ГЛАВА I

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

§ 1. Построение асимптотических решений

Перейдем к изложению метода построения асимптотических приближений, в первую очередь для случая колебаний, определяемых дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{1.1}$$

где ε — малый положительный параметр.

К правильной формулировке этого метода мы можем прийти, исходя из физических представлений о характере рассматриваемого колебательного процесса.

Так, при отсутствии возмущения, т. е. при $\varepsilon=0$, колебания, очевидно, будут чисто гармоническими

$$x=a\cos\psi$$

с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом:

$$\frac{da}{dt}=0,\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega\quad (\psi=\omega t+\theta)$$

(амплитуда a и фаза θ колебания будут постоянными по времени величинами, зависящими от начальных условий).

Наличие нелинейного возмущения ($\varepsilon\neq 0$) приводит к появлению в решении уравнения (1.1) обертонов, обусловливает зависимость мгновенной частоты $\frac{d\psi}{dt}$ от амплитуды и, наконец, может вызвать систематическое увеличение или уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от притока или поглощения энергии возмущающими силами.

Все эти эффекты возмущения, очевидно, исчезают в предельном случае ($\varepsilon=0$).

Принимая все это во внимание, будем искать общее решение рассматриваемого уравнения (1.1) в виде разложения*)

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\ \psi)+\varepsilon^2 u_2(a,\ \psi)+\varepsilon^3 u_3(a,\ \psi)+\ldots, \tag{1.2}$$

в котором $u_1(a,\ \psi)$, $u_2(a,\ \psi)$, ... являются периодическими функциями угла ψ с периодом 2π, а величины a, ψ как функции времени опреде-

---

*) Впервые такая формулировка метода разложения по малому параметру была дана в книге Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Введение в нелинейную механику» [22].

ляются дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Итак, перед нами возникает задача подбора соответствующих выражений для функций $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, $\ldots, A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a), \ldots$ таким образом, чтобы выражение (1.2), в которое вместо a и ψ будут подставлены функции времени, определенные уравнениями (1.3), оказалось бы решением исходного уравнения (1.1).

Как только эта задача будет решена и будут найдены явные выражения для коэффициентов разложений, стоящих в правых частях (1.2), (1.3), вопрос об интегрировании уравнения (1.1) сводится к более простому вопросу об интегрировании уравнений (1.3) с разделяющимися переменными, допускающему исследование с помощью известных элементарных приемов.

Как мы увидим далее, определение коэффициентов указанных разложений не представляет принципиальных затруднений, однако ввиду быстрого усложнения формул практически эффективно могут быть найдены обычно лишь два-три первых члена.

Останавливаясь в наших разложениях на этих членах, т. е. полагая

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots + \varepsilon^m u_m(a, \psi) \tag{1.4}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots + \varepsilon^m A_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots + \varepsilon^m B_m(a), \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

мы сможем получить приближения первого, второго и т. д., вообще небольшого, порядка, и потому практическая применимость метода определяется не свойствами сходимости сумм (1.4), (1.5) при $m \to \infty$, а их асимптотическими свойствами для данного фиксированного m при $\varepsilon \to 0$. Требуется лишь, чтобы при малом ε выражение (1.4) давало бы достаточно точное представление решения уравнения (1.1) для достаточно длительного интервала времени. Поэтому мы не будем здесь изучать проблему сходимости при $m \to \infty$ и условимся рассматривать разложения (1.2), (1.3) как формальные разложения, необходимые для построения асимптотических приближений (1.4).

Иначе говоря, поставим задачу более осторожно, сформулировав ее как задачу о нахождении таких функций:

$$u_1(a, \psi),\ u_2(a, \psi),\ \ldots,\ A_1(a),\ A_2(a),\ \ldots,\ B_1(a),\ B_2(a),\ \ldots, \tag{1.6}$$

чтобы выражение (1.4), в котором функции времени a, ψ определяются «уравнениями m-го приближения» (1.5), удовлетворяло уравнению (1.1) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}.

