В настоящем параграфе нами изложен метод построения приближенных решений для уравнений типа (1.1). Не представляет, однако, никаких затруднений распространить его и на уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \varepsilon\right), \tag{1.50}$$

где

$$\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \varepsilon\right)=\varepsilon f_1\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon^2 f_2\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)+\ldots$$

Здесь правая часть уравнения имеет более сложную зависимость от ε. Ввиду отсутствия каких-либо существенных особенностей мы не будем детально останавливаться на последнем уравнении, а перейдем к подробному рассмотрению различных частных случаев, встречающихся на практике.

§ 2. Консервативные системы, близкие к линейным

В качестве частного случая уравнения (1.1) рассмотрим свободные псевдогармонические колебания без затухания некоторой массы m, т. е. колебания, описываемые уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+p(x)=0, \tag{2.1}$$

в котором зависимость

$$F_s=p(x)$$

между упругой силой и перемещением является нелинейной.

Предположим, что эта нелинейность достаточно «слаба», так что можно положить

$$p(x)=kx+\varepsilon\Phi(x). \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (2.1) будет принадлежать к рассмотренному типу, причем

$$\omega^2=\frac{k}{m},\quad f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)=-\frac{\Phi(x)}{m}, \tag{2.3}$$

где ε — малый положительный параметр.

Для построения первого приближения рассмотрим разложение Фурье для функции $\Phi(a\cos\psi)$. Так как эта функция является четной, то в ее разложении в ряд Фурье синусы будут отсутствовать:

$$\Phi(a\cos\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(a)\cos n\psi. \tag{2.4}$$

Отсюда на основании (1.16) и (2.3) получим:

$$g_n(a)=-\frac{C_n(a)}{m},\quad h_n(a)=0,$$

откуда находим:

$$A_1(a)=0,\quad B_1(a)=\frac{1}{2\omega m a}C_1(a). \tag{2.5}$$

Таким образом, учитывая (1.23), (1.24), в первом приближении имеем:

$$x_{\mathrm{I}} = a \cos \psi,$$

где a и ψ определяются уравнениями

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega m a} = \omega_{\mathrm{I}}(a) \tag{2.6}$$

(значок внизу у x и $\omega(a)$ указывает номер приближения).

Из первого уравнения системы (2.6) следует, что амплитуда колебания не зависит от времени и сохраняет свое начальное значение

$$a = a_0 = \mathrm{const}.$$

Ввиду постоянства a из второго уравнения (2.6) получаем:

$$\psi = \omega_{\mathrm{I}}(a)\, t + \theta,$$

где θ — фазовая постоянная, равная начальному значению фазы ψ.

Таким образом, в рассматриваемом случае изучаемое колебание в первом приближении будет гармоническим. Нелинейный характер уравнения (2.1) в первом приближении сказывается, очевидно, лишь в том, что частота колебаний $\omega_{\mathrm{I}}(a)$ зависит от амплитуды. Иначе говоря, из-за присутствия в уравнении (2.1) нелинейного члена $\varepsilon\Phi(x)$ колебательная система теряет свою изохронность (изохронностью называется свойство линейных колебательных систем, состоящее в том, что их частота собственных колебаний не зависит от величины амплитуды), причем, как это следует из выражения для $\omega_{\mathrm{I}}(a)$ (2.6), потеря изохронности будет тем меньше, чем меньше будет $\varepsilon\Phi(x)$ по сравнению с $\omega^2 x$.

