Результаты вычислений приводим в табл. 3.

Таблица 3

$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$	$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\mathrm{II}\max}$	$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\max}$	$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,29927	0,30005	0,3	1,0330	1,0331	1,0331
0,59464	0,5998	0,6	1,1248	1,1258	1,1259
0,88552	0,8992	0,9	1,2602	1,2638	1,2641
1,1733	1,1981	1,2	1,4256	1,4333	1,4340
1,4592	1,4966	1,5	1,6115	1,6241	1,6257
1,7443	1,7948	1,8	1,8116	1,8297	1,8323
2,0293	2,0931	2,1	2,022	2,0459	2,0493
2,3140	2,3912	2,4	2,240	2,2697	2,2740
2,5991	2,6895	2,7	2,463	2,4985	2,5041
2,8841	2,9877	3,0	2,690	2,7318	2,7385

Принимая во внимание простоту формул (2.48) и (2.49), следует, очевидно, признать получаемую и в данном примере степень приближения вполне удовлетворительной. Можно, кроме того, показать, что эти формулы не теряют своей эффективности даже при $a\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \to \infty$.

В самом деле, соотношения (2.51) приводят к следующей асимптотической формуле:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1+q}{\sqrt{q}} a \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} + \ldots,$$

где q берется для модуля $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а точки обозначают член, отношение которого к написанному первому члену стремится к нулю при $a\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \to \infty$. Аналогичные асимптотические формулы получаются из (2.48) и (2.49) для $\frac{\omega_{\mathrm{I}}(a)}{\omega_0}$ и $\frac{\omega_{\mathrm{II}}(a)}{\omega_0}$ соответственно с коэффициентами пропорциональности $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}\left(1+\frac{3}{128}\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$. Их численные значения будут:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1+q}{\sqrt{q}}\right)_{q=\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0{,}887; \quad \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866; \quad \sqrt{\frac{3}{4}}\left(1+\frac{3}{128}\left(\frac{4}{3}\right)^2\right) = 0{,}892.$$

Таким образом, в пределе при $a\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \to \infty$ относительная погрешность первого приближения частоты составит 2,4%, а второго — всего 0,6%.

§ 3. Случай нелинейного трения

В качестве второго частного случая рассмотрим уравнение вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right), \tag{3.1}$$

которое можно интерпретировать как уравнение колебаний массы m, находящейся под воздействием линейной упругой силы kx и нелинейного слабого трения $\varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right)$, зависящего от скорости.

Это уравнение, очевидно, принадлежит к типу общего уравнения (1.1), причем здесь

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{m} F\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Чтобы воспользоваться формулами (1.21) — (1.28), определяющими искомые приближенные решения, рассмотрим разложение

$$\frac{1}{m} F(a \cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) \cos n\psi, \tag{3.2}$$

из которого получим:

$$\frac{1}{m} F(-a\omega \sin \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega) \cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Сопоставляя последнее разложение с (1.16), находим:

$$g_n(a) = F_n(a\omega) \cos \frac{n\pi}{2}, \quad h_n(a) = -F_n(a\omega) \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{3.3}$$

Поэтому согласно (1.17) имеем:

$$A_1(a) = \frac{1}{2\omega} F_1(a\omega), \quad B_1(a) = 0. \tag{3.4}$$

Таким образом, учитывая (1.23) и (1.24), получим первое приближение в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \psi, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} F_1(a\omega), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Отсюда легко видеть, что для систем, описываемых уравнением типа (3.1), в первом приближении амплитуда колебания затухает согласно закону, выраженному вторым уравнением (3.5). Что касается мгновенной частоты, то она постоянна и равна обычной линейной частоте ω, так что

$$\psi = \omega t + \theta,$$

где θ — начальное значение фазы ψ.

Таким образом, в первом приближении колебания оказываются гармоническими с постоянной частотой ω.

Мы уже имели возможность убедиться в том, что нелинейные колебательные системы, вообще говоря, не изохронны.