Заметим, что как раз в рассматриваемом случае уравнения (1.1) можно было бы установить сходимость разложений (1.2), (1.3) при весьма общих условиях, наложенных на функцию $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Поскольку, однако, в дальнейшем придется иметь дело со случаями, в которых аналогичные разложения заведомо расходятся, мы не будем связывать изложение нашего метода построения асимптотических приближений с доказательствами сходимости и потому всегда, без дальнейших оговорок, будем придавать рядам, расположенным по степеням малого параметра, вышеуказанный формальный смысл.

Скажем еще несколько слов об оценке погрешности. Из того факта, что получаемое приближенное решение удовлетворяет уравнению (1.1) с ошибкой порядка ε^{m+1}, с помощью обычного мажорационного приема устанавливается, что отклонение приближенного решения от соответствующего точного (при согласовании начальных условий) будет ограничиваться величиной порядка $\varepsilon^{m+1}t$ и, таким образом, это отклонение остается малым при сколь угодно больших значениях εt, если только само ε достаточно мало. Здесь имеем основное отличие от приближенных формул (6), рассматривавшихся во введении, которые были применимы только при малых значениях εt, т. е. только на таком интервале времени, в течение которого амплитуда колебаний не успеет заметно отойти от своего начального значения.

Заметим, что вопросы строгого обоснования асимптотических методов представляют особую, чисто математическую проблему, имеющую значение для теории дифференциальных уравнений с малым параметром.

Мы сочли поэтому целесообразным отнести обсуждение их в главу VI, являющуюся математическим дополнением к основному тексту книги. Здесь же сосредоточим внимание на проблеме фактического построения приближенных решений и применении их к исследованию конкретных примеров, причем на ряде примеров, для которых известны точные решения, будет проиллюстрирована эффективность метода и точность приближенных формул.

Прежде чем перейти к проблеме построения приближенных решений, заметим, что задача определения выражений (1.6) содержит некоторый произвол.

В самом деле, допустим, что найдены какие-то выражения для этих функций. Беря после этого произвольные функции

$$\alpha_1(a),\ \alpha_2(a),\ \ldots,\ \beta_1(a),\ \beta_2(a),\ \ldots$$

и совершая в (1.2), (1.3) замену переменных

$$\begin{aligned} a &= b + \varepsilon\alpha_1(b) + \varepsilon^2\alpha_2(b) + \ldots, \\ \psi &= \varphi + \varepsilon\beta_1(b) + \varepsilon^2\beta_2(b) + \ldots, \end{aligned}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= b\cos\varphi + \varepsilon\left[\alpha_1(b)\cos\varphi - b\beta_1(b)\sin\varphi + u_1(b, \varphi)\right] + \varepsilon^2\ldots, \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon A_1(b) + \varepsilon^2\left[\frac{dA_1(b)}{db}\alpha_1(b) - \frac{d\alpha_1(b)}{db}A_1(b) + A_2(b)\right] + \varepsilon^3\ldots, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(b) + \varepsilon^2\left[\frac{dB_1(b)}{db}\beta_1(b) - \frac{d\beta_1(b)}{db}A_1(b) + B_2(b)\right] + \varepsilon^3\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

Как видно из (1.7), мы опять пришли к формулам типа (1.2), (1.3), только уже с измененными выражениями коэффициентов (1.6). Поэтому для однозначности определения этих коэффициентов следует наложить на них дополнительные условия, что можно сделать, вообще говоря, с известным произволом. В качестве этих дополнительных условий примем условия отсутствия первой гармоники в выражениях $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi), \ldots$ Иначе говоря, будем так определять эти периодические функции фазового угла, чтобы выполнялись равенства

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} u_1(a, \psi)\cos\psi\, d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} u_2(a, \psi)\cos\psi\, d\psi = 0, \ldots \\ &\int_0^{2\pi} u_1(a, \psi)\sin\psi\, d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} u_2(a, \psi)\sin\psi\, d\psi = 0, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

С физической точки зрения принятие этих условий соответствует выбору в качестве величины a полной амплитуды первой основной гармоники колебания.