Перейдем теперь к построению второго приближения. По формуле (1.18) находим:

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1}. \tag{2.7}$$

Подставив найденные выражения (2.5) и (2.7) в (1.30), получим

$$\left.\begin{aligned} &A_2(a) = 0, \\ &B_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left[\frac{C_1(a)}{2\omega m a}\right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2\omega m \pi a} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a)}{k(n^2-1)} \int_0^{2\pi} \Phi'(a\cos\psi)\cos\psi \cos n\psi \, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Поскольку

$$C_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a\cos\psi)\, d\psi,$$

$$C_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a\cos\psi) \cos n\psi \, d\psi \quad (n \geqslant 1),$$

то, дифференцируя, найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi'(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=\frac{dC_0(a)}{da},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi'(a\cos\psi)\cos\psi\cos n\psi\,d\psi=\frac{dC_n(a)}{da}$$

и, следовательно, можем написать:

$$B_2(a)=-\frac{1}{2\omega}\left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma}\right]^2+\frac{1}{2\omega mka}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1}-2C_0(a)\frac{dC_0(a)}{da}\right\}. \tag{2.9}$$

Таким образом, во втором приближении имеем:

$$x_{\rm II}=a\cos\psi-\frac{\varepsilon C_0(a)}{k}+\frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\cos n\psi}{n^2-1}, \tag{2.10}$$

причем

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=0,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega_{\rm II}(a),\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

где

$$\omega_{\rm II}(a)=\omega+\frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega ma}-\frac{\varepsilon^2}{2\omega}\left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma}\right]^2+\frac{\varepsilon^2}{2\omega mka}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1}-2C_0(a)\frac{dC_0(a)}{da}\right\}. \tag{2.12}$$

Мы видим, что и во втором приближении амплитуда a не зависит от времени и сохраняет любое свое начальное значение. Фазовый угол ψ вращается с постоянной скоростью

$$\psi=\omega_{\rm II}(a)\,t+\theta\quad(\theta=\mathrm{const}),$$

и формула (2.10) дает приближенное представление общего решения (с точностью до величин порядка малости ε^2), содержащего две произвольные постоянные интеграции a и θ. Заметим, что для консервативных колебательных систем, описываемых уравнением типа (2.1), все величины $A_n(a)$ обращаются в нуль, так что уравнение для амплитуды основной гармоники с точностью до любой степени ε будет:

$$\frac{da}{dt}=0,$$

что выражает условие стационарности колебания с произвольной амплитудой. Так как погрешность формулы (2.10) является величиной порядка ε^2, то, производя вычисления с той же степенью точности, находим следующие выражения для максимального и минимального отклонения:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{II}\,\max} &= a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)}{n^2-1}, \\ x_{\mathrm{II}\,\min} &= -a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n C_n(a)}{n^2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, преобразуем формулу (2.12), служащую для определения зависимости частоты от амплитуды колебания.

Возводя обе ее части в квадрат и удерживая при этом лишь члены не выше второго порядка малости, получим:

$$\omega_{\mathrm{II}}^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} + \frac{\varepsilon^2}{mka}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\dfrac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2C_0'(a)\frac{dC_0(a)}{da}\right\}. \tag{2.14}$$

Ограничиваясь первым приближением, имеем:

$$\omega_{\mathrm{I}}^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma}. \tag{2.15}$$

Заметим теперь, что во всех полученных выше формулах линейная и нелинейная слагающие упругой силы входят раздельно.

Линейная слагающая входит посредством множителей ω и k, нелинейная — посредством коэффициентов $C_n(a)$ разложения (2.4) для функции $\Phi(a\cos\psi)$.

Однако нетрудно видеть, что разделение полной упругой силы $p(x)$ (2.2) на линейную и нелинейную слагающие в значительной степени произвольно, так как постоянную k можно выбирать различными способами.

Определим ее, например, из того условия, чтобы «нулевое приближение» для частоты колебания ω совпадало бы с первым приближением $\omega_{\mathrm{I}}(a)$.