Рассматриваемый же пример является одним из важных случаев, когда в первом приближении система изохронна. Такие случаи будем называть случаями квазиизохронности *).

*) Мы прибавляем «квази» потому, что соответствующие колебательные системы, как показано ниже, будут изохронны лишь в первом приближении.

Перейдем к построению второго приближения. Согласно (1.28) и (3.3) находим:

$$u_1(a, \psi) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{F_n(a\omega)\cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}. \tag{3.6}$$

Далее из (1.30), (3.4) и (3.6) получаем:

$$\left.\begin{aligned} A_2(a) = &-\frac{A_1(a)}{2\omega\pi m} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\cos\psi\sin\psi\,d\psi - \\ &-\frac{1}{2\omega^2\pi m} \sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq 1)}}^{\infty} \frac{nF_n(a\omega)}{n^2-1} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\cdot\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\psi\,d\psi, \\ B_2(a) = &\frac{1}{2\omega}\frac{A_1(a)}{a}\frac{dA_1(a)}{da} - \frac{A_1(a)}{2\omega\pi a m}\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\times \\ &\times\cos^2\psi\,d\psi - \frac{1}{2\omega^2\pi a m}\sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq 1)}}^{\infty}\frac{nF_n(a\omega)}{n^2-1}\times \\ &\times\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

С другой стороны, заменяя в интегралах ψ на $\psi - \frac{\pi}{2}$, находим:

$$\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\psi\,d\psi = \\ = -\int_0^{2\pi} F'(a\omega\cos\psi)\sin n\psi\cos\psi\,d\psi = 0.$$

Далее, интегрируя по частям, получим:

$$\frac{1}{m}\int_0^{2\pi} F'(-a\omega\sin\psi)\sin n\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\psi\,d\psi = \\ = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} F'(a\omega\cos\psi)\sin n\psi\sin\psi\,d\psi = -\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\sin n\psi\,d\left[\frac{F(a\omega\cos\psi)}{a\omega}\right] = \\ = \frac{n}{a\omega m}\int_0^{2\pi} F(a\omega\cos\psi)\cos n\psi\,d\psi = \frac{n\pi}{a\omega}F_n(a\omega).$$

Поэтому (3.7) можно записать следующим образом:

$$A_2(a) = 0,$$

$$B_2(a) = \frac{F_1(a\omega)}{8\omega^3 a}\frac{dF_1(a\omega)}{da} - \frac{F_1^2(a\omega)}{4\omega^3 a^2} - \frac{1}{2\omega^3 a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2F_n^2(a\omega)}{n^2-1}. \tag{3.8}$$

Итак, в рассматриваемом случае второе приближение имеет вид

$$x = a \cos \psi - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{F_n(a\omega) \cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}, \tag{3.9}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon F_1(a\omega)}{2\omega}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 B_2(a), \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

где $B_2(a)$ определяется выражением (3.8).

Прежде чем перейти к анализу уравнений зависимости амплитуды от времени для различных законов силы трения, т. е. для различных видов функции $F\left(\frac{dx}{dt}\right)$, заметим, что для применимости выведенных формул необходимо общее ограничение, а именно: сила трения должна быть достаточно малой.

Переходя к анализу конкретных примеров, прежде всего рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{3.11}$$

с малым коэффициентом затухания:

$$\lambda = \varepsilon\nu.$$

Для данного уравнения

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\nu \frac{dx}{dt},$$

и потому

$$F_1(a\omega) = -\nu\omega a,$$
$$F_n(a\omega) = 0 \quad (n = 0,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Таким образом, согласно (3.8), (3.9) и (3.10) получим сразу во втором приближении:

$$x = a \cos \psi,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda a}{2}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left\{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Как видно из первого уравнения (3.12), для закона затухания амплитуды получается полное совпадение с точной формулой

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}},$$

а для частоты колебаний имеем приближенную формулу

$$\omega_2 = \omega \left\{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right\}, \tag{3.13}$$

которая соответствует двум первым слагаемым в разложении точного выражения для частоты

$$\omega\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}=\omega\left\{1-\frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2-\frac{1}{128}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^4+\ldots\right\}$$

по степеням $\frac{\lambda}{\omega}$, что, впрочем, совершенно естественно, так как мы не учитываем членов выше второго порядка малости.