После сделанных предварительных замечаний перейдем к поставленной задаче о нахождении подходящих выражений для (1.6) с учетом дополнительных условий (1.8).

Дифференцируя правую часть (1.2), находим:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt}\left\{\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right\} + \\ &\quad + \frac{d\psi}{dt}\left\{-a\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \ldots\right\}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2}\left\{\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right\} + \\ &\quad + \frac{d^2\psi}{dt^2}\left\{-a\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \ldots\right\} + \\ &\quad + \left(\frac{da}{dt}\right)^2\left\{\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \ldots\right\} + \\ &\quad + 2\frac{da}{dt}\frac{d\psi}{dt}\left\{-\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\,\partial\psi} + \ldots\right\} + \\ &\quad + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\left\{-a\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \ldots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Учитывая уравнения (1.3), можем найти следующие величины:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= \left(\varepsilon\frac{dA_1}{da} + \varepsilon^2\frac{dA_2}{da} + \ldots\right)(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots) = \varepsilon^2 A_1\frac{dA_1}{da} + \varepsilon^3\ldots, \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \left(\varepsilon\frac{dB_1}{da} + \varepsilon^2\frac{dB_2}{da} + \ldots\right)(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots) = \varepsilon^2 A_1\frac{dB_1}{da} + \varepsilon^3\ldots, \\ \left(\frac{da}{dt}\right)^2 &= (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots)^2 = \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3\ldots, \\ \frac{da}{dt}\frac{d\psi}{dt} &= (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots)(\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots) = \\ &= \varepsilon A_1\omega + \varepsilon^2(A_2\omega + A_1 B_1) + \varepsilon^3\ldots, \\ \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 &= (\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots)^2 = \\ &= \omega^2 + \varepsilon 2\omega B_1 + \varepsilon^2(B_1^2 + 2\omega B_2) + \varepsilon^3\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Подставив (1.3), (1.10) в (1.9) и располагая результат по степеням параметра ε, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -a\omega\sin\psi + \varepsilon\left\{A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right\} + \\
&+ \varepsilon^2\left\{A_2\cos\psi - aB_2\sin\psi + A_1\frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \omega\frac{\partial u_2}{\partial\psi}\right\} + \varepsilon^3\ \ldots, \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2\cos\psi + \varepsilon\left\{-2\omega A_1\sin\psi - 2\omega aB_1\cos\psi + \omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\right\} + \\
&+ \varepsilon^2\left\{\left(A_1\frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2\right)\cos\psi - \right.\\
&- \left(2\omega A_2 + 2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi + \\
&\left. + 2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi} + 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}\right\} + \varepsilon^3\ \ldots,
\end{aligned}\right\}\quad (1.11)$$

откуда следует, что левую часть уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= \varepsilon\left\{-2\omega A_1\sin\psi - 2\omega aB_1\cos\psi + \omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2 u_1\right\} + \\
&+ \varepsilon^2\left\{\left(A_1\frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2\right)\cos\psi - \right.\\
&- \left(2\omega A_2 + 2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi + 2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi} + \\
&\left. + 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \omega^2 u_2\right\} + \varepsilon^3\ \ldots \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Правую часть уравнения (1.1), учитывая (1.2) и (1.11), можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \varepsilon f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \varepsilon^2\left\{u_1 f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \right.\\
&\left. + \left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\right\} + \varepsilon^3\ \ldots \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Для того чтобы рассматриваемое выражение (1.2) удовлетворяло исходному уравнению (1.1) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}, необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в правых частях (1.12) и (1.13) до членов m-го порядка включительно.