Тогда согласно (2.15) получим:

$$C_1(a) = 0. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь разложение Фурье

$$p(a\cos\psi) = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a)\cos n\psi \tag{2.17}$$

и заметим, что в соответствии с (2.2) и (2.4) будет:

$$\left.\begin{aligned} p_n(a) &= \varepsilon C_n(a) \quad (n = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots), \\ p_1(a) &= ak + \varepsilon C_1(a). \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Итак, условие (2.16) приводит к следующей формуле для определения эквивалентной жесткости:

$$k = \frac{1}{a}p_1(a) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} p(a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi. \tag{2.19}$$

Постоянная k определяется здесь как некоторая функция амплитуды, и поэтому возможность использования формулы (2.19) связана с тем, что сама амплитуда a является постоянной. Если бы мы рассматривали затухающие псевдогармонические колебания, то такой выбор постоянной k вообще был бы недопустимым, так как тогда $\frac{p_1(a)}{a}$ оказалось бы переменной во времени величиной.

Постоянную k можно определить и иным способом. Рассматривая, например, степенное разложение упругой силы в окрестности точки равновесия

$$p(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots,$$

естественно отнести αx к линейной части, а остальные члены к нелинейной

$$\varepsilon\Phi(x) = \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots,$$

что соответствует выбору k с помощью формулы

$$k = p'(0). \tag{2.20}$$

Независимо от того или иного способа выбора постоянной k мы можем, воспользовавшись (2.18), освободить формулы (2.10), (2.13), (2.14), (2.15) от параметра ε, перестроив их так, чтобы в них входила лишь известная функция $p(x)$.

В результате приходим к следующим окончательным формулам: первое приближение

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= a\cos\psi, \\ \omega_{\mathrm{I}}^2(a) &= \frac{p_1(a)}{ma}; \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

второе приближение

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{II}} &= a\cos\psi - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n(a)\cos n\psi}{n^2-1}, \\ \omega_{\mathrm{II}}^2(a) &= \omega_{\mathrm{I}}^2(a) + \frac{1}{mka}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n(a)\frac{dp_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2p_0(a)\frac{dp_0(a)}{da}\frac{1}{mka}. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Как видно, слагаемое

$$\frac{p_n(a)\frac{dp_n(a)}{da}}{mka(n^2-1)}$$

представляет влияние n-й гармоники на собственную частоту, а слагаемое

$$-2\frac{p_0(a)\frac{dp_0(a)}{da}}{mka}$$

появляется за счет смещения рабочей точки на характеристике в связи с наличием в колебании постоянного члена

$$-\frac{p_0(a)}{k}.$$

В частном случае симметричных колебаний, когда упругая характеристика системы $F_s = p(x)$ симметрична *) относительно начала координат, так что значения F_s для $\pm x$ равны по величине и противоположны по знаку

$$p(x) = -p(-x),$$

все четные гармоники в разложении (2.17) исчезают и формулы (2.22) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} x_{II} &= a\cos\psi + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{2n+1}(a)\cos(2n+1)\psi}{(2n+1)^2-1}, \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega_I^2(a) + \frac{1}{mka}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{2n+1}(a)\dfrac{dp_{2n+1}(a)}{da}}{(2n+1)^2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Наконец, освободимся также от параметра ε в выражениях для максимального и минимального отклонения.

Из (2.13) и (2.18) находим:

$$\left.\begin{aligned} x_{II\,\max} &= a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n(a)}{n^2-1}, \\ x_{II\,\min} &= -a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n p_n(a)}{n^2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Чтобы получить представление о практической эффективности найденных приближенных формул, рассмотрим некоторые числовые примеры, для которых известно точное решение.

Рассмотрим уравнение свободных колебаний математического маятника с массой m и длиной l без учета трения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0, \tag{2.25}$$

где x — угол отклонения маятника от положения равновесия.

В данном примере

$$p(x) = \frac{g}{l}\sin x$$

и разложение (2.17) будет:

$$p(a\cos\psi) = \frac{g}{l}\,2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(a)\cos(2n+1)\psi$$

($J_k(a)$ — функции Бесселя).

