удобно для этого случая иметь простое приближение. По определению,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n.$$

Отсюда

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \sum_{m=1}^{n} \ln m. \quad (8)$$

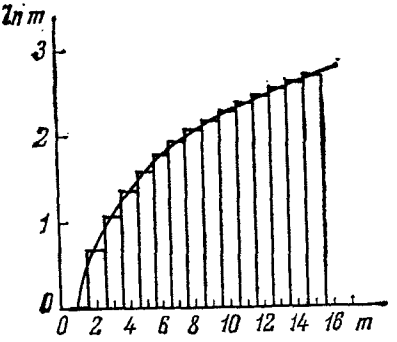

Рис. М.1. Поведение $\ln m$ в зависимости от m.

Если n велико, то почти все члены в сумме (8) [за исключением нескольких первых членов, вклад которых в (8) мал] соответствуют столь большим значениям m, что $\ln m$ меняется очень мало при изменении m на единицу. Сумма (8) (она равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников на рис. М.1) с небольшой ошибкой может быть, таким образом, выражена через интеграл (дающий площадь под непрерывной кривой на рис. М.1). В таком приближении имеем

$$\ln n! \approx \int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n. \quad (9)$$

Мы получаем для $n \gg 1$

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \quad (10)$$

так как вкладом от нижнего предела в (9) можно пренебречь.

Лучшее приближение, справедливое для $n!$ с ошибкой, меньшей 1% даже при $n=10$, дает *формула Стирлинга*

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln (2\pi n). \quad (11)$$

Если n очень велико, то $n \gg \ln n$ и формула Стирлинга переходит в (10).

Отметим, что из (10) следует

$$\frac{d \ln n!}{dn} = \ln n + n\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \ln n,$$

что совпадает с (7).

М.5. Неравенство $\ln x \leqslant x - 1$

Сравним $\ln x$ с x для положительных значений x. Рассмотрим функцию, равную разности этих величин:

$$f(x) \equiv x - \ln x. \tag{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{При } x \to 0 \ \ln x \to -\infty, \text{ поэтому } f(x) \to \infty. \\ \text{При } x \to \infty \ \ln x \ll x, \text{ поэтому } f(x) \to \infty. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Чтобы изучить поведение $f(x)$ между этими пределами, заметим, что при $x=1$

$$\frac{df}{dx} = 1 - \frac{1}{x} = 0. \tag{14}$$

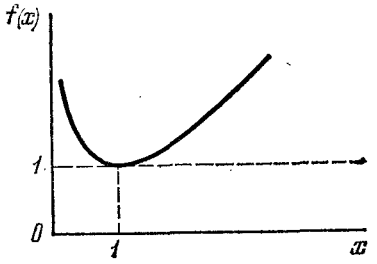

Рис. М.2. Функция $f(x) \equiv x - \ln x$.

Таким образом, $f(x)$ является непрерывной функцией x, удовлетворяющей условиям (13) и имеющей единственный экстремум при $x=1$.

Отсюда следует, что поведение $f(x)$ описывается кривой, показанной на рис. М.2, имеющей минимум при $x=1$. Таким образом, $f(x) \geqslant f(1)$ (равно при $x=1$), или, с помощью (12),

$$x - \ln x \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\ln x \leqslant x - 1 \qquad \text{(равно при } x = 1). \tag{15}$$

М.6. Вычисление интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Неопределенный интеграл $\int e^{-x^2} dx$ не может быть выражен через элементарные функции. Обозначим через I искомое значение *определенного* интеграла

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{16}$$

Этот интеграл можно вычислить, воспользовавшись свойствами экспоненциальной функции. Мы можем выразить (16) через новую переменную интегрирования:

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{17}$$

Перемножая (16) и (17), получаем

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy$$

или

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \qquad (18)$$

Этот двойной интеграл следует брать по всей плоскости x, y.

Теперь выполним это интегрирование в полярных координатах r и φ. Мы имеем $x^2+y^2=r^2$, а элемент площади в этих координатах равен $(r\,dr\,d\varphi)$. Чтобы заполнить всю плоскость, переменные φ и r должны меняться в пределах $0<\varphi<2\pi$ и $0<r<\infty$ соответственно. Таким образом, (18) принимает вид

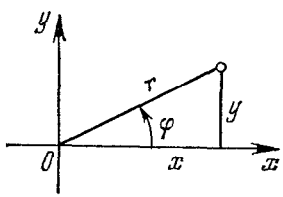

Рис. М.3. Полярные координаты r и φ, используемые для вычисления интеграла (18)

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr, \qquad (19)$$

так как интегрирование по φ дает 2π. Множитель r в подынтегральном выражении делает интегрирование тривиальным. Имеем

$$I^2 = 2\pi\int_0^{\infty} -\frac{1}{2}\,d\left(e^{-r^2}\right) = -\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = -\pi\,(0-1) = \pi,$$

или

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.} \qquad (20)$$

Так как e^{-x^2} не меняет своего значения при замене x на $-x$, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

откуда следует:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (21)$$

М.7. Вычисление интегралов типа $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n\, dx$

Обозначим вычисляемый интеграл так:

$$I_n \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n\, dx. \tag{22}$$

Обозначим также $x=\alpha^{-1/2}\, y$, тогда для $n=0$ интеграл (22) равен

$$I_0 = \alpha^{-1/2} \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \alpha^{-1/2}. \tag{23}$$

Мы воспользовались здесь формулой (21). Аналогично,

$$I_1 = \alpha^{-1} \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, y\, dy = \alpha^{-1} \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}\, \alpha^{-1}. \tag{24}$$

Все остальные интегралы, для которых целое $n \geqslant 2$, могут быть выражены через I_0 или I_1 последовательным интегрированием по частям. Действительно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n\, dx = -\frac{1}{2\alpha} \int\limits_0^\infty d\left(e^{-\alpha x^2}\right) x^{n-1} =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \left[e^{-\alpha x^2} x^{n-1} \right]_0^\infty + \frac{n-1}{2\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{n-2}\, dx.$$

Так как проинтегрированное выражение обращается в 0 для обоих пределов, мы получаем

$$\boxed{I_n = \left(\frac{n-1}{2\alpha} \right) I_{n-2}.} \tag{25}$$

Например,

$$I_2 = \frac{I_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\, \alpha^{-3/2}. \tag{26}$$

М.8. Математические символы

$=$	равно	$\geqslant$	больше или приближенно равно
$\equiv$	тождественно равно (равно по определению)	$<$	меньше
$\approx$	приближенно равно, близко к	$\ll$	на много меньше
$\sim$	имеет порядок	$<<<$	на много много меньше
$\propto$	пропорционально	$\leqslant$	меньше или равно
$\neq$	не равно	$\lesssim$	меньше или приближенно равно
$>$	больше	$\exp u$	e^u
$\gg$	на много больше	$\ln u$	натуральный логарифм u (при основании e)
$>>>$	на много, много больше		
$\geqslant$	больше или равно		