В результате получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + u_1\right) &= f_0(a, \psi) + 2\omega A_1\sin\psi + 2\omega aB_1\cos\psi, \\
\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + u_2\right) &= f_1(a, \psi) + 2\omega A_2\sin\psi + 2\omega aB_2\cos\psi, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial\psi^2} + u_m\right) &= f_{m-1}(a, \psi) + 2\omega A_m\sin\psi + 2\omega aB_m\cos\psi,
\end{aligned}\right\}\quad (1.14)$$

где для сокращения введены обозначения:

$$
\left.\begin{aligned}
&f_0(a,\ \psi) = f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi),\\
&f_1(a,\ \psi) = u_1 f'_x(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi) +\\
&\quad + \left[A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right] f'_{x'}(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi) +\\
&\quad + \left(aB_1^2 - A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi + \left(2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}\,a\right)\sin\psi -\\
&\qquad\qquad - 2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi} - 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (1.15)
$$

Нетрудно видеть, что $f_k(a,\ \psi)$ есть периодическая функция переменной ψ с периодом 2π, зависящая от a; ее явное выражение известно, как только найдены выражения $A_j(a)$, $B_j(a)$, $u_j(a,\ \psi)$ до k-го номера включительно.

Чтобы определить $A_1(a)$, $B_1(a)$, $u_1(a,\ \psi)$ из первого уравнения системы (1.14), рассмотрим разложения Фурье для функций $f_0(a,\ \psi)$ и $u_1(a,\ \psi)$:

$$
\left.\begin{aligned}
f_0(a,\ \psi) &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi\},\\
u_1(a,\ \psi) &= v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\{v_n(a)\cos n\psi + w_n(a)\sin n\psi\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.16)
$$

Подставляя правые части выражений (1.16) в первое уравнение системы (1.14), получим выражение

$$
\omega^2 v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\omega^2(1-n^2)\{v_n(a)\cos n\psi + w_n(a)\sin n\psi\} =
$$
$$
= g_0(a) + \{g_1(a) + 2\omega aB_1\}\cos\psi + \{h_1(a) + 2\omega A_1\}\sin\psi +
$$
$$
+ \sum_{n=2}^{\infty}\{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi\},
$$

из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, найдем:

$$
\left.\begin{aligned}
&g_1(a) + 2\omega aB_1 = 0, \quad h_1(a) + 2\omega A_1 = 0,\\
&v_0(a) = \frac{g_0(a)}{\omega^2}, \quad v_n(a) = \frac{g_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, \quad w_n(a) = \frac{h_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}\\
&\qquad\qquad (n = 2,\ 3,\ \dots).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.17)
$$

Таким образом, нами однозначно определены $A_1(a)$ и $B_1(a)$, а также все гармонические компоненты функции $u_1(a,\ \psi)$, кроме первых $v_1(a)$ и $w_1(a)$. Однако в силу дополнительных условий (1.8) эта функция не содержит первой гармоники, поэтому

$$
v_1(a) = 0, \quad w_1(a) = 0
$$

и, следовательно,

$$
u_1(a,\ \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2}. \qquad (1.18)
$$

Определив полностью $u_1(a, \psi)$, $A_1(a)$ и $B_1(a)$, мы тем самым в соответствии с (1.15) имеем явное выражение для $f_1(a, \psi)$. Разлагая его в ряд Фурье

$$f_1(a, \psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n^{(1)}(a)\cos n\psi + h_n^{(1)}(a)\sin n\psi\}$$

и воспользовавшись вторым из уравнений (1.14) и условием (1.8), совершенно аналогично находим:

$$g_1^{(1)}(a) + 2\omega a B_2 = 0, \quad h_1^{(1)}(a) + 2\omega A_2 = 0 \tag{1.19}$$

и

$$u_2(a, \psi) = \frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}(a)\cos n\psi + h_n^{(1)}(a)\sin n\psi}{1-n^2}.$$

Таким образом, получается процесс для последовательного однозначного определения интересующих нас величин (1.6).

Изложенный метод действительно позволяет определить

$$u_n(a, \psi), \quad A_n(a), \quad B_n(a) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

до какого угодно высокого значения индекса n и тем самым построить приближенные решения, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению (1.1) с точностью до величин сколь угодно высокого порядка малости по отношению к ε.