*) В большинстве практически важных случаев упругая сила симметрична. Несимметричность кривой $F_s = p(x)$ обусловливается, например, действием постоянной силы.

Согласно (2.21) и (2.23) находим:
в первом приближении

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= a\cos\psi, \\ \left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}\right)^2 &= \frac{2J_1(a)}{a}, \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{lm}$;

во втором приближении

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{II}} &= a\cos\psi + 2\frac{\omega_0^2}{\omega_{\mathrm{I}}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n J_{2n+1}(a)\cos(2n+1)\psi}{(2n+1)^2-1}, \\ \left(\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_0}\right)^2 &= \left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}\right)^2 + 4\frac{\omega_0^2}{\omega_{\mathrm{I}}^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2n+1}(a)\,J'_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

В частности,

$$x_{\mathrm{I}\max} = a,\quad x_{\mathrm{II}\max} = a + 2\frac{\omega_0^2}{\omega_{\mathrm{I}}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n J_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2-1}. \tag{2.28}$$

Рассматривая $x_{\max}$ и ω как функции амплитуды первой гармоники

$$x_{\max} = x_{\max}(a),\quad \omega = \omega(a), \tag{2.29}$$

подсчитаем их приближенные значения для ряда возможных значений a.

Ввиду весьма быстрой сходимости рядов, стоящих в правых частях выражений (2.27) и (2.28), достаточно при подсчете учитывать в них лишь первые два члена.

Далее, для оценки точности полученных решений (2.28) подсчитаем по таблицам эллиптических функций соответствующие значения (2.29) с помощью точных формул (для тех же значений a):

$$\left.\begin{aligned} x(\psi, a) &= \frac{8\sqrt{q}}{1+q}\cos\psi - \frac{8q^{3/2}}{3(1+q^3)}\cos 3\psi + \ldots, \\ \frac{\omega}{\omega_0} &= \frac{\pi}{2K}, \\ k &= \sin\frac{x_{\max}}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

здесь, как принято в руководствах по теории эллиптических функций, k — модуль, K — полный эллиптический интеграл первого рода, $q = e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}$, а $K'(k) = K(k')$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Результаты вычислений сведены в табл. 1, в которой имеется также графа, указывающая точные $x_{\max}$ в градусах.

Результаты вычислений свидетельствуют о вполне удовлетворительной точности, в особенности если принять во внимание, что наши приближенные формулы выведены в предположении, что упругая характеристика восстанавливающей силы обладает «слабой» нелинейностью — близка к прямолинейной. В рассматриваемом примере даже при углах отклонения маятника около 160° относительная погрешность первого приближения частоты составляет 5,5%, а второго — всего около 3%, хотя очевидно, что в пределах от $-160°$ до $+160°$ синус весьма плохо аппроксимируется прямой. При колебаниях маятника в пределах примерно от -30 до $+30°$ первое приближение частоты дает четыре точных знака, а для углов между $\pm 45°$ второе приближение дает пять точных знаков. Следовательно, там, где характеристика действительно близка к линейной, полученные приближенные формулы обладают высокой степенью точности.

Таблица 1

$x_{\mathrm{I}\,max}=a$	$x_{\mathrm{II}\,max}$	x_{max}	$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$	x^0_{max}
0,2	0,19996	1,19996	0,99751	0,99751	0,99751	11°27′25″
0,4	0,39966	0,39968	0,99002	0,99003	0,99003	22°53′46″
0,6	0,5988	0,5989	0,97759	0,97763	0,97763	34°18′52″
0,8	0,7972	0,7973	0,9602	0,96040	0,96040	45°40′55″
1,0	0,9944	0,9946	0,9381	0,93847	0,93846	56°59′11″
1,2	1,1900	1,1906	0,9113	0,91201	0,91198	68°12′59″
1,4	1,3835	1,3846	0,8799	0,88122	0,88114	79°19′54″
1,6	1,5743	1,5763	0,844	0,8463	0,8461	90°18′55″
1,8	1,761	1,765	0,804	0,8076	0,8072	101°07′37″
2,0	1,943	1,951	0,759	0,7654	0,7646	111°47′03″
2,2	2,118	2,132	0,711	0,7200	0,7185	122°09′17″
2,4	2,283	2,307	0,658	0,6719	0,6698	132°10′53″
2,6	2,432	2,476	0,602	0,6216	0,6138	141°51′52″
2,8	2,558	2,635	0,541	0,5699	0,5610	150°58′28″
3,0	2,642	2,783	0,475	0,5179	0,5023	159°27′15″