Чтобы составить себе представление о степени точности полученной приближенной формулы (3.13), возьмем, например, $\frac{\lambda}{\omega}=\frac{\ln 2}{\pi}$. Заметим, что это значение коэффициента λ соответствует весьма значительному затуханию. Так за один период амплитуда колебаний уменьшается в два раза. По абсолютной величине «возмущающий член» $\lambda\frac{dx}{dt}$ достигает еще примерно $1/4$ «главных членов»: $\frac{d^2x}{dt^2}$ или ω^2x. Несмотря на это, относительная погрешность формулы (3.13) оказывается меньше чем 0,01%.

Рассмотрим еще один простой пример, приводящий к уравнению типа (3.1): гармонические или вообще малые колебания маятника в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости и мало. В этом случае уравнение колебаний будет:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\omega^2x=0, \quad \text{если } \frac{dx}{dt}>0,\\ \frac{d^2x}{dt^2}-\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\omega^2x=0, \quad \text{если } \frac{dx}{dt}<0,\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|+\omega^2x=0, \tag{3.15}$$

где, как всегда, $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ обозначает абсолютную величину $\frac{dx}{dt}$. (Мы прибегаем к такой записи, чтобы отметить, что член $\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ представляет собой сопротивление движению.)

Считая затухание достаточно слабым, положим

$$\alpha=\varepsilon\nu.$$

Тогда уравнение (3.15) будет уравнением вида (3.1), причем

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\nu\frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|.$$

Находим выражение n-го члена в разложении Фурье для $F(a\cos\psi)$:

$$F_n(a)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(a\cos\psi)\cos n\psi\,d\psi=-\frac{2\nu a^2}{\pi}\int_0^\pi|\cos\psi|\cos\psi\cos n\psi\,d\psi=$$

$$=-\frac{2\nu a^2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\cos n\psi\,d\psi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\psi\cos n\psi\,d\psi\right\},$$

откуда

$$F_0(a)=F_2(a)=F_4(a)=\ldots=F_{2q}(a)=\ldots=0,$$

$$F_1(a)=-\frac{8\nu a^2}{3\pi},\quad F_{2q+1}(a)=\frac{8\nu a^2(-1)^{q+1}}{\pi(2q+1)[(2q+1)^2-4]}$$

$$(q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, согласно (3.8), (3.9) и (3.10) второе приближение можем написать в виде

$$x=a\cos\psi-\frac{8\alpha a^2}{\pi}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\sin(2q+1)\psi}{(2q+1)[(2q+1)^2-1][(2q+1)^2-4]}=$$

$$=a\cos\psi-\frac{\alpha a^2}{15\pi}\left\{\sin 3\psi+\frac{1}{21}\sin 5\psi+\ldots\right\},\qquad(3.16)$$

где a и ψ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{4\alpha\omega}{3\pi}a^2,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega\left\{1-\frac{4\alpha^2a^2}{\pi^2}C\right\};\end{aligned}\right\}\qquad(3.17)$$

здесь для сокращения обозначено:

$$C=8\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{[(2q+1)^2-1][(2q+1)^2-4]^2}=$$

$$=\frac{1}{25}+\frac{1}{1323}+\frac{1}{12\,150}+\ldots=0{,}0407\ldots\qquad(3.18)$$

Интегрируя первое уравнение (3.17), имеем:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a_0}=\frac{4\alpha\omega}{3\pi}t,\qquad(3.19)$$

откуда находим закон затухания амплитуды основной гармоники колебания:

$$a=\frac{a_0}{1+\frac{4\alpha\omega a_0}{3\pi}t}.\qquad(3.20)$$

Таким образом, амплитуда колебаний при квадратичном законе затухания затухает приблизительно обратно пропорционально увеличению линейной функции времени.