Как видно из процесса определения функций (1.6), величины $A_n(a)$, $B_n(a)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ однозначно определяются условиями (1.8), выражающими отсутствие в функциях $u_n(a, \psi)$ первой гармоники. В результате получаем для $A_n(a)$, $B_n(a)$ выражения типа (1.17) или (1.19), которые обеспечивают отсутствие в правых частях уравнений (1.14) членов с первыми гармониками, что в свою очередь дает возможность избежать появления в решении секулярных членов.

Рассмотрим первое приближение:

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{1.20}$$

в котором

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a). \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Заметим, что, исходя из (1.21), можем написать:

$$\Delta a = a(t) - a(0) \sim \varepsilon t\widetilde{A}_1,$$

$$\Delta(\psi - \omega t) = [\psi(t) - \omega t] - \psi(0) \sim \varepsilon t\widetilde{B}_1,$$

где $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{B}_1$ — некоторые средние значения $A_1(a)$ и $B_1(a)$ на интервале $(0, t)$. Рассматривая последние выражения, видим, что время t, в течение которого величины a и $\psi - \omega t$ смогут получить конечные приращения, должно быть порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

С другой стороны, уравнения первого приближения (1.21) получаются после пренебрежения в уравнениях (1.3) членами порядка малости ε^2, а такая ошибка в значениях первых производных $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ за время t приводит к ошибке порядка $\varepsilon^2 t$ в значениях самих функций a и ψ. Мы видим, следовательно, что в том интервале времени, в течение которого a, $\psi - \omega t$ успеют заметно отойти от своих начальных значений, погрешности в значениях амплитуды и фазы колебаний будут величинами порядка ε и потому в этом интервале в выражении (1.20) не имеет смысла сохранять член $\varepsilon u_1(a, \psi)$ первого порядка малости, поскольку как погрешность формулы (1.20), так и погрешность упрощенной формулы

$$x = a \cos \psi$$

будут величинами первого порядка малости.

Рассмотрим еще случай стационарных колебаний, т. е. колебаний, совершающихся с постоянной амплитудой и частотой. В этом случае, очевидно, имеем:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

или

$$\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots = 0. \tag{1.22}$$

Из-за присутствия множителя ε перед $A_1(a)$ видно, что если в выражении (1.22) мы отбросим величины, начиная со второго порядка малости, и будем определять значение стационарной амплитуды первой гармоники из уравнения первого приближения

$$A_1(a) = 0,$$

то тем самым мы совершим ошибку, вообще говоря, не второго порядка, а уже первого порядка малости.

Принимая все это во внимание, естественно в дальнейшем брать в качестве первого приближения упрощенное выражение

$$x = a \cos \psi, \tag{1.23}$$

в котором a и ψ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a). \end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

Рассуждая совершенно аналогично, в качестве второго приближения возьмем выражение

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{1.25}$$

в котором функции времени a и ψ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

Приведем здесь также явные формулы для $A_1(a)$, $A_2(a)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$ и $u_1(a, \psi)$. Из (1.15), (1.16) и (1.17) имеем:

$$\left.\begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

Далее, из (1.18) следует, что

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{n^2-1}, \tag{1.28}$$

где $g_n(a)$ и $h_n(a)$ находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos n\psi\, d\psi, \\ h_n(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin n\psi\, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Наконец, в силу (1.15) и (1.19) можем написать:

$$\left.\begin{aligned} A_2(a) = &-\frac{1}{2\omega}\left\{2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right\} - \\ &-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\Big[u_1(a, \psi) f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \\ &+\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)\times \\ &\times f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\Big]\sin\psi\, d\psi, \\ B_2(a) = &-\frac{1}{2\omega}\left\{B_1^2 - \frac{A_1}{a}\frac{dA_1}{da}\right\} - \\ &-\frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}\Big[u_1(a, \psi) f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \\ &+\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)\times \\ &\times f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\Big]\cos\psi\, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

Заметим, что уравнения второго приближения (1.26), где $A_2(a)$ и $B_2(a)$ определяются согласно выражениям (1.30), сложны ввиду того, что они записаны в самом общем случае. Для конкретных колебательных систем, как будет показано ниже, эти уравнения значительно упрощаются.