Ухудшение точности для углов, близких к 180°, объясняется тем, что это значение является критическим: при переходе через него изменяется характер движения — колебания сменяются вращением.

Остановимся теперь на исследовании небольших колебаний маятника. В этом случае можем в уравнении (2.25) $\sin x$ заменить двумя или тремя (в зависимости от того, на каком приближении собираемся остановиться) первыми членами тейлоровского разложения *).

Получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=0. \tag{2.31}$$

Применив к этому уравнению формулы (2.21), находим (ограничиваясь двумя членами в разложении для синуса):

$$x_{\mathrm{I}}=a\cos\psi,$$
$$\frac{\omega_{\mathrm{I}}^2(a)}{\omega_0^2}=1-\frac{a^2}{8}, \tag{2.32}$$

*) Заметим при этом, что разность

$$\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)$$

по абсолютной величине не превзойдет 0,00326, если x колеблется между $-30°$ и 30°, а разность

$$\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

не превзойдет 0,000002.

откуда

$$\frac{\omega_{\text{I}}(a)}{\omega_0}=\sqrt{1-\frac{a^2}{8}}\approx 1-\frac{a^2}{16}. \tag{2.33}$$

Из формулы (2.33) непосредственно видно, что при увеличении амплитуды колебания маятника частота уменьшается, а период собственных колебаний

$$T_1=\frac{T_0}{1-\frac{a^2}{16}}\approx T_0\left(1+\frac{a^2}{16}\right) \tag{2.34}$$

увеличивается. $\left(\text{Здесь } T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{lm}{g}}\right).$

Для построения решения во втором приближении воспользуемся формулами (2.23); тогда, учитывая в разложении для $\sin x$ также член $\frac{x^5}{5!}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{II}}&=a\cos\psi-\frac{a^3}{192}\left(1+\frac{3}{64}a^2\right)\cos 3\psi+\frac{a^5}{20480}\cos 5\psi,\\ \frac{\omega_{\text{II}}^2(a)}{\omega_0^2}&=1-\frac{a^2}{8}+\frac{3a^4}{512},\end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

откуда

$$\frac{\omega_{\text{II}}(a)}{\omega_0}\approx 1-\frac{a^2}{16}+\frac{a^4}{1024} \tag{2.36}$$

и

$$T_{\text{II}}=T_0\left(1+\frac{a^2}{16}+\frac{3a^4}{1024}\right). \tag{2.37}$$

Для максимальных отклонений согласно (2.24) имеем:

$$x_{\text{II max}}=a-\frac{a^3}{192}-\frac{a^5}{1024}. \tag{2.38}$$

При помощи полученных формул можно подсчитать частоты, периоды и максимальные отклонения для ряда значений a (амплитуды первой гармоники). Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