Подставив выражение (3.20) во второе из уравнений (3.17) и интегрируя, получим закон вращения фазового угла:

$$\psi=\omega t-\frac{3C\alpha a_0}{\pi}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{4\alpha\omega a_0}{3\pi}t}\right\}+\psi_0.\qquad(3.21)$$

Итак, имеем явные выражения для представления колебательного процесса во втором приближении.

Заметим, что поправочные члены второго приближения весьма малы даже при значительном затухании. Так, если взять $\alpha a_0=\frac{3}{8}$, т. е. рассматривать случай, в котором амплитуда a через один цикл после начала колебаний уменьшается в два раза, то сумма амплитуд всех обертонов колебания будет составлять менее 1% от амплитуды главной гармоники, а поправка второго приближения для частоты колебаний будет менее 0,25%.

Сопоставим теперь полученное приближенное решение с точным.

Уравнение (3.15) может быть проинтегрировано до конца. Действительно, полагая при $t=0$, $x=x_0>0$, $\frac{dx}{dt}=0$, находим:

$$\int\limits_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1+2\alpha x)-(1+2\alpha x_0)\,e^{-2\alpha(x-x_0)}}}=\frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}}\,t. \tag{3.22}$$

Ввиду того, что правая часть является трансцендентной квадратурой, искомую функцию x нельзя представить с помощью элементарных функций. Однако нетрудно установить уравнение для двух последовательных амплитуд, затухающих из-за наличия трения, пропорционального квадрату скорости. Следуя F. Prásil'ю*), имеем:

$$(2\alpha x_{\mathrm{I}}+1)-\ln(2\alpha x_{\mathrm{I}}+1)=(2\alpha x_{\mathrm{II}}+1)-\ln(2\alpha x_{\mathrm{II}}+1), \tag{3.23}$$

или в наших обозначениях

$$(2\alpha a_0+1)-\ln(2\alpha a_0+1)=(2\alpha a_1+1)-\ln(2\alpha a_1+1), \tag{3.24}$$

где a_0 — начальное значение амплитуды, a_1 — значение амплитуды по истечении одного периода колебания.

Для того чтобы сравнить результаты, полученные по точной формуле (3.24) и приближенной (3.19), преобразуем формулу (3.19). Очевидно, ее можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2\alpha a}-\frac{1}{2\alpha a_0}=\frac{2\omega}{3\pi}\,t. \tag{3.25}$$

Подставляя в правую часть значение периода в первом приближении, получим следующее соотношение, связывающее между собой две последовательные амплитуды**):

$$\frac{1}{2\alpha a_1}-\frac{1}{2\alpha a_0}=\frac{4}{3}\,, \tag{3.26}$$

Приводимая ниже табл. 4 показывает хорошее совпадение последовательных амплитуд, рассчитанных по точной формуле (3.24) и приближенной. Для $2\alpha a_0=1$, т. е. в случае, когда амплитуда через полуцикл уменьшится до 0,6 своего значения, результаты по формуле (3.26) (которая характеризует только первое приближение) отличаются от точных результатов по формуле (3.24) только на 1%; для случая же $2\alpha a_0=0{,}1$ — на 0,4%.

Рассмотрим еще один пример, приводящий к уравнению типа (3.1): колебания тела, находящегося под воздействием кулоновского трения.

В этом случае приходим к рассмотрению уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=-A\,\mathrm{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right), \tag{3.27}$$

*) F. Prásil, Schweiz. Bauz. 52, 334 (1908).

**) Заметим, что такую же приближенную формулу эмпирически нашел A. de Caligny, Recherches sur les oscillations de l'eau, 1 Versailles, p. 20.