Остановимся теперь на более детальном рассмотрении первого приближения.

В соответствии с формулами (1.23), (1.24) и (1.27) первое приближение для решения уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$x = a\cos\psi, \tag{1.31}$$

где a и ψ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) = \omega_1(a), \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

причем

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\,d\psi, \tag{1.33}$$

$$\omega_1(a) = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\,d\psi. \tag{1.34}$$

Заметим, что полученные нами уравнения первого приближения совпадают с уравнениями, найденными по методу Ван-дер-Поля.

Выведем теперь еще одну формулу для определения мгновенной собственной частоты $\omega_1(a)$.

Возведя правую часть выражения (1.34) в квадрат, получим:

$$\omega_1^2(a) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\,d\psi + \\ + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2a^2\omega^2}\left[\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\,d\psi\right]^2,$$

откуда, поскольку все вычисления ведем в первом приближении, отбрасывая члены второго порядка малости по отношению к ε, имеем:

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi}[\omega^2 a\cos\psi - \varepsilon f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)]\cos\psi\,d\psi. \tag{1.35}$$

Выражение для квадрата мгновенной собственной частоты (1.35) можно упростить.

Введем функцию

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \omega^2 x - \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

объединив «квазиупругий член» с нелинейным.

Тогда, очевидно,

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\,d\psi. \tag{1.36}$$

Аналогично, принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi}\omega^2 a\cos\psi\sin\psi\,d\psi = 0,$$

имеем также:

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\,d\psi. \tag{1.37}$$

В полученных формулах (1.36) и (1.37) функции $\varepsilon A_1(a)$ и $\omega_1(a)$ представлены непосредственно с помощью функции $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, что отличает их от формул (1.33) и (1.34), где фигурирует лишь нелинейный поправочный член. Входящая в последние две формулы величина ω может быть, очевидно, интерпретирована как приближенное значение (нулевое приближение) частоты колебаний рассматриваемой системы.

Приведем теперь еще один способ получения уравнений первого приближения. Прежде всего напомним, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (1.1) допускает решение:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\psi, \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega\sin\psi, \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

где $\psi = \omega t + \theta$, причем амплитуда a и фаза колебания θ являются постоянными величинами.

Нетрудно, однако, убедиться, что формулы (1.38) могут быть оставлены и в случае $\varepsilon \neq 0$ при условии, что величины a и θ мы будем рассматривать не как постоянные, а как некоторые функции времени.

Будем рассматривать (1.38) как некоторую замену переменных, a и θ — амплитуду и фазу колебания — примем за новые неизвестные функции времени, определив которые, с помощью (1.38) сможем найти искомое выражение для первоначально неизвестной x. Чтобы составить дифференциальные уравнения для a и θ, продифференцируем обе части первой формулы (1.38). Получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos\psi - a\frac{d\theta}{dt}\sin\psi - a\omega\sin\psi, \tag{1.39}$$

откуда, принимая во внимание второе соотношение (1.38), имеем уравнение

$$\frac{da}{dt}\cos\psi - a\frac{d\theta}{dt}\sin\psi = 0. \tag{1.40}$$

Продифференцировав обе части второй формулы (1.38), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{da}{dt}\omega\sin\psi - a\omega\frac{d\theta}{dt}\cos\psi - a\omega^2\cos\psi. \tag{1.41}$$

Подставляя теперь в уравнение (1.1) вместо x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ соответственно их значения, взятые согласно формулам (1.38) и (1.41), найдем:

$$-\omega\frac{da}{dt}\sin\psi - a\omega\frac{d\theta}{dt}\cos\psi = \varepsilon f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi). \tag{1.42}$$

Решая систему двух уравнений (1.40) и (1.42) относительно неизвестных $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

Итак, вместо одного дифференциального уравнения второго порядка (1.1) относительно переменной x имеем два дифференциальных уравнения (1.43) первого порядка относительно переменных a и θ.

