Первый интеграл совпадает с интегралом в (11). Он равен $(2\pi Npq)^{1/2}$. Второй интеграл обращается в нуль; это ясно из соображений симметрии, так как подынтегральное выражение нечетно (оно имеет противоположные знаки для $+y$ и $-y$), и вклады в интеграл при значениях $+y$ и $-y$ уничтожают друг друга. Таким образом, мы получаем

$$\bar{n} = \tilde{n} = Np, \tag{14}$$

т. е. среднее значение n равно значению $\tilde{n} = Np$, при котором вероятность P имеет максимум.

Точно так же мы получаем выражение для дисперсии

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{(n-\bar{n})^2} = \sum_n P(n)(n-Np)^2 =$$

$$= (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(n-Np)^2/2Npq} (n-Np)^2\, dn =$$

$$= (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2Npq}\, y^2\, dy.$$

Используя (М.26), мы получаем, что этот интеграл равен

$$\overline{(\Delta n)^2} = Npq. \tag{15}$$

Таким образом, стандартное отклонение от n равно *)

$$\underset{\sim}{\Delta} n = \sqrt{Npq}. \tag{16}$$

Независимо от того, как мы получили гауссовское распределение, мы можем определить его полностью с помощью двух параметров $\bar{n}$ и $\underset{\sim}{\Delta} n$ [см. (14) и (16)]:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \underset{\sim}{\Delta} n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\bar{n}}{\underset{\sim}{\Delta} n}\right)^2\right]. \tag{17}$$

Введем переменную

$$z = \frac{n-\bar{n}}{\underset{\sim}{\Delta} n}, \quad \text{так что} \quad n = \bar{n} + (\underset{\sim}{\Delta} n)\, z,$$

с помощью которой выражению (17) можно придать более компактный вид:

$$P(n)\, \underset{\sim}{\Delta} n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)z^2}.$$

Заметим, что гауссовское распределение симметрично относительно переменной z, т. е. значения $P(n)$ для z и $-z$ совпадают.

П.2. Распределение Пуассона

Рассмотрим снова биномиальное распределение (2.14):

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}. \tag{18}$$

В предыдущем пункте мы показали, что если $N \gg 1$, то выражение (18) можно приближенно представить гауссовским распределением, и такое приближение справедливо в области значений переменной

*) Заметим, что (14) и (15) точно совпадают с результатами (2.66) и (2.67), полученными в тексте при более общем условии произвольной величины N.

n, для которой вероятность $P(n)$ имеет заметное значение (т. е. в области, не слишком удаленной от значения $\tilde{n}$, отвечающего максимуму $P(n)$. Мы рассмотрим теперь приближение к (18), справедливое в другой области. Это приближение имеет значение в случае, если вероятность p достаточно мала:

$$p \ll 1, \tag{19}$$

а числа n, представляющие интерес, также малы:

$$n \ll N. \tag{20}$$

В противоположность ситуации, рассмотренной при обсуждении гауссовского приближения, число n может быть произвольно мало.

Рассмотрим теперь приближение, соответствующее условиям (19) и (20). Заметим прежде всего, что

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1).$$

Так как $n \ll N$, каждый множитель справа мало отличается от N, и мы имеем

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n. \tag{21}$$

Обратимся к множителю

$$y \equiv (1-p)^{N-n}$$

или к его логарифму

$$\ln y = (N-n)\ln(1-p).$$

Так как $n \ll N$, мы можем считать $N-n \approx N$. Далее, условие $p \ll 1$ разрешает нам ограничиться первым членом разложения логарифма в ряд Тейлора, т. е. мы полагаем $\ln(1-p) \approx -p$. Таким образом,

$$\ln y \approx -Np,$$

или

$$y \equiv (1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}. \tag{22}$$

Подставляя приближения (21) и (22) в выражение (18), мы получаем

$$P(n) = \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np},$$

или

$$\boxed{P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},} \tag{23}$$

где

$$\lambda \equiv Np. \tag{24}$$

С помощью величины λ условие (19) можно записать так:

$$\lambda \ll N. \tag{25}$$

Формула (23) называется *распределением Пуассона*. Заметим, что из-за коэффициента $n!$ в знаменателе величина $P(n)$ очень быстро убывает, когда n становится достаточно большим. Действительно, если $\lambda<1$, то λ^n есть убывающая функция n и поэтому множитель $P(n)$ монотонно убывает с ростом n. При $\lambda>1$ λ^n увеличивается с ростом n, поэтому множитель $\lambda^n/n!$, а значит, и функция $P(n)$ проходят через максимум вблизи $n\approx\lambda$ и уменьшаются с дальнейшим ростом n *). В любом случае, когда $n\gg\lambda$, вероятность $P(n)$ становится пренебрежимо малой. В области значений $n\leqslant\lambda$, где величиной $P(n)$ нельзя пренебречь, условие (25) означает, что $n\leqslant\lambda\ll N$. При этом условие (20), использовавшееся при выводе распределения Пуассона, выполняется автоматически.

Из (2.66) следует, что параметр λ, определенный равенством (24), равен среднему значению $\bar{n}$:

$$\lambda=\bar{n}. \qquad (26)$$

Отметим, что для данного значения λ или $\bar{n}$ условие (25) или (19), требующее, чтобы $p\ll1$, выполняется все лучше и лучше по мере того, как $N\to\infty$. В этом пределе пуассоновское распределение всегда применимо.

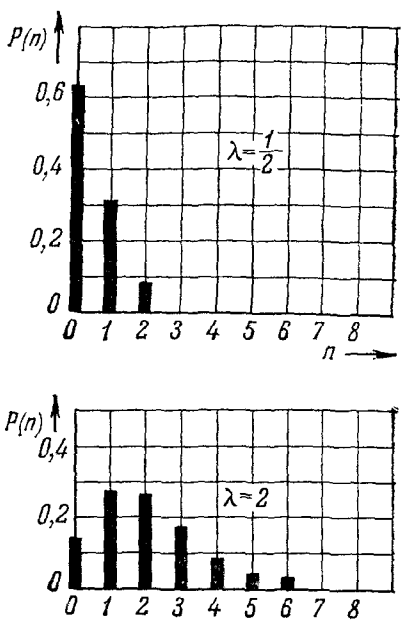

Рис. П.2. Распределение Пуассона $P(n)$ как функция n. Два случая соответствуют средним значениям $\bar{n}=\lambda=1/2$ и 2.

Проверка того, что $\lambda=\bar{n}$. Выражение (26) для среднего значения $\bar{n}$ непосредственно следует из распределения Пуассона (23). Используя определение среднего значения, мы имеем

$$\bar{n}=\sum_{n=0}^{N}P(n)\,n=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}n.$$

Так как $P(n)$ пренебрежимо мало при больших n, мы не сделаем заметной ошибки, если распространим суммирование до бесконечности. Заметив, что член с $n=0$ исчезает и положив $k=n-1$, мы найдем

$$\bar{n}=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda},$$

так как последняя сумма представляет собой разложение экспоненциальной функции. Таким образом,

$$\bar{n}=\lambda. \qquad (27)$$

*) При больших N и $\lambda\gg1$ распределение Пуассона сводится к распределению Гаусса для значений n, не слишком далеких от λ.