Таблица 4

$(2\alpha a)_{\text{точ}}$	$(2\alpha a)_{\text{пр}}$	$(2\alpha a)_{\text{точ}}$	$(2\alpha a)_{\text{пр}}$	$(2\alpha a)_{\text{точ}}$	$(2\alpha a)_{\text{пр}}$
1,0000	1,0000	0,1570	0,1578	0,0854	0,0856
0,5936	0,6000	0,1420	0,1428	0,0808	0,0810
0,4240	0,4285	0,1298	0,1304	0,0767	0,0769
0,3301	0,3332	0,1194	0,1200	0,0730	0,0731
0,2704	0,2726	0,1106	0,1111	—	—
0,2290	0,2307	0,1030	0,1034	—	—
0,1986	0,1999	0,0964	0,0967	—	—
0,1753	0,1764	0,0906	0,0908	—	—

где

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\begin{cases} 1, & \text{если } \dfrac{dx}{dt}>0, \\ -1, & \text{если } \dfrac{dx}{dt}<0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Сопоставляя уравнение (3.27) с (3.1), имеем:

$$\frac{\varepsilon}{m} F\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{A}{m}\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{3.29}$$

Следовательно, при $a>0$ получаем:

$$\varepsilon\int_0^{2\pi} F(a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=$$

$$=-A\left\{\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\right\}=-4A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi=-4A.$$

Далее, при $a=0$

$$\varepsilon\int_0^{2\pi} F(a\omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=0.$$

Поэтому согласно (3.5) в первом приближении для мгновенной амплитуды можем написать уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da}{dt}=-\frac{2A}{\pi m\omega}, && \text{если } a>0; \\ &\frac{da}{dt}=0, && \text{если } a=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Интегрируя уравнение (3.30) при начальных значениях $t=0$, $a=a_0$, находим:

$$\left.\begin{aligned} &a=a_0-\frac{2A}{\pi m\omega}t && \text{при } t\leqslant\frac{\pi m\omega}{2A}a_0; \\ &a=0 && \text{при } t>\frac{\pi m\omega}{2A}a_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

Согласно (3.31) очевидно, что при кулоновском трении колебания совершенно затухнут, начиная с момента времени $t=\bar{t}$, где

$$\bar{t}=\frac{\pi m\omega}{2A}a_0.$$

§ 4. Автоколебательные системы

Рассмотрим еще колебательную систему, описываемую уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f(x)\frac{dx}{dt}, \tag{4.1}$$

которое также является частным случаем уравнения (1.1).

Заметим, что ранее рассмотренное уравнение (3.1) может быть приведено к виду (4.1).

В самом деле, полагая

$$\frac{dx}{dt}=y$$

и дифференцируя уравнение (3.1), получаем:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=\varepsilon F'(y)\frac{dy}{dt}.$$

Сопоставляя уравнение (4.1) с (1.1), имеем:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)=f(x)\frac{dx}{dt};$$

поэтому, для того чтобы воспользоваться формулами (1.21) — (1.28), необходимо разложить в ряд Фурье выражение

$$f(a\cos\psi)\,a\omega\sin\psi.$$

Для упрощения этой операции рассмотрим функцию

$$F^*(x)=\int_0^x f(x)\,dx \tag{4.2}$$

и разложение в ряд Фурье:

$$F^*(a\cos\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^*(a)\cos n\psi. \tag{4.3}$$

Дифференцируя (4.3) по ψ, на основании (4.2) получим:

$$f(a\cos\psi)\,a\omega\sin\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\omega nF_n^*(a)\sin n\psi. \tag{4.4}$$

Сопоставляя (4.4) с (1.16) и (1.17), находим:

$$A_1(a)=\frac{1}{2}F_1^*(a),\quad B_1(a)=0, \tag{4.5}$$

откуда в первом приближении имеем:

$$x=a\cos\psi,$$