Заметим, что правые части уравнений (1.43) обладают по отношению к независимой переменной t периодом, равным $\frac{2\pi}{\omega}$, а кроме этого, $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ пропорциональны малому параметру ε, так что a и θ будут медленно изменяющимися функциями времени.

Дифференциальные уравнения, приведенные к такому виду, будем называть уравнениями в стандартной форме.

Нетрудно видеть, что правые части уравнений (1.43) могут быть представлены в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi &= \\ = \varepsilon\sum_{\nu}\left[f_{\nu1}^{(1)}(a)\cos\nu\psi + f_{\nu2}^{(1)}(a)\sin\nu\psi\right]&, \\ -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi &= \\ = \varepsilon\sum_{\nu}\left[f_{\nu1}^{(2)}(a)\cos\nu\psi + f_{\nu2}^{(2)}(a)\sin\nu\psi\right]&. \end{aligned}\right\} \tag{1.44}$$

Согласно вышеизложенному форма приближенного решения системы уравнений может быть определена из следующих соображений. Так как a и θ — медленно изменяющиеся величины, представим их как суперпозицию плавно изменяющихся членов $\bar{a}$ и $\bar{\theta}$ и суммы малых вибрационных членов. В первом приближении положим

$$a = \bar{a}, \quad \theta = \bar{\theta} \qquad (\bar{\psi} = \omega t + \bar{\theta}). \tag{1.45}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\bar{a}\cos\bar{\psi},\ -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\sin\bar{\psi} &= \\ = \varepsilon\sum_{\nu}\left[f_{\nu1}^{(1)}(\bar{a})\cos\nu\bar{\psi} + f_{\nu2}^{(1)}(\bar{a})\sin\nu\bar{\psi}\right]&, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\bar{a}\omega} f(\bar{a}\cos\bar{\psi},\ -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\cos\bar{\psi} &= \\ = \varepsilon\sum_{\nu}\left[f_{\nu1}^{(2)}(\bar{a})\cos\nu\bar{\psi} + f_{\nu2}^{(2)}(\bar{a})\sin\nu\bar{\psi}\right]&, \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(1)}(\bar{a}) + \text{малые синусоидальные колебательные члены}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(2)}(\bar{a}) + \text{малые синусоидальные колебательные члены}. \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

Считая, что эти синусоидальные колебательные члены вызывают лишь малые вибрации a и θ около их первых приближений $\bar{a}$ и $\bar{\theta}$

и не оказывают влияния на систематическое изменение a и θ, приходим к уравнениям первого приближения в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(1)}(\bar{a}) = \underset{t}{M}\left\{-\frac{\varepsilon}{\omega} f(\bar{a}\cos\bar{\psi},\ -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\sin\bar{\psi}\right\}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(2)}(\bar{a}) = \underset{t}{M}\left\{-\frac{\varepsilon}{\bar{a}\omega} f(\bar{a}\cos\bar{\psi},\ -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\cos\bar{\psi}\right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.48)$$

где $\underset{t}{M}$ — оператор усреднения при постоянных $\bar{a}$ и $\bar{\theta}$ по явно содержащемуся времени.

Нетрудно видеть, что полученные уравнения (1.48) для $\bar{a}$ и $\bar{\theta}$ совпадают с ранее найденными уравнениями первого приближения.