$x_{\text{I max}}=a$	$x_{\text{II max}}$	$\frac{\omega_{\text{I}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\text{II}}}{\omega_0}$	$\frac{T_{\text{I}}}{T_0}$	$\frac{T_{\text{II}}}{T_0}$
0,2	0,19996	0,99750	0,99750	1,00250	1,00250
0,4	0,39966	0,99000	0,99003	1,01000	1,01008
0,6	0,5988	0,97750	0,97763	1,02250	1,02288
0,8	0,7970	0,9600	0,96040	1,0400	1,04120
1,0	0,9938	0,9375	0,93848	1,0625	1,06543
1,2	1,1886	0,9100	0,91203	1,0900	1,09607
1,4	1,3805	0,8775	0,88125	1,1225	1,13376
1,6	1,5684	0,840	0,8464	1,160	1,1792
1,8	1,751	0,798	0,8078	1,203	1,2333
2,0	1,927	0,750	0,7656	1,250	1,2969
2,2	2,094	0,698	0,7204	1,303	1,3711
2,4	2,250	0,640	0,6724	1,360	1,4572
2,6	2,392	0,578	0,6221	1,423	1,5564
2,8	2,518	0,510	0,5700	1,490	1,6701
3,0	2,622	0,438	0,5166	1,563	1,7998

Сопоставляя табл. 2 с табл. 1, легко видеть, что для отклонений маятника, не превышающих $\pm 35°$ (в этих пределах частоты и максимальные отклонения совпадают с точными соответственно до 5-го и 4-го знака включительно), с успехом можно рассматривать уравнение (2.31) и соответствующие ему более простые приближенные решения (2.32) и (2.35) вместо точного уравнения (2.25). При больших же углах отклонения (порядка $\pm 160°$) относительная погрешность первого приближения составит 13%, а второго всего около 3%.

При рассмотрении свободных колебаний маятника мы не учитывали сил трения.

Если предположить, что колебания маятника затухают под воздействием сил, пропорциональных скорости, то приходим к исследованию следующего уравнения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+\frac{g}{l}\sin x=0, \tag{2.39}$$

или для небольших отклонений:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+\frac{g}{l}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)=0. \tag{2.40}$$

Согласно общим формулам § 1 в первом приближении решение уравнения (2.40) будет:

$$x=a\cos\psi, \tag{2.41}$$

где a и ψ должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\delta a,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega\left(1-\frac{a^2}{16}\right);\end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

здесь введены обозначения $\delta=\frac{\lambda}{2m}$, $\omega=\sqrt{\frac{g}{lm}}$.

Интегрируя первое уравнение системы (2.42) при начальных значениях $t=0$, $a=a_0$, находим:

$$a=a_0e^{-\delta t}. \tag{2.43}$$

После этого из второго уравнения системы (2.42) получаем:

$$\psi=\omega\left\{t+\frac{a_0^2}{32\delta}\left(e^{-2\delta t}-1\right)\right\}+\theta, \tag{2.44}$$

где θ — начальное значение фазы.

Подставляя значения амплитуды (2.43) и фазы (2.44) в формулу (2.41), получим первое приближение в виде

$$x=a_0e^{-\delta t}\cos\left\{\omega\left[t+\frac{a^2}{32\delta}\left(e^{-2\delta t}-1\right)\right]+\theta\right\}. \tag{2.45}$$

Таким образом, в первом приближении колебания будут затухающими, с частотой, зависящей от амплитуды $\omega=\omega(a)$, причем с увеличением времени вследствие постепенного затухания мгновенная частота будет увеличиваться, стремясь в пределе к постоянному «линейному» значению частоты $\omega=\sqrt{\frac{g}{lm}}$.

Рассмотрим теперь колебания системы, для которой характеристика восстанавливающей упругой силы имеет вид

$$p(x) = \alpha x + \gamma x^3 \quad (\alpha > 0,\ \gamma > 0). \tag{2.46}$$

В этом случае получаем нелинейное дифференциальное уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \tag{2.47}$$

которое может быть проинтегрировано в явной форме с помощью эллиптических функций. Следовательно, здесь можно также сопоставить приближенным решениям точные.