Действительно, произведя усреднение и введя вместо θ полную фазу колебаний ψ, получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi.$$

Для получения второго приближения необходимо принять во внимание в выражениях для a и θ также и вибрационные члены. Учитывая в (1.47) члены $\varepsilon f_{\nu1}^{(i)}(\bar{a})\cos\nu\bar{\psi}$, $\varepsilon f_{\nu2}^{(i)}(\bar{a})\sin\nu\bar{\psi}$ $(i=1,\ 2)$, как вызывающие в a и θ колебания вида

$$\frac{\varepsilon\sin\nu\bar{\psi}}{\nu} f_{\nu1}^{(i)}(\bar{a}), \quad \frac{\varepsilon\cos\nu\bar{\psi}}{\nu} f_{\nu2}^{(i)}(\bar{a}) \quad (i=1,\ 2),$$

приходим к следующим приближенным выражениям:

$$\left.\begin{aligned} a &= \bar{a} + \varepsilon\sum_{\nu\neq0}\frac{1}{\nu}\left[f_{\nu1}^{(1)}(\bar{a})\sin\nu\bar{\psi} - f_{\nu2}^{(1)}(\bar{a})\cos\nu\bar{\psi}\right], \\ \theta &= \bar{\theta} + \varepsilon\sum_{\nu\neq0}\frac{1}{\nu}\left[f_{\nu1}^{(2)}(\bar{a})\sin\nu\bar{\psi} - f_{\nu2}^{(2)}(\bar{a})\cos\nu\bar{\psi}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (1.49)$$

которые соответствуют улучшенному первому приближению. Подставляя значения (1.49) в правую часть (1.38), получаем с точностью до величин первого порядка малости включительно выражение (1.25).

Для получения уравнений второго приближения, определяющих a и θ с точностью до величин второго порядка малости включительно, необходимо значения (1.49) подставить в правую часть уравнений (1.48) и результат усреднить по явно содержащемуся времени.

Приведенным выше рассуждениям можно придать более обоснованную форму. Для этого необходимо выражения (1.45), (1.49) и т. д. рассматривать как замену переменных в исходной системе дифференциальных уравнений, приведенной к стандартному виду. Однако на этом вопросе остановимся более подробно в конце книги.

Заметим только, что изложенный метод усреднения дифференциальных уравнений, приведенных к стандартному виду, очень облегчает применение методов нелинейной механики для построения приближенных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений.

В настоящем параграфе нами изложен метод построения приближенных решений для уравнений типа (1.1). Не представляет, однако, никаких затруднений распространить его и на уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \varepsilon\right), \tag{1.50}$$

где

$$\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \varepsilon\right)=\varepsilon f_1\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon^2 f_2\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)+\ldots$$

Здесь правая часть уравнения имеет более сложную зависимость от ε. Ввиду отсутствия каких-либо существенных особенностей мы не будем детально останавливаться на последнем уравнении, а перейдем к подробному рассмотрению различных частных случаев, встречающихся на практике.

§ 2. Консервативные системы, близкие к линейным

В качестве частного случая уравнения (1.1) рассмотрим свободные псевдогармонические колебания без затухания некоторой массы m, т. е. колебания, описываемые уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+p(x)=0, \tag{2.1}$$

в котором зависимость

$$F_s=p(x)$$

между упругой силой и перемещением является нелинейной.

Предположим, что эта нелинейность достаточно «слаба», так что можно положить

$$p(x)=kx+\varepsilon\Phi(x). \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (2.1) будет принадлежать к рассмотренному типу, причем

$$\omega^2=\frac{k}{m},\quad f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)=-\frac{\Phi(x)}{m}, \tag{2.3}$$

где ε — малый положительный параметр.

Для построения первого приближения рассмотрим разложение Фурье для функции $\Phi(a\cos\psi)$. Так как эта функция является четной, то в ее разложении в ряд Фурье синусы будут отсутствовать:

$$\Phi(a\cos\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(a)\cos n\psi. \tag{2.4}$$

Отсюда на основании (1.16) и (2.3) получим:

$$g_n(a)=-\frac{C_n(a)}{m},\quad h_n(a)=0,$$

откуда находим:

$$A_1(a)=0,\quad B_1(a)=\frac{1}{2\omega ma}C_1(a). \tag{2.5}$$