Так как для этого случая разложение (2.17) будет:

$$p(a\cos\psi) = \left(\alpha a + \frac{3}{4}\gamma a^3\right)\cos\psi + \frac{\gamma a^3}{4}\cos 3\psi,$$

то, вводя безразмерные комбинации $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x$, $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$, $\frac{\omega}{\omega_0}$, на основании (2.21) и (2.23) можем написать:

в первом приближении

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a\cos\psi, \\ &\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}(a)}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4}\left[\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a\right]^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,; \end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

во втором приближении

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\mathrm{II}} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a\cos\psi + \frac{\left(a\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^3 \cos 3\psi}{32\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}\right)^2}, \\ &\left(\frac{\omega_{\mathrm{II}}(a)}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}(a)}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{128}\frac{\left(a\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^4}{\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}\right)^4}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

откуда имеем:

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\mathrm{I}\max} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a; \quad \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\mathrm{II}\max} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a\left\{1 + \frac{a^2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{32\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}\right)^2}\right\}. \tag{2.50}$$

Точные значения $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\max}$ и $\frac{\omega}{\omega_0}$ для данных $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$ найдем по таблицам эллиптических функций с помощью формул

$$x(\psi,\ a) = x_{\max}\,\mathrm{cn}\left\{\frac{2K}{\pi}\psi\right\} = x_{\max}\frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\psi + \frac{q^{3/2}}{1+q^3}\cos 3\psi + \ldots\right\}, \tag{2.51}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\pi\sqrt{1+\xi^2}}{2K}, \quad k = \frac{\xi}{\sqrt{2+2\xi^2}}, \quad \xi = x_{\max}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Здесь cn, k, K, q обозначают соответственно эллиптический косинус, модуль, полный эллиптический интеграл первого рода и $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, а $K'(k) = K(k')$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Результаты вычислений приводим в табл. 3.

Таблица 3

$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$	$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\mathrm{II}\max}$	$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\max}$	$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,29927	0,30005	0,3	1,0330	1,0331	1,0331
0,59464	0,5998	0,6	1,1248	1,1258	1,1259
0,88552	0,8992	0,9	1,2602	1,2638	1,2641
1,1733	1,1981	1,2	1,4256	1,4333	1,4340
1,4592	1,4966	1,5	1,6115	1,6241	1,6257
1,7443	1,7948	1,8	1,8116	1,8297	1,8323
2,0293	2,0931	2,1	2,022	2,0459	2,0493
2,3140	2,3912	2,4	2,240	2,2697	2,2740
2,5991	2,6895	2,7	2,463	2,4985	2,5041
2,8841	2,9877	3,0	2,690	2,7318	2,7385

Принимая во внимание простоту формул (2.48) и (2.49), следует, очевидно, признать получаемую и в данном примере степень приближения вполне удовлетворительной. Можно, кроме того, показать, что эти формулы не теряют своей эффективности даже при $a\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \to \infty$.

В самом деле, соотношения (2.51) приводят к следующей асимптотической формуле:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1+q}{\sqrt{q}} a \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} + \ldots,$$

где q берется для модуля $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а точки обозначают член, отношение которого к написанному первому члену стремится к нулю при $a\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \to \infty$. Аналогичные асимптотические формулы получаются из (2.48) и (2.49) для $\frac{\omega_{\mathrm{I}}(a)}{\omega_0}$ и $\frac{\omega_{\mathrm{II}}(a)}{\omega_0}$ соответственно с коэффициентами пропорциональности $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}\left(1+\frac{3}{128}\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$. Их численные значения будут:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1+q}{\sqrt{q}}\right)_{q=\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0{,}887; \quad \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866; \quad \sqrt{\frac{3}{4}}\left(1+\frac{3}{128}\left(\frac{4}{3}\right)^2\right) = 0{,}892.$$

Таким образом, в пределе при $a\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \to \infty$ относительная погрешность первого приближения частоты составит 2,4%, а второго — всего 0,6%.

§ 3. Случай нелинейного трения

В качестве второго частного случая рассмотрим уравнение вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right), \tag{3.1}$$

которое можно интерпретировать как уравнение колебаний массы m,